УДК 512.7

РЕГУЛЯРНЫЕ N-ОРБИТЫ В НИЛЬРАДИКАЛЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

© 2007 А.Н. Панов, В.В. Севостьянова[1]

В работе изучается присоединенное действие треугольной группы на нильрадикале параболической подалгебры. Поставлены общие гипотезы о строении поля инвариантов и структуре орбит максимальной размерности. Гипотезы проверены для параболических подалгебр специального вида.

Рассмотрим полную матричную группу $\mathrm{GL}(n,K)$, определенную над произвольным полем K. Пусть B (соотв. N) ее борелевская (соотв. максимальная унипотентная) подгруппа, состоящая из треугольных матриц с ненулевыми (соотв. единичными) элементами по диагонали. Фиксируем параболическую подгруппу P, содержащую B. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n,K)$, соответствующие P, B, N. Разложим $\mathfrak{p}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{m}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочнодиагональной подалгебры $\mathfrak{r}$ с размерами блоков $(n_1,\dots,n_s)$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединенного действия группы P (и, следовательно, ее подгрупп B и N). Это действие продолжается до представления в алгебре $\mathcal{A}=K[\mathfrak{m}]$ и поле $\mathcal{F}=K(\mathfrak{m})$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ содержит открытую (по Зарисскому) P-орбиту [1] (по крайней мере над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), которая называется орбитой Ричардсона. Поэтому алгебра инвариантов $\mathcal{A}^P$ состоит из скаляров. Значительно хуже изучены инварианты для присоединенного действия N в $\mathfrak{m}$. В случае $P=B$ алгебра инвариантов $\mathcal{A}^N$ является алгеброй многочленов $K[x_{12},x_{23},\dots,x_{n-1,n}]$. Случай, когда $\mathfrak{r}$ является суммой двух блоков вытекает из работы [2]. Заранее не известно будет ли алгебра инвариантов $\mathcal{A}^N$ конечно порождена.

В настоящей работе предлагается ряд гипотез о строении поля инвариантов $\mathcal{F}^N=\mathrm{Fract}\,\mathcal{A}^N$ и описании регулярных N-орбит (т.е. N-орбит наибольшей размерности). Справедливость Гипотез 1 и 2 проверены для параболических подалгебр специального вида (см. теоремы 1–2). В теореме 3 для тех же параболических подалгебр получено описание поля $\mathcal{F}^B$. Предложения 1 и 2 дают частичное решение Гипотезы 3. В последнем предложении 3 построена система образующих в алгебре $\mathcal{A}^N$ для параболической подалгебры с размерами блоков $(2,4,2)$.

[1]Панов Александр Николаевич, Севостьянова Виктория Владимировна (berlua@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Перейдем к изложению содержания работы. Каждый положительный корень γ в $\mathfrak{gl}(n,K)$ имеет вид $\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ [3]. Отождествим γ с парой (i,j) и множество положительных корней Δ^+ с множеством пар (i,j), $i<j$. Система положительных корней $\Delta^+{}_{\mathfrak{r}}$ редуктивной подалгебры $\mathfrak{r}$ является подсистемой в Δ^+.

Рассмотрим стандартный базис $\{E_{ij}: \ i<j\}$ в $\mathfrak{n}$. Будем использовать также обозначение E_γ для базисного элемента E_{ij}, если $\gamma=(i,j)$.

Определим отношение в Δ^+, для которого $\gamma' \succ \gamma$, если $\gamma'-\gamma \in \Delta^+{}_{\mathfrak{r}}$. Обозначим через M множество тех $\gamma \in \Delta^+$, таких, что $E_\gamma \in \mathfrak{m}$. Отождествим $\mathcal{A}$ с алгеброй многочленов от переменных x_{ij}, $(i,j) \in M$.

Определение 1. Подмножество S в M будем называть базой, если элементы S попарно не сравнимы и для любого $\gamma \in M \setminus S$ существует $\xi \in S$, такой, что $\gamma \succ \xi$.

