

УДК 517.518.1, 517.987.1

КРИТЕРИЙ РАВНОСТЕПЕННОЙ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МЕР¹

© 2007 В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев²

Получен критерий равностепенной абсолютной непрерывности последовательности скалярных функций множества относительно диагональной последовательности субмер. Тем самым ранее известный критерий усилен в двух направлениях: более не требуется, чтобы субмеры обладали свойством Орлича; теорема распространена на случай, когда последовательность субмер слабо диагональна.

Введение

Понятие равностепенной абсолютной непрерывности (РАН) двух последовательностей мер было введено в работах [1–4] в связи с изучением вопроса о предельном переходе под знаком интеграла в случае, когда меняется не только подынтегральная функция, но и интегрирующая мера. Представляют интерес условия, при которых выполняется РАН.

Некоторые достаточные условия РАН, использующие понятия диагональности и диагональной непрерывности последовательности мер, были найдены в работах [4–8].

В работе [9] получен критерий РАН последовательности мер $\{\mu_k\}_k$ относительно последовательности субмер $\{\nu_k\}_k$. Существенным недостатком этого критерия является то, что субмеры последовательности $\{\nu_k\}_k$ должны обладать свойством Орлича, что фактически делает кольцо σ -кольцом, а субмеры — σ -полуаддитивными.

В настоящей работе получен аналог этого критерия, в котором устранен этот недостаток. Кроме того, условие диагональности правой последовательности мер заменено более слабым условием слабой диагональности.

1. Определения и обозначения

Пусть X — некоторое множество, обозначим через (X) класс всех последовательностей из X . Пусть X — частично упорядоченное множество, обозначим через

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

²Алякин Владимир Алексеевич (aval@ssu.samara.ru), Клепнев Дмитрий Эдуардович (dek1@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$\downarrow(X)$ класс невозрастающих последовательностей из X , через $\Downarrow(X)$ — класс строго убывающих последовательностей из X , через $\uparrow(X)$ — класс неубывающих последовательностей из X и через $\Uparrow(X)$ — класс строго возрастающих последовательностей из X . Пусть X — булева алгебра, обозначим через $\Downarrow(X)$ класс дизъюнктивных последовательностей из X .

Везде далее $\mathcal{R}$ — кольцо множеств. В работе рассматриваются функции множества $\lambda: \mathcal{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$, удовлетворяющие условию $\lambda(\emptyset) = 0$.

Определение 2.1. Функция множества $\lambda: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ называется субмерой, если она монотонна и полуаддитивна.

Определение 2.2. Пусть $\lambda: \mathcal{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ — некоторая функция множества. Тогда функция множества $s(\lambda): \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$, задаваемая соотношением

$$\forall E \in \mathcal{R} \quad s(\lambda)(E) = \sup\{|\lambda(D)| : D \in \mathcal{R}, D \subset E\},$$

называется супремацией функции множества λ .

Легко убедиться, что $s(\lambda)$ монотонна; если функция множества λ монотонна, то $s(\lambda) = \lambda$; если λ аддитивна, то $s(\lambda)$ является субмерой.

Определение 2.3. Говорят, что функция множества μ абсолютно непрерывна относительно функции множества ν (обозначение: $\mu \ll \nu$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{R} \quad s(\nu)(E) < \delta \Rightarrow |\mu(E)| < \varepsilon.$$

Определение 2.4. Говорят, что последовательность функций множества $\{\mu_k\}_k$ равномерно абсолютно непрерывна относительно последовательности функций множества $\{\nu_k\}_k$ (обозначение: $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{R} \forall k \in \mathbb{N} \quad s(\nu_k)(E) < \delta \Rightarrow |\mu_k(E)| < \varepsilon.$$

Определение 2.5. См. [7, 9]. Последовательность субмер $\{\lambda_k\}_k$ назовем диагональной, если для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \in (\mathcal{R})$ справедлива импликация

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(E_k) = 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m(E_k) = 0.$$

Тривиальным примером диагональной последовательности субмер может служить неубывающая последовательность, то есть такая последовательность субмер $\{\lambda_k\}_k$, что $\forall E \in \mathcal{R} \forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_k(E) \leq \lambda_{k+1}(E)$.

