

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В ПРОБЛЕМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ $n\alpha$ НА МНОЖЕСТВАХ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА<sup>1</sup>

© 2007 А.В. Шутов<sup>2</sup>

В работе получены точные по порядку оценки остаточного члена проблемы распределения дробных долей  $n\alpha$  на интервалах ограниченного остатка.

## Введение

Пусть  $\alpha$  — иррационально. Г. Вейль доказал [1], что дробные доли последовательности  $\{n\alpha\}$  равномерно распределены по модулю 1. Пусть  $I = [a; b) \subset [0; 1)$ ,

$$N(\alpha, a, n, I) = \#\{i : 0 < i \leq n, \langle \alpha \rangle \in I\},$$

$$r(\alpha, a, n, I) = N(\alpha, a, n, I) - n|I|,$$

и  $\langle \cdot \rangle$  — дробная доля числа. Тогда теорема Вейля означает, что

$$r(\alpha, a, n, I) = o(n).$$

Величина  $r(\alpha, a, n, I)$  называется остаточным членом проблемы распределения дробных долей.

Гекке в работе [11] рассмотрел интервалы ограниченного остатка, для которых  $\sup_{a,n} |r(\alpha, a, n, I)| < \infty$ . Полное описание таких интервалов было найдено Кестеном [12]. Оказалось, что интервал  $I$  является интервалом ограниченного остатка тогда и только тогда, когда  $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ . При этом справедливо неравенство

$$|r(\alpha, a, n, I)| \leq |h(I)|, \quad (1)$$

где  $h(I)$  — единственное целое число, удовлетворяющее условию  $|I| - h(I)\alpha \in \mathbb{Z}$ . Доказательство оценки (1) можно найти в работах [11], [15].

Введем величину

$$r(\alpha, h) = \sup_{I: |I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, |h(I)|=h} \sup_{a,n} |r(\alpha, a, n, I)|.$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

<sup>2</sup>Шутов Антон Владимирович (shutov@vgpu.vladimir.ru), кафедра информатики Владимирского государственного педагогического университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр-т Строителей, 11.

Тогда оценка (1) запишется в виде

$$r(\alpha, h) \leq h. \quad (2)$$

Кестен высказал предположение о возможности существенного улучшения оценки (2). Многочисленные примеры таких улучшений для различных  $\alpha$  и  $h$  можно найти в работах [3, 4, 7, 10, 16]. Цель данной работы — доказательство точных по порядку оценок  $r(\alpha, h)$  для всех  $\alpha, h$ .

**Содержание работы.** §2 содержит оценку сверху для  $r(\alpha, h)$  в терминах разложения  $\alpha$  в цепную дробь. §3 содержит доказательство того, что оценка из §2 в некотором смысле не может быть улучшена. В §4 доказан аналог теоремы Хинчина, устанавливающий точный порядок роста  $r(\alpha, h)$  для почти всех  $\alpha$ . В §5 для функции  $r(\alpha, h)$  доказываются некоторые аналоги теоремы Ярника, то есть оценивается размерность по Хаусдорфу множеств, для которых функция  $r(\alpha, h)$  имеет заданный рост.

## 1. Верхние оценки

**Лемма 1.** Пусть  $I = [a; b) \subset [0; 1)$  и  $\chi_I(x)$  — характеристическая функция  $I$ . Тогда

$$\chi_I(x) = \langle x - b \rangle - \langle x - a \rangle + |I|. \quad (3)$$

**Доказательство** можно найти в работе [13].

**Лемма 2.** Пусть  $I = [0; \gamma)$ ,  $C_n(\alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^n (\langle i\alpha + \gamma \rangle - \frac{1}{2})$ . Тогда

$$r(\alpha, a, n, I) = C_n(\alpha, a - \gamma) - C_n(\alpha, a). \quad (4)$$

**Доказательство** получается непосредственным вычислением с использованием (3).

**Теорема 1.** Справедливо неравенство

$$r(\alpha, h) \leq 2 \sup_{\gamma} |C_n(\alpha, \gamma)|. \quad (5)$$

**Доказательство.** Вначале заметим, что без ограничения общности можно положить  $I = [0; \langle \pm h\alpha \rangle)$ . Действительно, пусть  $I_1 = [a_0; a_0 + \langle \pm h\alpha \rangle)$ . Тогда  $\langle x \rangle \in I_1$  тогда и только тогда, когда  $\langle x - a_0 \rangle \in I$  и, следовательно,  $r(\alpha, a, n, I_1) = r(\alpha, \langle a - a_0 \rangle, n, I)$ .