Отметим, что M имеет единственную базу S, которая строится следующим образом. Образуем множество S_1 минимальных (в смысле $\succ$) элементов в M. По определению, $S_1 \subset S$. Образуем множество M_1, которое получается из M удалением S_1 и всех

$$\{\gamma \in M: \ \exists\ \xi \in S_1, \gamma \succ \xi\}.$$

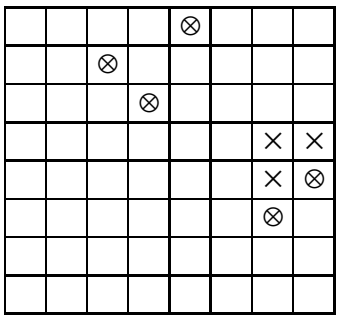
Подмножество минимальных элементов S_2 в M_1 также содержится в S и т.д. Продолжая процесс дальше, мы получаем базу S.

Определение 2. Упорядоченный набор положительных корней $\{\gamma_1,\dots,\gamma_s\}$ будем называть цепочкой, если $\gamma_1=(a_1,a_2)$, $\gamma_2=(a_2,a_3)$, $\gamma_3=(a_3,a_4)$ и т.д.

Определение 3. Будем говорить, что два корня $\xi, \xi' \in S$ образуют допустимую пару $q=(\xi,\xi')$, если существует $\alpha_q \in \Delta^+{}_{\mathfrak{r}}$, такой, что набор корней $\left\{\xi, \alpha_q, \xi'\right\}$ является цепочкой. Заметим, что корень α_q находится по q однозначно.

Образуем множество $Q := Q(\mathfrak{p})$, состоящее из допустимых пар корней из S. По каждой допустимой паре $q=(\xi,\xi')$ построим положительный корень $\phi_q = \alpha_q + \xi'$. Рассмотрим подмножество $\Phi = \left\{\phi_q: \ q \in Q\right\}$.

Для наглядности построим по параболической подалгебре диаграмму, представляющую собой $n\times n$-матрицу, в которой корни из S отмечены символом $\otimes$, а корни из Φ — символом $\times$. Остальные места в диаграмме не заполняются. Ниже приведена диаграмма для параболической подалгебры типа $(2,1,3,2)$ (типом параболической подалгебры мы называем размеры ее диагональных блоков)



Диагр. (2,1,3,2)

Рассмотрим формальную матрицу $\mathbf{X}$, в которой на местах $(i,j) \in M$ стоят переменные x_{ij}, а остальные элементы равны нулю. Для любого положительного корня $\gamma = (a,b)$ обозначим через S_γ множество тех $\xi = (i,j) \in S$, что $i > a$ и $j < b$. Пусть $S_\gamma = \{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\}$. Обозначим через M_γ минор M_I^J матрицы $\mathbf{X}$ с упорядоченными системами строк $I = \operatorname{ord}\{a,i_1,\dots,i_k\}$ и столбцов $J = \operatorname{ord}\{j_1,\dots,j_k,b\}$.

По каждой допустимой паре $q = (\xi,\xi')$ построим многочлен

$$L_q = \sum M_{\xi+\alpha_1} M_{\alpha_2+\xi'}, \tag{1}$$

где суммирование происходит по всем $\alpha_1,\alpha_2 \in \Delta^+{}_{\mathfrak{r}} \cup \{0\}$, таким, что $\alpha_1+\alpha_2 = -\alpha_q$.

Гипотеза 1. Поле инвариантов $\mathcal{F}^N$ является полем рациональных функций от многочленов M_ξ, где $\xi \in S$, и L_q, где $q \in Q$. Следующая гипотеза является следствием предыдущей.

Гипотеза 2. Максимальная размерность N-орбиты в $\mathfrak{m}$ равна $\dim\mathfrak{m} - |S| - |Q|$.