Определение 2.6. См. [7]. Последовательность субмер $\{\lambda_k\}_k$ назовем слабо диагональной, если для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и всякой последовательности номеров $\{n_k\}_k \in \Uparrow(\mathbb{N})$ справедлива импликация

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k}(E_k) = 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_m}(E_k) = 0.$$

Нетрудно видеть, что диагональность влечет слабую диагональность, и что всякая подпоследовательность слабо диагональной последовательности субмер сама является слабо диагональной. В работе [7] приведены примеры слабо диагональных последовательностей мер, не являющихся диагональными.

Определение 2.7. См. [8]. Последовательность субмер $\{\lambda_k\}_k$ назовем диагонально непрерывной, если существует такая субмера λ' , что выполнены два условия:

$$\begin{aligned} \forall \{E_k\}_k \in (\mathcal{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(E_k) = 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda'(E_k) = 0; \\ \forall E \in \mathcal{R} \quad \lambda'(E) = 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(E) = 0. \end{aligned}$$

Тривиальным примером диагонально непрерывной последовательности субмер может служить последовательность, сходящаяся к нулю, то есть такая последовательность субмер $\{\lambda_k\}_k$, что

$$\forall E \in \mathcal{R} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(E) = 0.$$

Определение 2.8. Последовательность функций множества $\{\lambda_k\}_k$ называется равномерно исчерпывающей, если для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} |\lambda_m(E_k)| = 0.$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. Пусть $\{\mu_k\}_k, \{\nu_k\}_k$ — две последовательности субмер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_k \ll \nu_k$. Если условие $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$ не выполнено, то существуют такие $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и последовательность номеров $\{n_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_{n_k}(E_k) &\geq \varepsilon; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(E_k) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Если условие $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$ не выполнено, то существуют такие $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{D_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и последовательность номеров $\{p_k\}_k \in (\mathbb{N})$, что

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_{p_k}(D_k) &\geq \varepsilon; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{p_k}(D_k) &= 0. \end{aligned}$$

В силу условия $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_k \ll \nu_k$ в последовательности $\{p_k\}_k$ каждый номер может встречаться лишь конечное число раз, следовательно, существует такая последовательность номеров $\{q_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что $\{p_{q_k}\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$. Положив

$$\begin{aligned} \{E_k\}_k &= \{D_{q_k}\}_k; \\ \{n_k\}_k &= \{p_{q_k}\}_k, \end{aligned}$$

получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\{\mu_k\}_k, \{\nu_k\}_k$ — две последовательности субмер. Если

$$\forall \{E_k\}_k \in \mathcal{J}(\mathcal{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0, \quad (2.1)$$

то

$$\forall \{E_k\}_k \in \mathcal{J}(\mathcal{R}) \quad \forall \{n_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(E_k) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность множеств $\{E_k\}_k \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ и последовательность номеров $\{n_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(E_k) = 0.$$

Положим $\forall k \in \mathbb{N} \quad E'_{n_k} = E_k$ и $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \quad E'_j = \emptyset$. Тогда $\{E'_k\}_k \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E'_k) = 0.$$

В силу условия (2.1) отсюда следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E'_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(E'_{n_k}) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(E_k) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\{\mu_k\}_k$, $\{\nu_k\}_k$ — две последовательности субмер. Если

$$\forall \{E_k\}_k \in \mathfrak{I}(\mathcal{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0, \quad (2.2)$$

то

$$\begin{aligned} \forall \{E_k\}_k \in (\mathcal{R}) \quad & \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \right. \\ & \left. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \cap (m, +\infty) \mu_k \left(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j \right) < \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим противное, что (2.2) выполнено, а (2.3) — нет. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и последовательность множеств $\{E_k\}_k \in (\mathcal{R})$, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \cap (m, +\infty) \mu_k \left(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j \right) \geq \varepsilon; \quad (2.3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0. \quad (2.4)$$