Пусть  $I = [0; \langle -h\alpha \rangle)$ . Тогда из (4) находим  $r(\alpha, a, n, I) = C_n(\alpha, a + h\alpha) - C_n(\alpha, a) = \sum_{i=1}^n \langle (i+h)\alpha + a \rangle - \sum_{i=1}^n \langle i\alpha + a \rangle = \sum_{i=n-h+1}^n \langle (i+h)\alpha + a \rangle - \sum_{i=1}^h \langle i\alpha + a \rangle = \sum_{i=1}^h \langle i\alpha + n\alpha + a \rangle - \sum_{i=1}^h \langle i\alpha + a \rangle = C_h(\alpha, n\alpha + a) - C_h(\alpha, a)$ . Отсюда,

$$|r(\alpha, a, n, I)| \leq C_h(\alpha, n\alpha + a) + C_h(\alpha, a)$$

и

$$\sup_{a, n} |r(\alpha, a, n, I)| \leq 2 \sup_{\gamma} |C_n(\alpha, \gamma)|.$$

Случай  $I = [0; \langle h\alpha \rangle)$  рассматривается полностью аналогично.

Пусть разложение  $\alpha$  в цепную дробь имеет вид  $\alpha = [0; q_1, q_2, \dots]$  и  $\{\frac{P_n}{Q_n}\}$  — последовательность подходящих дробей к  $\alpha$ . Пусть

$$l(\alpha, n) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k |z_i| : z_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^k z_i Q_{i-1} = n \right\}.$$

В [6] было доказано, что

$$|C_n(\alpha, \gamma)| \leq \frac{3}{2} l(\alpha, n). \quad (6)$$

**Теорема 2.** *Справедливо неравенство*

$$r(\alpha, h) \leq 3l(\alpha, h). \quad (7)$$

**Доказательство** немедленно следует из (5) и (6).

**Теорема 3.** *Справедливо неравенство*

$$\max_{1 \leq h \leq Q_t} r(\alpha, h) \leq 3 \sum_{i=1}^t q_i. \quad (8)$$

**Доказательство.** Заметим, что любое  $h < Q_t$  может быть представлено в виде  $h = \sum_{i=1}^t z'_i Q_{i-1}$ , где

- 1)  $0 \leq z'_1 \leq q_1 - 1$ ;
- 2)  $0 \leq z'_i \leq q_i$  при  $2 \leq i \leq t$ ;
- 3) если  $z'_i = q_i$ , то  $z'_{i-1} = 0$ .

Такое разложение называется разложением Цеккендорфа. Из его существования сразу следует, что для  $h \leq Q_t$  выполняется неравенство  $l(\alpha, h) \leq \sum_{i=1}^t q_i$ . Далее остается использовать оценку (7).

В работе [14] было доказано, что

$$|C_n(\alpha, \gamma)| < 4n^{\frac{r}{1+r}} f^{\frac{1}{1+r}}(n) \ln 3n \quad (9)$$

для любых  $r > 0$  и неубывающей функции  $f(x)$  таких, что

$$q^{1+r} f(q) \|q\alpha\| > 1 \quad (10)$$

для всех  $q$ . Из (5) и (9) немедленно вытекает следующий результат.

**Теорема 4.** *Пусть  $r > 0$  и неубывающая функция  $f(x)$  таковы, что выполняется условие (10). Тогда*

$$r(\alpha, h) < 8h^{\frac{r}{1+r}} f^{\frac{1}{1+r}}(h) \ln 3h. \quad (11)$$

Далее, Используя теорему Туэ–Зигеля–Рота, получаем

**Следствие 1.** *Пусть  $\alpha$  — алгебраическое число. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство*

$$r(\alpha, h) = O(h^\varepsilon).$$

## 2. Нижние оценки

**Лемма 3.** Пусть  $I = [0; \langle -h\alpha \rangle)$ ,  $J_n = [0; 1 - \langle n\alpha \rangle)$ . Тогда

$$r(\alpha, a, n, I) = r(\alpha, a, h, J_n). \quad (12)$$

**Доказательство** получается непосредственным вычислением остатков по формуле (4).

**Лемма 4.** Пусть  $I = [0; \gamma)$ ,  $1 - \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \|Q_i \alpha\|$ ,  $c_i \in \mathbb{Z}$ , причем

- 1)  $0 \leq c_i \leq q_i$ ;
- 2) если  $c_i = q_i$ , то  $c_{i+1} = 0$ ;
- 3)  $c_i \neq q_i$  для бесконечно многих  $i$ .