Натянем подпространство на базисные векторы E_ξ, $\xi \in S$, и E_ϕ, $\phi \in \Phi$, обозначим его $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}$.

Гипотеза 3. Любая регулярная N-орбита (т.е. орбита максимальной размерности) имеет ненулевое пересечение с $\mathcal{Y}$.

Замечание. В гипотезе 3 множество Φ можно заменить на произвольное подмножество, которое формируется аналогично Φ с оговоркой, что выбор одного из двух векторов $\xi+\alpha_q$ и $\alpha_q+\xi'$ осуществляется произвольным образом.

Теорема 1. Для произвольной параболической подалгебры система многочленов

$$\{M_\xi,\ \xi \in S;\ L_q,\ q \in Q\}$$

содержится в $\mathcal{A}^N$ и алгебраически независима над K.

Доказательство. Представление P в $\mathcal{A} = K[\mathfrak{m}]$ определяется по формуле

$$T_g f(x) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} x),$$

где $g \in P$ и $f \in \mathcal{A}$. Действие T_g на многочлены из $\mathcal{A}$ однозначно определяется по действию на $x_{i,j}$, $(i,j) \in M$. Элементы x_{ij} заполняют матрицу $T_g\mathbf{X} = g^{-1}\mathbf{X}g$, где $\mathbf{X}$ — определенная выше формальная матрица.

Многочлен из $\mathcal{A}$ является N-инвариантом, если он инвариантен относительно действия всех однопараметрических подгрупп $g_k(t) = 1 + tE_{k,k+1}$, $1 \leqslant k < n$. Действие $g_i(t)$ на матрицу $\mathbf{X}$ сводится к композиции двух элементарных преобразований: прибавлению к k-ой строке $k+1$-й строки, умноженной на $-t$, и прибавлению к $k+1$-у столбцу k-го столбца, умноженного на t.

Инвариантность M_ξ, $\xi = (a,b)$, вытекает из следующих двух замечаний:

1) номера строк и столбцов минора M_ξ заполняют отрезки натуральных чисел: $I = [a, \max I]$, $J = [\min J, b]$;

2) все элементы матрицы $\mathbf{X}$, находящиеся на местах $a \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j < \min J$ и местах $\max I < i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant b$, равны нулю.

Покажем, что L_q принадлежит $\mathcal{A}^N$. Для этого достаточно доказать инвариантность относительно действия однопараметрической подгруппы $g_k(t)$, соответствующей простому корню $\beta = (k, k+1)$, $1 \leqslant k < n$.

Пусть $q = (\xi, \xi')$, где $\xi = (a,b)$, $\xi' = (a',b')$. Из определения допустимой пары $a < b < a' < b'$ и $\alpha_q = (b,a') \in \Delta^+{}_{\mathfrak{r}}$. Если $k < b$ или $k \geqslant a'$, то действие $g_k(t)$ оставляет инвариантными миноры из правой части формулы (1).

Если $b \leqslant k < k+1 \leqslant a'$, то $\alpha_q = \gamma_1 + \beta + \gamma_2$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta^+{}_{\mathfrak{r}} \cup \{0\}$. Имеют место соотношения

$$\begin{cases} T_{g_k(t)} M_{\xi+\gamma_1+\beta} = M_{\xi+\gamma_1+\beta} + tM_{\xi+\gamma_1}, \\ T_{g_k(t)} M_{\beta+\gamma_2+\xi'} = M_{\beta+\gamma_2+\xi'} - tM_{\gamma_2+\xi'}. \end{cases} \tag{2}$$