Возьмем в (2.3) $m = n_1 = 1$. Тогда существует номер $n_2 \in \mathbb{N} \cap (n_1, +\infty)$ такой, что

$$\mu_{n_2} \left(E_{n_2} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} E_j \right) \geq \varepsilon.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$ и уже построены такие номера $\{n_1, \dots, n_{p+1}\}$, что $n_1 < \dots < n_{p+1}$ и

$$\forall k \in \{1, \dots, p\} \mu_{n_{k+1}} \left(E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right) \geq \varepsilon.$$

Возьмем в (2.3) $m = n_{p+1}$. Тогда существует номер $n_{p+2} \in \mathbb{N} \cap (n_{p+1}, +\infty)$ такой, что

$$\mu_{n_{p+2}} \left(E_{n_{p+2}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_{p+1}} E_j \right) \geq \varepsilon.$$

Таким образом, получаем построенную по индукции такую последовательность номеров $\{n_k\}_k \in \mathfrak{I}(\mathbb{N})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu_{n_{k+1}} \left(E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right) \geq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Поскольку

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \nu_{n_{k+1}} \left(E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right) \leq \nu_{n_{k+1}}(E_{n_{k+1}}),$$

то в силу условия (2.4) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_{k+1}} \left(E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right) = 0. \quad (2.6)$$

Так как

$$\left\{ E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right\}_k \in \mathfrak{I}(\mathcal{R}),$$

то в силу леммы 3.2 из условий (2.2) и (2.6) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_{k+1}} \left(E_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} E_j \right) = 0.$$

Получаем противоречие с (2.5). Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $\{\mu_k\}_k$ — последовательность субмер, $\{\nu_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность субмер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \mu_k \ll \nu_k$. Если

$$\forall \{E_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0, \quad (2.7)$$

то

$$\forall \{E_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0. \quad (2.8)$$

Доказательство. Предположим противное, что (2.7) выполнено, а (2.8) — нет. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R})$ и последовательность номеров $\{n_k\}_k \in \uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu_{n_k}(E_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad (2.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(E_{n_k}) = 0. \quad (2.10)$$

В силу слабой диагональности последовательности $\{\nu_k\}_k$ из условия (2.10) следует, что существует такая последовательность номеров $\{p_k\}_k \in \uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_{p_m}}(E_{n_k}) = 0,$$

откуда в силу условия $\forall k \in \mathbb{N} \mu_k \ll \nu_k$ получаем

$$\forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_{p_m}}(E_{n_{p_k}}) = 0. \quad (2.11)$$

Введем обозначения для подпоследовательностей:

$$\{E'_k\}_k = \{E_{n_{p_k}}\}_k; \quad \{\mu'_k\}_k = \{\mu_{n_{p_k}}\}_k; \quad \{\nu'_k\}_k = \{\nu_{n_{p_k}}\}_k.$$

Тогда $\{E'_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R})$, а также в силу (2.9)–(2.11) имеем

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu'_k(E'_k) \geq \varepsilon; \quad (2.12)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu'_m(E'_k) = 0; \quad (2.13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu'_k(E'_k) = 0. \quad (2.14)$$

Возьмем в (2.13) $m = r_1 = 1$. Тогда существует номер $r_2 \in \mathbb{N} \cap (r_1, +\infty)$ такой, что $\mu'_{r_1}(E'_{r_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $E'_{r_2} \subset E'_{r_1}$, и в силу условия (2.12) $\mu'_{r_1}(E'_{r_1}) \geq \varepsilon$, то

$$\mu'_{r_1}(E'_{r_1} \setminus E'_{r_2}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$ и уже построены такие номера $\{r_1, \dots, r_{s+1}\} \subset \mathbb{N}$, что $r_1 < \dots < r_{s+1}$ и