Тогда

$$\max_{1 \leq n \leq Q_t} r(\alpha, 0, n, I) = \sum_{i=1, i - \text{нечетно}}^t \frac{c_i}{q_i} (1 - \frac{c_i}{q_i}) q_i + E_1(t), \quad (13)$$

$$\min_{1 \leq n \leq Q_t} r(\alpha, 0, n, I) = - \sum_{i=1, i - \text{четно}}^t \frac{c_i}{q_i} (1 - \frac{c_i}{q_i}) q_i - E_2(t), \quad (14)$$

причем

$$-(t+1) \leq E_i(t) \leq \frac{1}{2}(5t+1). \quad (15)$$

**Доказательство** можно найти в [14].

Пусть

$$r^+(\alpha, h) = \sup_{I: |I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, |h(I)|=h} \sup_{a, n} r(\alpha, a, n, I),$$

$$r^-(\alpha, h) = \inf_{I: |I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, |h(I)|=h} \inf_{a, n} r(\alpha, a, n, I),$$

**Теорема 5.** Справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq h \leq Q_t} r^+(\alpha, h) \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1, i - \text{нечетно}}^t q_i - \frac{3}{2}t - 1, \quad (16)$$

$$\min_{1 \leq h \leq Q_t} r^-(\alpha, h) \leq -\frac{1}{4} \sum_{i=1, i - \text{четно}}^t q_i + \frac{3}{2}t + 1. \quad (17)$$

**Доказательство.** Из леммы 3 следует, что

$$r^+(\alpha, h) \geq r(\alpha, a, h, J_n),$$

и

$$r^-(\alpha, h) \leq r(\alpha, a, h, J_n)$$

для всех  $n$ . Далее, из равномерной распределенности последовательности  $\{n\alpha\}$  по модулю 1 вытекает, что для произвольных  $c_1, \dots, c_t$ , удовлетворяющих условиям леммы 4 можно выбрать  $n$ , для которого данные числа  $c_1, \dots, c_t$  будут первыми  $t$  коэффициентами разложения  $1 - \langle n\alpha \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \|Q_i \alpha\|$ . Выбирая  $c_i = \lfloor \frac{q_i}{2} \rfloor$  для всех  $i \leq t$ , и подставляя соответствующие значения  $c_i$  в формулы (13), (14), получим, с учетом (15), требуемый результат.

Из доказанной теоремы немедленно вытекает два следствия.

**Теорема 6.** *Справедливо неравенство*

$$\max_{1 \leq h \leq Q_t} r(\alpha, h) \geq \frac{1}{4} \max \left\{ \sum_{i=1, i \text{ — нечетно}}^t q_i, \sum_{i=1, i \text{ — четно}}^t q_i \right\} - \frac{3}{2}t - 1. \quad (18)$$

**Теорема 7.** *Справедливо неравенство*

$$\max_{1 \leq h \leq Q_t} r(\alpha, h) \geq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^t q_i - \frac{3}{2}t - 1. \quad (19)$$

### 3. Теорема типа Хинчина

**Предложение 1.** Пусть  $\psi(x)$  — положительная возрастающая функция. Тогда

$$\sum_{i=1}^n q_i = O(\psi(n))$$

тогда и только тогда, когда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi(n)}$  сходится.

**Предложение 2.** Для почти всех  $\alpha$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

**Доказательство** предложений 1, 2 можно найти в [5].

Из предложений 1, 2 и теорем 3, 7 немедленно вытекает следующий результат.