Остальные миноры, входящие в (1) инвариантны относительно действия $g_k(t)$. Применяя (2) к (1), получаем

$$\left(T_{g_k(t)} L_q\right) - L_q = M_{\xi+\gamma_1}\left(M_{\beta+\gamma_2+\xi'} - tM_{\gamma_2+\xi'}\right) +$$
$$\left(M_{\xi+\gamma_1+\beta} + tM_{\xi+\gamma_1}\right) M_{\gamma_2+\xi'} - M_{\xi+\gamma_1} M_{\beta+\gamma_2+\xi'} - M_{\xi+\gamma_1+\beta} M_{\gamma_2+\xi'} = 0.$$

Для доказательства второй части утверждения теоремы введем на множестве корней $S \cup \Phi$ отношение порядка, для которого

1) $\xi < \phi$ для любых $\xi \in S$ и $\phi \in \Phi$;

2) для остальных пар корней из $S \cup \Phi$ отношение $<$ означает отношение лексикографического порядка.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi\colon f \mapsto f|_{\mathcal{Y}}$ ограничения $\mathcal{A}$ на $\mathcal{Y}$. Образом $\mathcal{A}$ является $K[\mathcal{Y}]$ — алгебра многочленов от x_ξ, $\xi \in S$, и x_ϕ, $\phi \in \Phi$. Образы M_ξ, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$, имеют вид

$$\begin{aligned} \pi\left(M_\xi\right) &= \pm x_\xi \Pi_\xi, \\ \pi\left(L_q\right) &= \pm x_\phi \Pi'_\phi, \end{aligned} \tag{3}$$

где Π_ξ (сооотв. Π'_ϕ) — произведения переменных в $K[\mathcal{Y}]$, которые меньше ξ (соотв. ϕ) в смысле введенного выше порядка $<$. Точнее, Π_ξ — произведение переменных $x_{\xi'}$, где $\xi' \in S_\xi$, а Π'_ϕ для $q = (\xi, \xi')$ есть произведение переменных x_γ, где $\gamma \in \{\xi\} \cup S_\xi \cup S_{\xi'}$.

Система образов πM_ξ, $\xi \in S$, и πL_q, $q \in Q$, алгебраически независима над K. Отсюда и система M_ξ, $\xi \in S$, и L_q ,$q \in Q$, также алгебраически независима над K. Теорема доказана.

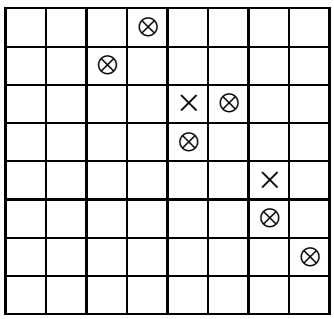
Рассмотрим открытое подмножество $\mathcal{U}_0 = \{x \in \mathfrak{m} : \ M_\xi \neq 0, \forall \xi \in S\}$ в $\mathfrak{m}$.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра типа $(n_1, \ldots, n_s)$. Предположим, что $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_s$. Утверждается, что пересечение N-орбиты любого элемента $x \in \mathcal{U}_0$ с $\mathcal{Y}$ не пусто и состоит из единственного элемента.

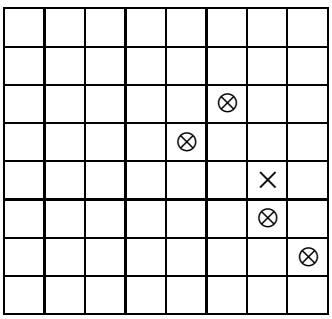
Доказательство. При заданных ограничениях на $\mathfrak{r}$ число элементов в S равно $n_2 + \ldots + n_s$. Множество S состоит из корней $\xi_{ij} = (m_i - j + 1, m_i + j)$, где $m_i = n_1 + \ldots + n_i$ и $1 \leqslant i \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant n_{i+1}$.

1) Покажем, что для любого $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{U}_0$ существует $g \in N$ такой, что $\mathrm{Ad}_g A \in \mathcal{Y}$. Доказательство проведем индукцией по числу блоков на главной диагонали. Предположим, что утверждение верно для параболической подалгебры $\mathfrak{p}_1$ с редуктивной частью типа $(n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_s)$ в $\mathfrak{gl}(n - n_1, K)$. Покажем для параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ типа $(n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_s)$.

   Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n - n_1, K)$ как подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(n, K)$ с нулями в первых n_1 строках и столбцах. Параболической подалгебре $\mathfrak{p}_1$ соответствуют системы S_1 и Φ_1, вложенные в S и Φ соответственно. Ниже приведена диаграмма для $\mathfrak{p}$ типа $(2,2,2,1,1)$ и ее подалгебры $\mathfrak{p}_1$ типа $(2,2,1,1)$.



Диагр. (2,2,2,1,1)



Диагр. (2,2,1,1)

   В силу предположения индукции можно считать, что в матрице A элементы a_{ij} равны нулю для всех $n_1 < i$, $j \leqslant n$ и $(i, j) \notin S_1 \cap \Phi_1$.

   Рассмотрим матрицу $\mathrm{Ad}_{g_1} A$, где

$$g_1 = \exp\left(1 + t_1 E_{n_1+1, n_1+2} + \ldots + t_{n_2-1} E_{n_1+1, n_1+n_2} +\right.$$

$$+t'_1E_{n_1-1,n_1}+\ldots+t'_{n_1-1}E_{1,n_1}\Big).$$

По условию $a_{n_1,n_1+1}\neq 0$. Существуют $t_1,\ldots,t'_1,\ldots$, такие, что в матрице $\mathrm{Ad}_{g_1}A$ равны нулю элементы на местах $(1,n_1),\ldots,(n_1-1,n_1)$ и $(n_1,n_1+2),\ldots(n_1,n_1+n_2)$.

Заметим, что в матрице $\mathrm{Ad}_{g_1}A$ в отличии от A элементы на местах (i,n_1+n_2+1), где $n_1+1\leqslant i\leqslant n_1+n_2+1$, могут быть отличны от нуля. Эти места заполнены символом $\times$ в диаграмме (см. место (3,5) на диаграмме $(2,2,2,1,1)$).

Аналогично, можно подобрать $g_2,\ldots,g_{n_2}$ такие, что в матрице

$$A'=\mathrm{Ad}_{g_{n_2}}\ldots\mathrm{Ad}_{g_2}\mathrm{Ad}_{g_1}A$$

все элементы, кроме входящих в $S\cap\Phi$ или в блок

$$\{(i,j):\ \ 1\leqslant i\leqslant n_1,\ \ n_1+n_2+1\leqslant j\leqslant n\},$$

равны нулю. Отметим на диаграмме элементы, входящие в указанный блок, символом $*$:

			$\otimes$	$*$	$*$	$*$	$*$
		$\otimes$		$*$	$*$	$*$	$*$
				$\times$	$\otimes$		
				$\otimes$			
						$\times$	
						$\otimes$	
							$\otimes$

Диагр. (2,2,2,1,1)

Заметим, что элементы матрицы A', отмеченные символом $\otimes$, — не равны нулю.

Осталось, действуя подходящим $h\in N$, занулить в матрице A' элементы, отмеченные символом $*$. Начнем с последнего N-го столбца. В диаграмме в N-м столбце встречается символ $\otimes$, предположим на месте (i,t).

Существуют $s_1,\ldots,s_{n_1}$ такие, что в матрице $\mathrm{Ad}_{h_1}A'$, где

$$h_1=\exp\left(1+s_1E_{1,i}+\ldots+s_{n_1}E_{n_1,i}\right),$$

на местах $(1,n),\ldots,(n_1,n)$ стоят нули.

Продолжая процесс, можно найти $h_2,\ldots,h_{n-n_1}$ такие, что

$$\mathrm{Ad}_{h_{n-n_1}}\ldots\mathrm{Ad}_{h_2}A'\in\mathcal{Y}.$$

2) Единственность следует из формул (3).
Теорема доказана.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{p}$ параболическая полалгебра типа (n_1, n_2, n_3) с произвольными размерами блоков n_1, n_2, n_3. Тогда в N-орбите любого элемента $x \in \mathcal{U}_0$ существует единственный элемент из $\mathcal{Y}$.

