УДК 512.7

МНОГООБРАЗИЕ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ТОЖДЕСТВОМ $x(yz)t \equiv 0$

© 2007 О.И. Череватенко[1]

В работе изучается многообразие алгебр Лейбница $\mathbf{C}$, определяемых тождеством $x(yz)t \equiv 0$ над полем характеристики 0. Описаны некоторые свойства многообразия $\mathbf{C}$. В качестве следствия мы доказываем, что если выполняется условие $\mathbf{B} \not\subset \mathbf{V} \subset \mathbf{C}$, то многообразие $\mathbf{V}$ нильпотентно, где $\mathbf{B}$ — многообразие алгебр Лейбница, определяемых тождеством $x(yz) \equiv 0$.

Алгебра Лейбница над полем F — это неассоциативная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz),$$

которое превращает правое умножение на элемент алгебры в дифференцирование этой алгебры. Понятно, что любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Характеристика основного поля предполагается нулевой. Все неопределяемые понятия можно найти в монографии [1] или в обзоре [2].

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие линейных алгебр. В случае нулевой характеристики основного поля вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах полилинейных элементов $P_n(\mathbf{V})$ степени n, являющихся модулем симметрической группы, $n = 1, 2, \ldots$. Характер $P_n(\mathbf{V})$ раскладывается в целочисленную комбинацию $\chi_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ неприводимых характеров χ_λ, соответствующих разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ числа n. Поэтому исследование структуры $P_n(\mathbf{V})$ как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Сам S_n-модуль $P_n(\mathbf{V})$ можно представить в виде прямой суммы:

$$P_n(\mathbf{V}) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} P_\lambda(\mathbf{V}),$$

где сумма неприводимых изоморфных подмодулей, соответствующим разбиению λ, обозначена $P_\lambda(\mathbf{V})$. Заметим, что в общем случае некоторые слагаемые данной суммы могут быть нулевыми, либо неприводимыми.

[1]Череватенко Ольга Ивановна (chai@pisem.net), кафедра алгебры и геометрии Ульяновского государственного педагогического университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, пл. им. 100-летия со д. рожд. Ленина, 4.

Договоримся опускать скобки в случае левонормированной расстановки скобок: $(((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\dots x_{i_n}) = x_{i_1}\dots x_{i_n}$.

Будем использовать специальный символ (черту или волну) над образующими вместо выписывания кососимметрической суммы. Например, определяющее алгебру Лейбница тождество можно переписать так $x\overline{yz} \equiv x(yz)$.

Пусть $\mathbf{B}$ — многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством $x(yz) \equiv 0$. Как видно из работы [3], по своим свойствам это многообразие можно считать аналогом метабелева многообразия алгебр Ли $\mathbf{A^2}$.

Приведем результат, описывающий необходимые нам свойства многообразия $\mathbf{B}$, полученный в статье [3, proposition 3.2. P. 38]. Для удобства читателей приведем его на русском языке и переформулируем в удобной для нас форме.

Теорема. *a) Для любого n $P_n(\mathbf{B})$ как S_n–модуль раскладывается в прямую сумму неприводимых ненулевых подмодулей:*

$$P_n(\mathbf{B}) = V_1 \oplus V_2,$$

где V_1 — неприводимый подмодуль, соответствующий разбиению (n), а V_2 — неприводимый подмодуль, соответствующий разбиению $(n-1,1)$.

b) Полная линеаризация следующих элементов:

$$b_1 = x_1^n,$$

$$b_2 = x_1x_2x_1^{n-2} - x_2x_1x_1^{n-2}, \ \ n \geqslant 2$$

порождает неприводимые ненулевые подмодули V_1 и V_2 полилилейной части $P_n(\mathbf{B})$ соответственно.

c) Для любого n характер модуля $P_n(\mathbf{B})$ раскладывается в следующую целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_1(\mathbf{B}) = \chi_{(1)}, \quad \chi_n(\mathbf{B}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}, \ n \geqslant 2.$$

Аналогом центрально-метабелева многообразия $[\mathbf{A^2}, \mathbf{E}]$ алгебр Ли, которое было исследовано в работе [4], вероятно является многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством $x(yz)t \equiv 0$. Обозначим его $\mathbf{C}$. Изучение его свойств и является целью данной статьи.