$$\forall k \in \{1, \dots, s\} \mu'_{r_k}(E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем в (2.13) $m = r_{s+1}$. Тогда существует номер $r_{s+2} \in \mathbb{N} \cap (r_{s+1}, +\infty)$ такой, что $\mu'_{r_{s+1}}(E'_{r_{s+2}}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $E'_{r_{s+2}} \subset E'_{r_{s+1}}$, и в силу условия (2.12) $\mu'_{r_{s+1}}(E'_{r_{s+1}}) \geq \varepsilon$, то

$$\mu'_{r_{s+1}}(E'_{r_{s+1}} \setminus E'_{r_{s+2}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, получаем построенную по индукции такую последовательность номеров $\{r_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu'_k(E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}) \geq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.15)$$

Поскольку $\forall k \in \mathbb{N} 0 \leq v'_{r_k}(E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}) \leq v'_{r_k}(E'_{r_k})$, то в силу условия (2.14) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v'_{r_k}(E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}) = 0. \quad (2.16)$$

Так как $\{E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}\}_k \in \uparrow(\mathcal{R})$, в силу леммы 3.2 из условий (2.7) и (2.16) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu'_k(E'_{r_k} \setminus E'_{r_{k+1}}) = 0.$$

Получаем противоречие с (2.15). Лемма доказана.

3. Основной результат

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо множеств, $\{\mu_k\}_k$ — последовательность субмер, $\{v_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность субмер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \mu_k \ll v_k$. Тогда для того, чтобы имело место $\{\mu_k\}_k \lll \{v_k\}_k$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой дизъюнктивной последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathcal{R}$ была справедлива импликация

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0. \quad (3.1)$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное утверждению теоремы, что условие (3.1) выполнено, а условие $\{\mu_k\}_k \lll \{v_k\}_k$ — нет. Тогда в силу леммы 3.1 существуют такие $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и последовательность номеров $\{n_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \mu_{n_k}(E_k) &\geq \varepsilon; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}(E_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу слабой диагональности последовательности $\{v_k\}_k$ из условия (3.2) следует, что существует такая последовательность номеров $\{p_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_{p_m}}(E_k) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_{p_k}}(E_{p_k}) &= 0; \\ \forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_{p_m}}(E_{p_k}) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что существует такая последовательность $\{r_k\}_k \in \uparrow\uparrow(\mathbb{N})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \cap [k, +\infty) v_{n_{p_{r_k}}}(E_{p_{r_m}}) \leq 2^{-m}.$$

Введем обозначения для подпоследовательностей:

$$\{E'_k\}_k = \{E_{p_{r_k}}\}_k, \quad \{\mu'_k\}_k = \{\mu_{n_{p_{r_k}}}\}_k, \quad \{v'_k\}_k = \{v_{n_{p_{r_k}}}\}_k.$$

Получаем: построены такие $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E'_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и последовательности субмер $\{\mu'_k\}_k \in (\mathcal{R})$ и $\{v'_k\}_k \in (\mathcal{R})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu'_k(E'_k) \geq \varepsilon; \quad (3.3)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \cap [k, +\infty) v'_k(E'_m) \leq 2^{-m}. \quad (3.4)$$

Положим $s_1 = 1$ и применим лемму 3.3 к последовательности множеств $\{E'_k\}_k$ и последовательностям субмер $\{\mu'_k\}_k$ и $\{\nu'_k\}_k$, что возможно в силу леммы 3.2 и условий (3.1) и (3.4). Получаем: существует такой номер $s_2 \in \mathbb{N} \cap (s_1, +\infty)$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_2, +\infty) \mu'_k \left(E'_k \setminus \left(\bigcup_{j=s_1}^{s_2-1} E'_j \right) \right) < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Тогда в силу условия (3.3) имеем