**Теорема 8.** Пусть  $\psi(x)$  — положительная возрастающая функция и

$$A(\psi) = \{\alpha \in [0; 1) : r(\alpha, h) = O(\ln h \psi(\ln h))\}.$$

Тогда

$$|A(\psi)| = \begin{cases} 1, & \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi(n)} \text{ сходится,} \\ 0, & \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi(n)} \text{ расходится.} \end{cases} \quad (20)$$

**Следствие 2.** Для почти всех  $\alpha$  и любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$r(\alpha, h) = O(\ln h (\ln \ln h)^{1+\varepsilon}). \quad (21)$$

**Доказательство** следует из (20) с  $\psi(x) = (\ln x)^{1+\varepsilon}$ .

### 4. Теорема типа Ярника

**Предложение 3.** Пусть  $\psi(x)$  — положительная возрастающая функция,

$$W(\psi) = \{\alpha \in [0; 1) : \|q\alpha\| < \psi(q) \text{ для бесконечно многих } q\},$$

$$\lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \psi(n)}{\ln n}.$$

Тогда

$$\dim_H W(\psi) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda+1}, & \lambda > 1, \\ 1, & \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

**Доказательство** можно найти в [2].

**Теорема 9.** Пусть  $f(x)$  — положительная возрастающая функция,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\varepsilon} = 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $c \in [0; 1]$  и

$$B_c^1 = \{\alpha \in [0; 1) : \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{r(\alpha, h)}{h^c f(h) \ln 3h} > 8\}. \quad (23)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\dim_H B_c^1 \leq \frac{2(1-c)}{2-c}. \quad (24)$$

**Доказательство.** Выбирая  $f_1(x) = f^{1-c}(x)$  и  $r = \frac{c}{1-c}$ , находим, что

$$B_c^1 = \{\alpha \in [0; 1) : r(\alpha, h) > 8h^{\frac{r}{1+r}} f_1^{\frac{1}{1+r}}(h) \ln 3h \text{ для бесконечно многих } h\}.$$

Рассмотрим множество

$$S_r^1 = \{\alpha \in [0; 1) : q^{1+r} f_1(q) \|q\alpha\| < 1 \text{ для бесконечно многих } q\}.$$

Тогда из теоремы 4 следует, что  $B_c^1 \subseteq S_r^1$ . Следовательно,  $\dim_H B_c^1 \leq \dim_H S_r^1$ . Вычисляя  $\dim_H S_r^1$  по формуле (21), получаем требуемый результат.

**Теорема 10.** Пусть  $c \in [0; 1]$  и

$$B_c^2 = \{\alpha \in [0; 1) : \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{r(\alpha, h)}{h^c} \geq \frac{1}{32}\}. \quad (25)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\dim_H B_c^2 \geq \frac{2(1-c)}{2-c}. \quad (26)$$

**Доказательство.** Пусть  $r = \frac{c}{1-c}$  и

$$S_r^2 = \{\alpha \in [0; 1) : q^{1+r} \|q\alpha\| < 1 \text{ для бесконечно многих } q\}.$$

Выберем  $\alpha \in S_r^2$ . Тогда, согласно [14], существует бесконечная последовательность  $\{t_k\}$  для которой  $Q_{t_k-1} < 2Q_{t_k}^{\frac{r}{1+r}}$ . Из (19) находим  $\max_{1 \leq h \leq Q_{t_k}} r(\alpha, h) \geq$

$$\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{t_k} (q_i - 12) - 1 \geq \frac{1}{8} (q_{t_k} - 12) - 1 \geq \frac{1}{8} \left( \frac{Q_{t_k}}{Q_{t_k-1}} - 13 \right) - 1. \text{ Отсюда находим, что для}$$

достаточно больших  $k$  выполняется неравенство  $\max_{1 \leq h \leq Q_{t_k}} r(\alpha, h) \geq \frac{1}{32} Q_{t_k}^{\frac{r}{r+1}} = \frac{1}{32} Q_{t_k}^c$ . Следовательно, неравенство  $r(\alpha, h) \geq \frac{1}{32} h^c$  выполняется для бесконечно многих  $h$ . Таким образом,  $S_r^2 \subseteq B_c^2$  и  $\dim_H B_c^2 \geq \dim_H S_r^2$ . Вычисляя  $\dim_H S_r^2$  по формуле (21), получаем требуемый результат.

Теоремы 9 и 10 позволяют высказать следующую гипотезу.