Доказательство проводится аналогично предложению 1.

Пусть $\mathcal{S}$ множество знаменателей, порожденное минорами M_ξ, $\xi \in S$. Образуем локализацию $\mathcal{A}^N_{\mathcal{S}}$ алгебры инвариантов $\mathcal{A}^N$ по $\mathcal{S}$. Поскольку миноры M_ξ являются N-инвариантами, то $\mathcal{A}^N_{\mathcal{S}} = (\mathcal{A}_S)^N$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{r}$ как в предложении 1 или 2.

1) Кольцо $\mathcal{A}^N_S$ является кольцом многочленов от $M_\xi^{\pm 1}$, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$.

2) Поле инвариантов $\mathcal{F}^N$ является полем рациональных функций от M_ξ, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм ограничения $\pi\colon f \mapsto f|_{\mathcal{Y}}$ алгебры $\mathcal{A}^N$ на $K[\mathcal{Y}]$. При условиях на $\mathfrak{r}$ образ πM_ξ равен произведению

$$\pm x_\xi x_{\xi_1} \dots x_{\xi_s},$$

где каждый ξ_{i+1} есть наибольший в S корень меньший ξ_i (в смысле лексикографического порядка). Продолжим π до гомоморфизма

$$\pi_S : \mathcal{A}^N_{\mathcal{S}} \to K[\mathcal{Y}]_S,$$

где $K[\mathcal{Y}]_S$ — локализация $K[\mathcal{Y}]$ по x_ξ, $\xi \in S$. Покажем, что π_S — изоморфизм.

Если $f \in \operatorname{Ker} \pi_S$, то $f(\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}) = 0$. Так как, согласно предложениям 1 и 2, $\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}$ содержит открытое по Зарисскому подмножество, то $f = 0$. Следовательно, π_S является вложением $\mathcal{A}^N_{\mathcal{S}}$ в $K[\mathcal{Y}]_S$. Далее, перепишем формулы (3) в виде

$$\begin{aligned} \pi\left(M_\xi\right) &= \pm x_\xi \pi\left(M_{\xi_1}\right), \\ \pi\left(L_q\right) &= \pm x_\phi \pi\left(M_\xi\right) \pi\left(M_{\xi_1'}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $q = (\xi, \xi')$ и ξ_1 (соотв. ξ_1') есть наибольший корень из S меньший ξ (соотв. ξ') в смысле лексикографического порядка. Отсюда

$$\begin{aligned} \pi_S\left(M_\xi M_{\xi_1}^{-1}\right) &= \pm x_\xi, \\ \pi_S\left(L_q M_\xi^{-1} M_{\xi_1'}^{-1}\right) &= \pm x_\phi. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что образ π_S совпадает с $K[\mathcal{Y}]_S$. Окончательно, π_S изоморфизм.

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему весов α_q, $q \in Q$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{r}$ как в предложении 1 или 2. Поле $\mathcal{F}^B$ является полем рациональных функций от $\operatorname{corank}(\mathfrak{A})$ переменных.

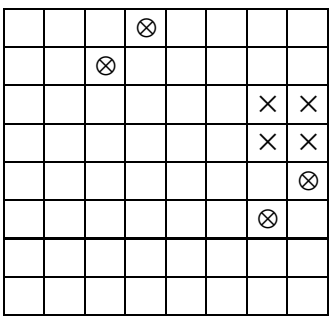
Доказательство. Рассмотрим подгруппу Картана H, состоящую из диагональных матриц, в $\mathrm{GL}(n,K)$. Поле инвариантов $\mathcal{F}^B$ является подполем в $\mathcal{F}^N$ и совпадает с $\left(\mathcal{F}^N\right)^H$. Система корней $S \cup \Phi$ порождает решетку весов поля $\mathcal{F}^N$. Поле $\mathcal{F}^B$ является чисто трансцендентным расширением, и его степень трансцендентности равна $\mathrm{corank}(S \cup \Phi)$. Система S линейно независима и

$$\mathrm{rank}(S \cup \Phi) = \mathrm{rank}(S \cup \mathfrak{A}) = \mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(\mathfrak{A}).$$