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_2, +\infty) \mu'_k \left(E'_k \cap \left(\bigcup_{j=s_1}^{s_2-1} E'_j \right) \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Положим

$$F_1 = \bigcup_{j=s_1}^{s_2-1} E'_j;$$

$$\forall k \in \mathbb{N} E_k^1 = E'_k \cap F_1.$$

Тогда в силу условий (3.3) и (3.4) получим

$$\mu'_{s_1}(F_1) = \mu'_{s_1} \left(\bigcup_{j=s_1}^{s_2-1} E'_j \right) \geq \mu'_{s_1}(E'_{s_1}) \geq \varepsilon;$$

$$\nu'_{s_1}(F_1) = \nu'_{s_1} \left(\bigcup_{j=s_1}^{s_2-1} E'_j \right) \leq \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \nu'_{s_1}(E'_j) \leq \sum_{j=s_1}^{s_2-1} 2^{-j} \leq 2^{1-s_1}.$$

Для последовательностей $\{E'_k\}_{k \geq s_2}$, $\{\mu'_k\}_{k \geq s_2}$ и $\{\nu'_k\}_{k \geq s_2}$ справедливы следующие аналогии свойств (3.3) и (3.4):

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_2, +\infty) \mu'_k(E_k^1) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2};$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_2, +\infty) \forall m \in \mathbb{N} \cap [k, +\infty) \nu'_k(E_m^1) \leq \nu'_k(E_m^1) \leq 2^{-m}.$$

Пусть $t \in \mathbb{N}$ и уже построены такие номера $\{s_1, \dots, s_{t+1}\} \subset \mathbb{N}$, множества $\{F_1, \dots, F_t\} \subset \mathcal{R}$ и последовательность множеств $\{E_k^t\}_k \in (\mathcal{R})$, что

$$s_1 < \dots < s_{t+1};$$

$$F_1 \supset \dots \supset F_t;$$

$$\forall k \in \mathbb{N} E_k^t \subset E'_k \cap F_t;$$

$$\forall k \in \{1, \dots, t\} \mu'_{s_k}(F_k) \geq \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\forall k \in \{1, \dots, t\} \nu'_{s_k}(F_k) \leq 2^{1-s_k},$$

причем для последовательностей $\{E'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$, $\{\mu'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$ и $\{\nu'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$ справедливы следующие аналогии свойств (3.3) и (3.4):

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+1}, +\infty) \mu'_k(E_k^t) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^{t+1}}; \quad (3.5)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+1}, +\infty) \forall m \in \mathbb{N} \cap [k, +\infty) \nu'_k(E_m^t) \leq 2^{-m}. \quad (3.6)$$

Применим лемму 3.3 к последовательности множеств $\{E'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$ и последовательностям субмер $\{\mu'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$ и $\{\nu'_k\}_{k \geq s_{t+1}}$, что возможно в силу леммы 3.2 условий (3.1) и (3.6). Получаем: существует такой номер $s_{t+2} \in \mathbb{N} \cap (s_{t+1}, +\infty)$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+2}, +\infty) \mu'_k \left(E_k^t \setminus \left(\bigcup_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} E_j^t \right) \right) < \frac{\varepsilon}{2^{t+2}}.$$

Тогда в силу условия (3.5) имеем

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+2}, +\infty) \mu'_k \left(E_k^t \cap \left(\bigcup_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} E_j^t \right) \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^{t+2}}.$$

Положим

$$F_{t+1} = \bigcup_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} E_j^t;$$

$$\forall k \in \mathbb{N} E_k^{t+1} = E_k^t \cap F_{t+1}.$$

Тогда $F_{t+1} \subset F_t$ и $\forall k \in \mathbb{N} E_k^{t+1} \subset E_k^t \cap F_{t+1}$. Кроме того, в силу условий (3.5) и (3.6) получим

$$\mu'_{s_{t+1}}(F_{t+1}) = \mu'_{s_{t+1}} \left(\bigcup_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} E_j^t \right) \geq \mu'_{s_{t+1}}(E_{s_{t+1}}^t) \geq \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\nu'_{s_{t+1}}(F_{t+1}) = \nu'_{s_{t+1}} \left(\bigcup_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} E_j^t \right) \leq \sum_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} \nu'_{s_{t+1}}(E_j^t) \leq \sum_{j=s_{t+1}}^{s_{t+2}-1} 2^{-j} \leq 2^{1-s_{t+1}}.$$