Учитывая основное тождество Лейбница и тождество, определяющее многообразие $\mathbf{C}$, получим, что если $x_1x_2\dots x_n$ — левонормированное полилинейное слово, то переменные x_i, $i = 2,\dots n-1$, равноправны, т.е.

$$x_1x_{p(2)}x_{p(3)}\dots x_{p(n-1)}x_n = x_1x_2x_3\dots x_n,$$

где p — перестановка символов $2, 3, \dots, n-1$. Следовательно

Замечание 1. *Любой элемент полилинейной части многообразия $\mathbf{C}$ может быть приведен к сумме элементов вида*

$$x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\dots x_{i_{n-1}}x_{i_n}, \ \ i_2 < \dots < i_{n-1}.$$

Понятно, что число таких элементов равно $n(n-1)$.

Замечание 2. *В многообразии* $\mathbf{C}$ *полилинейные элементы* f_k, *построенные по таблицам Юнга, число клеток которых вне первой строки превосходит двух, обращаются в нуль.*

Доказательство прямо вытекает из замечания 1 и строения элемента f_k.

Таким образом, число клеток вне первой строки в таблицах Юнга для многообразия $\mathbf{C}$ не может превышать двух.

Рассмотрим алгебру A с базисом z_1; z_2; e_k, $k=2,3\dots$; f_k, $k=2,3\dots$; g_k, $k=2,3\dots$; h_k, $k=3,4\dots$. Зададим в алгебре A таблицу умножения:

$$z_1z_1 = e_2, \quad z_2z_1 = f_2,$$
$$e_kz_1 = e_{k+1}, \quad f_kz_1 = f_{k+1},$$
$$g_kz_1 = h_kz_1 = h_{k+1},$$
$$z_1z_2 = g_2, e_kz_2 = g_{k+1},$$
$$z_1 f_m = -z_1h_m = (-1)^{m+1}(g_{m+1} - h_{m+1}),$$
$$e_k f_m = -e_kh_m = (-1)^{m+1}(g_{m+k} - h_{m+k}),$$

произведение остальных элементов равно нулю.

Сформулируем основной результат статьи, касающийся свойств многообразия $\mathbf{C}$.

Теорема 1. *a) Алгебра A порождает многообразие* $\mathbf{C}$.

b) Для любого n характер модуля $P_n(\mathbf{C})$ раскладывается в следующую целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_1(\mathbf{C}) = \chi_{(1)}; \quad \chi_2(\mathbf{C}) = \chi_{(2)} + \chi_{(1,1)};$$
$$\chi_3(\mathbf{C}) = \chi_{(3)} + 2\chi_{(2,1)} + \chi_{(1,1,1)};$$

$$\chi_n(\mathbf{C}) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1,1)} + \chi_{(n-2,2)}, \quad n \geqslant 4$$

При этом $\dim P_n(\mathbf{C}) = n(n-1)$.

Доказательство. Пусть характер полилинейной части многообразия $\mathbf{C}$ имеет вид $\chi_n(\mathbf{C}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda\chi_\lambda$. Обозначим через $\mathbf{D}$ многообразие, порожденное алгеброй A. Непосредственной проверкой убеждаемся, что алгебра A является алгеброй Лейбница, в которой выполнено тождество $x(yz)t \equiv 0$. Поэтому, $\mathbf{D}$ является подмногообразием многообразия $\mathbf{C}$ и разложение характера его полилинейной части имеет вид $\chi_n(\mathbf{D}) = \sum_{\lambda\vdash n} m'_\lambda\chi_\lambda$, причем $m'_\lambda \leqslant m_\lambda$ для любого разбиения λ числа n.

Учитывая замечание 2, в разложении на неприводимые подмодули остается рассмотреть только те случаи, которые соответствуют разбиениям (n), $(n-1,1)$, $(n-2,1,1)$, $(n-2,2)$. Таким образом получаем, что

$$\chi_n(\mathbf{C}) = m_{(n)}\chi_{(n)} + m_{(n-1,1)}\chi_{(n-1,1)} + m_{(n-2,1,1)}\chi_{(n-2,1,1)} + m_{(n-2,2)}\chi_{(n-2,2)}.$$

Рассмотрим следующие элементы относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{D}$ степени n:

$$g_1^{(n)} = x_1^n,$$

$$g_{21}^{(n)} = x_1x_2x_1^{n-2} - x_2x_1x_1^{n-2},$$

$$g_{22}^{(n)} = x_1^{n-2}x_1x_2 - x_1^{n-2}x_2x_1,$$

$$g_3^{(n)} = \bar{x}_1\bar{x}_2x_1^{n-3}\bar{x}_3,$$

$$g_4^{(n)} = (\bar{x}_2\bar{x}_1)x_1^{n-4}(\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_1).$$

Покажем, что выписанные элементы не являются тождествами в алгебре A.