Отсюда $\mathrm{corank}(S \cup \Phi) = \mathrm{corank}(\mathfrak{A})$.

Теорема доказана.

Рассмотрим параболическую подалгебру $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{gl}(8,K)$ с размерами блоков $(2,4,2)$. Наша цель — дать полное описание алгебры инвариантов $\mathcal{A}^N$. База S в этом случае состоит из корней $\alpha_1 = (2,3)$, $\alpha_2 = (1,4)$, $\beta_1 = (6,7)$, $\beta_2 = (5,8)$. Любая пара $\left(\alpha_i, \beta_j\right)$ является допустимой парой. Диаграмма соответствующая этой параболической подалгебре имеет вид:



Диагр. (2,4,2)

Обозначим через M_1, M_2, N_1, N_2 миноры вида M_ξ, $\xi \in S$, соответствующие корням α_1, α_2, β_1, β_2. Обозначим через L_{ij} многочлен, соответствующие допустимой паре $\left(\alpha_i, \beta_j\right)$. Согласно теореме 2 поле инвариантов $\mathcal{F}^N$ является полем рациональных функций от M_1, M_2, N_1, N_2, L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}. Точный вид образующих следующий:

$$M_1 = x_{23}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{vmatrix}, \quad N_1 = x_{67}, \quad N_2 = \begin{vmatrix} x_{57} & x_{58} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix},$$

$$L_{11} = x_{23}x_{37} + x_{24}x_{47} + x_{25}x_{57} + x_{26}x_{67},$$

$$L_{12} = \begin{vmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{vmatrix} x_{47} + \begin{vmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \end{vmatrix} x_{57} + \begin{vmatrix} x_{13} & x_{16} \\ x_{23} & x_{26} \end{vmatrix} x_{67},$$

$$L_{21} = x_{23} \begin{vmatrix} x_{37} & x_{38} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix} + x_{24} \begin{vmatrix} x_{47} & x_{48} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix} + x_{25} \begin{vmatrix} x_{57} & x_{58} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix},$$

$$L_{22} = \begin{vmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{47} & x_{48} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{57} & x_{58} \\ x_{67} & x_{68} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через D многочлен, равный минору M_{12}^{78} от матрицы $\mathbf{X}^2$. Нетрудно видеть, что D является N-инвариантом. Имеет место тождество

$$L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22} = M_1N_1D. \tag{6}$$

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{B}_0$, порожденную многочленами M_i, N_i, L_{ij}, $i, j \in \in \{1, 2\}$, и подалгебру $\mathcal{B}_1$, порожденную $\mathcal{B}_0$ и D. Поскольку все образующие являются N-инвариантами, то $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}^N$.

Предложение 3. Утверждается, что
1. $\mathcal{B}_0 \neq \mathcal{B}_1$; 2. $\mathcal{A}^N = \mathcal{B}_1$.

Доказательство.

1. Предположим, что $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$. Тогда $H \in \mathcal{B}_0$. Выражение D через указанные выше образующие алгебры $\mathcal{B}_0$ подставим в (6). Получим тождество, которое противоречит алгебраической независимости системы M_i, N_i, L_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$ (теорема 1). Получаем противоречие.