Для последовательностей $\{E_k^t\}_{k \geq s_{t+2}}$, $\{\mu'_k\}_{k \geq s_{t+2}}$ и $\{\nu'_k\}_{k \geq s_{t+2}}$ справедливы следующие аналоги свойств (3.3) и (3.4):

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+2}, +\infty) \mu'_k(E_k^{t+1}) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^{t+2}};$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [s_{t+2}, +\infty) \forall m \in \mathbb{N} \cap [k, +\infty) \nu'_k(E_m^{t+1}) \leq \nu'_k(E_m^t) \leq 2^{-m}.$$

В результате получаем построенные по индукции такие последовательность номеров $\{s_k\}_k \in \uparrow(\mathbb{N})$ и последовательность множеств $\{F_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R})$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \mu'_{s_k}(F_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}; \quad (3.7)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \nu'_{s_k}(F_k) \leq 2^{1-s_k},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu'_{s_k}(F_k) = 0. \quad (3.8)$$

Однако для последовательностей субмер $\{\mu'_{s_k}\}_k$ и $\{\nu'_{s_k}\}_k$ справедливы условия: последовательность $\{\nu'_{s_k}\}_k$ слабо диагональна, $\forall k \in \mathbb{N} \mu'_{s_k} \ll \nu'_{s_k}$, кроме того, в силу леммы 3.2 имеем

$$\forall \{E_k\}_k \in \uparrow(\mathcal{R}) \lim_{k \rightarrow \infty} \nu'_{s_k}(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu'_{s_k}(E_k) = 0,$$

следовательно, в силу леммы 3.4 для них также справедливо условие

$$\forall \{E_k\}_k \in \downarrow(\mathcal{R}) \lim_{k \rightarrow \infty} \nu'_{s_k}(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu'_{s_k}(E_k) = 0.$$

Но это противоречит полученным условиям (3.7) и (3.8). Теорема доказана.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо множеств, $\{\mu_k\}_k$ — последовательность аддитивных функций множества, $\{\nu_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность субмер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \mu_k \ll \nu_k$. Тогда для того чтобы имело место $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой дизъюнктивной последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathcal{R}$ была справедлива импликация

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0. \quad (3.9)$$

Доказательство. Поскольку $\forall k \in \mathbb{N} \mu_k \ll \nu_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} s(\mu_k) \ll \nu_k$ и $\{\mu_k\}_k \ll \{\nu_k\}_k \Leftrightarrow \{s(\mu_k)\}_k \ll \{\nu_k\}_k$, в силу теоремы 4.1 достаточно убедиться, что условие

$$\forall \{E_k\}_k \in \mathcal{I}(\mathcal{R}) \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E_k) = 0 \quad (3.10)$$

равносильно условию

$$\forall \{E_k\}_k \in \mathcal{I}(\mathcal{R}) \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s(\mu_k)(E_k) = 0. \quad (3.11)$$

Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Допустим, условие (3.11) не выполняется. Тогда существует последовательность множеств $\{E_k\}_k \in \mathcal{I}(\mathcal{R})$ такая, что

$$\neg \lim_{k \rightarrow \infty} s(\mu_k)(E_k) = 0; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_k) = 0.$$

Для всякого номера $k \in \mathbb{N}$ существует такое множество $D_k \in \mathcal{R}$, что $D_k \subset E_k$ и

$$0 \leq \frac{1}{2} s(\mu_k)(E_k) \leq |\mu_k(D_k)|.$$

Поскольку

$$\forall k \in \mathbb{N} \ 0 \leq \nu_k(D_k) \leq \nu_k(E_k),$$

имеем

$$\neg \lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k(D_k)| = 0; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(D_k) = 0.$$

Так как $\{D_k\}_k \in \mathcal{I}(\mathcal{R})$, условие (3.10) также не выполняется. Теорема доказана.