Для элемента $g_1^{(n)}$ возьмем подстановку $x_1 = z_1$. Получим ненулевой элемент алгебры $A : z_1^n = e_n$. Элемент $g_1^{(n)}$ является ненулевым элементом многообразия $\mathbf{D}$, и его линеаризация порождает неприводимый ненулевой подмодуль, соответствующий разбиению (n). Таким образом, $m'_{(n)} \geqslant 1$.

Докажем, что $m'_{(n-1,1)} \geqslant 2$. Для этого, используя результат работы [5, лемма 2], достаточно показать, что элементы $g_{21}^{(n)}$ и $g_{22}^{(n)}$ линейно независимы.

Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha g_{21}^{(n)} + \beta g_{22}^{(n)} = 0$. Возьмем подстановку $x_1 = z_1$, $x_2 = z_1z_1$, и, учитывая тождество $x(yz)t = 0$ и тождество Лейбница, преобразуем линейную комбинацию и получим: $-\alpha z_1^{n+1} = 0$. Последнее возможно лишь в том случае, когда коэффициент α равен нулю. Таким образом, линейная комбинация примет вид: $\beta g_{22}^{(n)} = 0$. Теперь произведем следующую подстановку: $x_1 = z_1, x_2 = z_2$. Тогда получим, что и второй коэффициент β линейной комбинации равен нулю. Следовательно, элементы $g_{21}^{(n)}$ и $g_{22}^{(n)}$ являются линейно независимыми. Таким образом, $m'_{(n-1,1)} \geqslant 2$.

Для $g_3^{(n)}$ возьмем подстановку $x_1 = z_1$, $x_2 = z_1^2$, $x_3 = z_2$. Получим ненулевой элемент алгебры $A : h_{n+1} - g_{n+1}$. Элемент $g_3^{(n)}$ является ненулевым элементом многообразия $\mathbf{D}$ и он порождает неприводимый ненулевой модуль, соответствующий разбиению $(n-2,1,1)$. Таким образом, $m'_{(n-2,1,1)} \geqslant 1$.

Для $g_4^{(n)}$ возьмем подстановку $x_1 = z_1$, $x_2 = z_1^2 + z_2$. Получим ненулевой элемент алгебры A: $h_{n+1} - g_{n+1}$. Элемент $g_4^{(n)}$ является ненулевым элементом многообразия $\mathbf{D}$ и он порождает неприводимый ненулевой модуль, соответствующий разбиению $(n-2,2)$. Таким образом, $m'_{(n-2,2)} \geqslant 1$.

По формуле крюков (см. [1. С. 113]), получаем нижнюю оценку для размерности полилинейной части многообразия $\mathbf{D}$: $\dim P_n(\mathbf{D}) \geqslant 1 + 2(n - 1) + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + \dfrac{n(n-3)}{2} = n(n-1)$. Учитывая замечание 1, получаем $\dim P_n(\mathbf{C}) = \dim P_n(\mathbf{D})$. Откуда следует, что алгебра A порождает многообразие $\mathbf{C}$. Таким образом, кратности в разложении характера модуля $P_n(\mathbf{C})$ будут равны единице для разложений (n), $(n-2,1,1)$, $(n-2,2)$ и двум для разложения$(n-1,1)$ и $\dim P_n(\mathbf{C}) = n(n-1)$. Теорема доказана.

Интересно отметить, что структура метабелева многообразия, рассмотренного в работе [3], очень схожа со структурой многообразия **C**. Одинаково разложение характеров в целочисленную комбинацию неприводимых характеров, совпадают и последовательности коразмерностей. Однако, эти два многообразия различны.

Из знаменитого результата Е.И. Зельманова о нильпотентности алгебры Ли с условием энгелевости, следует, что в случае алгебр Ли условие $\mathbf{A}^2 \not\subset \mathbf{V}$ влечет нильпотентность многообразия **V**. Аналогичным оказался критерий нильпотентности подмногообразия многообразия **C**, только вместо метабелева многообразия $\mathbf{A^2}$ используется многообразие алгебр Лейбница **B**.

Теорема 2. *Пусть* **V** *многообразие алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики, для которого выполнено условие* $\mathbf{B} \not\subset \mathbf{V} \subset \mathbf{C}$. *Тогда многообразие* **V** *является нильпотентным.*

Доказательство.