2. Рассмотрим множество знаменателей, порожденное M_1, M_2 и N_1. Из теоремы 2, локализация $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^N$ алгебры N-инвариантов по $\mathcal{S}$ совпадает с алгеброй многочленов Лорана

$$K\left[M_1^{\pm1}, M_2, N_1^{\pm1}, N_2, L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\right].$$

Если $f \in \mathcal{A}^N$, то существуют натуральные k_1, k_2, k_3, такие, что

$$M_1^{k_1}M_2^{k_2}N_1^{k_3}f \in \mathcal{B}_0.$$

Утверждение $f \in \mathcal{B}_1$ будет доказано, если показать, что для любого M из набора $\{M_1, M_2, N_1\}$ выполнено следующее свойство сокращения: если $F \in \mathcal{A}$ и $MF \in \mathcal{B}_1$, то $F \in \mathcal{B}_1$.

Мы рассмотрим $M = M_1$. Случаи $M = N_1$ и $M = N_1$ аналогичны. Итак, пусть $F \in \mathcal{A}^N$ и $M_1F \in \mathcal{B}_1$. Обозначим $M_1F = h$. Многочлен h аннулируется на $\operatorname{Ann} M_1$. По произвольному набору чисел a_i, b_i, c_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$, построим матрицу

$$Y := Y_{a,b,c} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают

$$M_1(Y) = 0, \quad M_2(Y) = -a_1a_2, \quad N_1(Y) = b_1, \quad N_2(Y) = b_1b_2,$$
$$L_{11}(Y) = a_2c_{21}, \ L_{12}(Y) = -a_2b_1c_{22},$$

$$L_{21}(Y) = -a_1a_2c_{21},\ \ L_{22}(Y) = a_1a_2b_1c_{22},$$
$$D(Y) = a_1a_2\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = a_1a_2(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}).$$

Обозначим через V пространство K^9 и через $K[V]$ алгебру многочленов $K[u_1, u_2, v_1, v_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, z]$. Поскольку $h \in \mathcal{B}_1$, то существует многочлен $p(u_1, u_2, v_1, v_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, z) \in K[V]$ такой, что

$$h = p(M_1, M_2, N_1, N_2, L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, D). \tag{7}$$

Так как h равен нулю на $\mathrm{Ann}M_1$, то $h(Y) = 0$. Подставляя Y в (7), получаем, что

$$p(0, -a_1a_2, b_1, -b_1b_2, a_2c_{21}, -a_2b_1c_{22}, -a_1a_2c_{21},$$
$$a_1a_2b_1c_{22}, a_1a_2(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})) = 0$$

для любых наборов $a_i, b_j, c_{ij} \in K$. Существуют $p_1, p_2 \in K[V]$ такие, что $p = u_1p_1 + (w_{12}w_{21} - w_{11}w_{22})\,p_2$. Подставляем это выражение в (7), используем (6), сокращаем на M_1. Получаем $F \in \mathcal{B}_1$.

Предложение доказано.

Статья поддержана грантами РФФИ 05-01-00313 и 06-01-00037

Литература

[1] Richardson, R.W. Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups / R.W. Richardson // Bull. London Math.Soc. – 1974. – V. 6. – P. 21–24.

[2] Brion, M. Representations exceptionnelles des groups semi-simple / M. Brion // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. – 1985. – V.18. – P. 345–387.

[3] Гото, М. Полупростые алгебры Ли / М. Гото, Ф. Гроссханс. – М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007; в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

REGULAR *N*-ORBIT IN THE NILRADICAL OF A PARABOLIC SUBALGEBRA

© 2007 A.N. Panov, V.V. Sevost'yanova[2]

In the paper the adjoint action of the triangular group in the nilradical of a parabolic subalgebra is studied. We set up general conjectures on the construction of field of invariants and the structure of orbits of maximal dimension. The conjectures is proved for parabolic subalgebras of a special type.

Paper received 17/*IX*/2007. Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Panov Alexandr Nickolaevich, Sevost'yanova Vicktoriya Vladimirivna (berlua@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.