Следствие 4.3. Если в условиях теоремы 1 последовательность субмер $\{\nu_k\}_k$ является равномерно исчерпывающей, то $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$ тогда и только тогда, когда последовательность субмер $\{\mu_k\}_k$ является равномерно исчерпывающей.

Следствие 4.4. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -алгебра подмножеств множества X . Пусть $\{\nu_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность конечных неотрицательных σ -аддитивных мер на $\mathcal{S}$, причем для всякого множества $E \in \mathcal{S}$ последовательность $\{\nu_k(E)\}_k$ сходится к конечному пределу. Пусть $\{f_k\}_k$ — последовательность функций точки, $\forall k \in \mathbb{N} f_k \in L_1(X, \mathcal{S}, \nu_k)$. Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \forall E \in \mathcal{S} \ \mu_k(E) = \int_E f_k d\nu_k.$$

Тогда для выполнения условия $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность мер $\{\mu_k\}_k$ была равномерно исчерпывающей.

Пример 4.5. Пусть λ — мера Лебега на $[0, 1]$. Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \mu_k = \lambda; \quad \nu_k = \frac{1}{k} \lambda.$$

Тогда выполнены все условия теоремы 4.1, за исключением того, что последовательность субмер $\{\nu_k\}_k$ является не слабо диагональной, а диагонально непрерывной. При этом условие $\{\mu_k\}_k \lll \{\nu_k\}_k$ не выполнено. Этот пример показывает, что условие слабой диагональности не может быть заменено условием диагональной непрерывности, тем более, не может быть отброшено.

Пример 4.6. Пусть λ — мера Лебега на $[0, 1]$. Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \mu_k = 2^k \lambda; \quad \nu_k = \lambda.$$

Тогда выполнены все условия теоремы 4.1, за исключением (3.1). Этот пример показывает, что условие (3.1) не может быть исключено из условий теоремы.

Литература

- [1] Арешкин, Г.Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона / Г.Я. Арешкин // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1949. – Т. 10. – №2. – С. 69–76.
- [2] Алексюк В. Н. О переходе к пределу под знаком интеграла / В.Н. Алексюк // Изв. вузов. Математика. – №5. – 1965. – С. 2–8.
- [3] Арешкин, Г.Я. Об одном обобщении теоремы Витали о переходе к пределу под знаком интеграла / Г.Я. Арешкин, В.М. Климкин // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1968. – Т. 387. – С. 79–91.
- [4] Климкин, В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности семейства векторнозначных мер / В.М. Климкин // Ученые записки Красноярского пединститута. – 1970. – Вып. 2. – С. 45–57.
- [5] Климкин, В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности / В.М. Климкин // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25. – №2. – С. 199–209.
- [6] Алякин, В.А. Теорема Витали–Хана–Сакса для двух последовательностей мер / В.А. Алякин // В сб.: Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. – Куйбышев, 1984.
- [7] Алякин, В.А. Диагональные последовательности мер / В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2006. – №2(42). – С. 5–14.
- [8] Алякин, В.А. Диагонально непрерывные последовательности мер / В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №6(56). – С. 176–187.
- [9] Климкин, В.М. Введение в теорию функции множества: Учебное пособие / В.М. Климкин. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989.

Поступила в редакцию 7/IX/2007;
в окончательном варианте — 28/IX/2007.

CRITERION OF UNIFORM ABSOLUTE CONTINUITY FOR TWO SEQUENCES OF MEASURES³

© 2007 V.A. Alyakin, D.E. Klepnev⁴

A criterion of uniform absolute continuity (u.a.c.) for two sequences of measures is obtained. These measures are finite additive and defined on ring of sets. It is also shown that under some simple conditions u.a.c. is equivalent to the "u.a.c. on disjunct set sequences".

Paper received 7/IX/2007.
Paper accepted 28/IX/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴Alyakin Vladimir Alekseevich (aval@ssu.samara.ru), Klepnev Dmitrii Eduardovich (dekl@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.