Рассмотрим тождество $f \equiv 0$ многообразия **V**, которое не выполняется в многообразии **B**. Пусть данное тождество имеет вид:

$$f \equiv \alpha_1 f_1^{(n)} + \alpha_{21} f_{21}^{(n)} + \alpha_{22} f_{22}^{(n)} + \alpha_3 f_3^{(n)} + \alpha_4 f_4^{(n)},$$

где $f_i^{(n)}$ — полная линеаризация элементов $g_i^{(n)}$, $i = 1, 3, 4$, и $f_{21}^{(n)}$, $f_{22}^{(n)}$ — полная линеаризация элементов $g_{21}^{(n)}$, $g_{22}^{(n)}$. Из теории представлений симметрических групп следует, что тогда в многообразии **V** выполнены следующие тождества: $\alpha_1 f_1^{(n)} \equiv 0$; $\alpha_{21} f_{21}^{(n)} + \alpha_{22} f_{22}^{(n)} \equiv 0$; $\alpha_3 f_3^{(n)} \equiv 0$; $\alpha_4 f_4^{(n)} \equiv 0$.

Так как тождество f не выполняется в многообразии **B**, то из работы [3] получаем, что либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_{21} \neq 0$.

Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда $x_1^n \equiv 0$ тождество в многообразии **V**. После частичной линеаризации получим:

$$x_1^{n-1} x_2 + (n-2) x_1 x_2 x_1^{n-2} + x_2 x_1^{n-1} \equiv 0.$$

Вместо x_2 подставим произведение $x_2 x_1$. Учитывая тождество $x(yz)t \equiv 0$, получим $x_1^{n-1}(x_2 x_1) + x_2 x_1^n \equiv 0$. Преобразуем получившееся тождество: $x_1^{n-1} x_2 x_1 - x_1^n x_2 + x_2 x_1^n \equiv 0$. Легко увидеть, что $x_1^n x_2 \equiv 0$, получим $x_1^{n-1} x_2 x_1 + x_2 x_1^n \equiv 0$. Теперь положим $x_2 = z_1 z_2$. Тогда наше тождество с учетом $x(yz)t \equiv 0$ примет вид $z_1 z_2 x_1^n \equiv 0$. Понятно, что и $z_1 z_2 x_1^n z_{n+3} \equiv 0$. После линеаризации получим: $n! z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n+3} \equiv 0$. Следовательно, многообразие **V**, в котором выполнено тождество $x_1^n \equiv 0$, является нильпотентным.

Теперь предположим, что $\alpha_{21} \neq 0$, тогда $g_{21}^{(n)} + \alpha g_{22}^n$ есть тождество в нашем многообразии **V**. Проведем подстановку. Положим $x_2 = xx$, $x_1 = x$. Тогда, учитывая тождество $x(yz)t \equiv 0$ и тождество Лейбница, имеем: $-x^{n+1} \equiv 0$. Последнее тождество есть ни что иное, как тождество g_1 степени $n + 1$. Таким образом, если $g_{21}^{(n)} + \alpha g_{22}^n$ тождество в многообразии **V**, то это многообразие нильпотентно.

Теорема доказана.

В заключении автор приносит благодарность С.П. Мищенко за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

[1] Бахтурин, Ю.А. Тождества в алгебрах Ли / Ю.А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985.

[2] Мищенко, С.П. Рост многообразий алгебр Ли / С.П. Мищенко // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – № 6(276). – С. 25–45.

[3] Drensky, V. Variety of metabelian Leibniz algebras / V. Drensky, G.M. Piacentini Cattaneo // Jornal of Algebra and Its Applications. – 2002. – V. 1. – № 1. – P. 31–50.

[4] Мищенко, С.П. Многообразия центрально-метабелевых алгебр Ли над полем характеристики нуль / С.П. Мищенко // Математические заметки. – 1981. – Т. 30. – № 5. – С. 649–657.

[5] Зайцев, М.В. О кодлине многообразий линейных алгебр / М.В. Зайцев, С.П. Мищенко Математические заметки. – 2006. – Т. 79. – № 4. – С. 553–559.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

THE VARIETY OF LEIBNIZ ALGEBRAS DEFINED BY THE IDENTITY $x(yz)t \equiv 0$

© 2007 O.I. Cherevatenko[2]

In this paper the variety of Leibniz algebras **C** defined by the identity $x(yz)t \equiv 0$ over a field of characteristic 0 is studied. A description of some properties of the variety **C** is given. As a result we prove that if the condition $\mathbf{B} \not\subset \mathbf{V} \subset \mathbf{C}$ holds, the variety **V** is nilpotent, where **B** is the variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(yz) \equiv 0$.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Cherevatenko Olga Ivanovna (`chai@pisem.net`), Dept. of Algebra and Geometry, Ul'yanovsk State Pedagogical University, Ul'yanovsk, 432700, Russia.