**Гипотеза.** Пусть  $c \in [0; 1]$  и

$$B_c^3 = \{\alpha \in [0; 1) : \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{r(\alpha, h)}{h^c} > 0\},$$

$$B_c^4 = \{\alpha \in [0; 1) : \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{r(\alpha, h)}{h^c} = \infty\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\dim_H B_c^3 = \dim_H B_c^4 = \frac{2(1-c)}{2-c}.$$

## Литература

- [1] Вейль, Г. О равномерном распределении чисел по модулю 1 // Г. Вейль Избранные труды. – М.: Наука. – 1984. – С. 58–93.
- [2] Додсон, М.М. Геометрические и вероятностные идеи в метрической теории диофантовых приближений / М.М. Додсон // Успехи математических наук. – 1993. – Т. 48. – Вып. 5(293). – С. 77–106.
- [3] Журавлев, В.Г. Одномерные разбиения Фибоначчи / В.Г. Журавлев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2007. – Т. 71. – Вып. 2. – С. 287–321.
- [4] Мануйлов, Н.Н. Число попаданий точек последовательности  $\{n\tau_g\}$  в полуинтервал / Н.Н. Мануйлов // Чебышевский сборник. – Тула: Изд-во ТГПУ. – 2004. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 72–81.
- [5] Хинчин, А.Я. Цепные дроби / А.Я. Хинчин. – М.: Физматлит. – 1961. – 112 с.
- [6] Шутов, А.В. О минимальных системах счисления / А.В. Шутов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Из-во Саратовского университета. – 2007. – Вып. 4. – С. 125–138.
- [7] Шутов, А.В. О распределении дробных долей / А.В. Шутов // Чебышевский сборник. – Тула: Изд-во ТГПУ. – 2004. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 112–121.
- [8] Шутов, А.В. О распределении дробных долей II / А.В. Шутов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Из-во Саратовского Университета. – 2005. – Вып. 3. – С. 146–158.
- [9] Шутов, А.В. Системы счисления и множества ограниченного остатка / А.В. Шутов // Сборник трудов конференции "Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел" (в печати).
- [10] Bonanno, C. Diffusion and discrepancy of the sequence  $(n\alpha)$  / C. Bonanno, S. Isola. (В печати).

- [11] Hecke, E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins / E. Hecke // Math.Sem.Hamburg Univ. – 1921. – V. 5. – P. 54–76.
- [12] Kesten, H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 / H. Kesten // Acta Arithmetica. – 1966. – V. 12. – P. 193–212.
- [13] Liardet, P. Regularities of distribution / P. Liardet // Compositio Math. – 1987. – V. 61. – P. 267–293.
- [14] Pinner, C.G. On Sums of Fractional Parts  $\{n\alpha + \gamma\}$  / C.G. Pinner // J.Number Theory. – 1997. – V. 65. – P. 48–73.
- [15] Ostrowski A. Math. Miszellen XVI//Notiz zur Theorie der Diophantischen Approximationen und zur Theorie der linearen Diophantischen Approximationen / A. Ostrowski // Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. – 1939. – V. 39. – P. 34–46.
- [16] Shutov A.V. New estimates in the Hecke-Kesten problem / A.V. Shutov // Anal. Probab. Methods Number Theory. Edited by E.Manstavičius et al. Vilnius: TEV. – 2007.

Поступила в редакцию 17/IX/2007;  
в окончательном варианте — 17/IX/2007.

## OPTIMUM ESTIMATES IN THE PROBLEM OF THE DISTRIBUTION OF FRACTIONAL PARTS OF THE SEQUENCE $n\alpha$

© 2007 A.V. Shutov<sup>3</sup>

In the paper a remainder term in the problem of the distribution of fractional parts of the sequence  $n\alpha$  with irrational  $\alpha$  is considered. In the case of bounded remainder interval we prove new estimates of this remainder term. The estimates are exact with respect to the order.

Paper received 17/IX/2007.

Paper accepted 17/IX/2007.

---

<sup>3</sup>Shutov Anton Vladimirovich ([shutov@vgpu.vladimir.ru](mailto:shutov@vgpu.vladimir.ru)), Dept. of Informatics, Vladimir State Pedagogical University, Vladimir, 600024, Russia.