УДК 513.6

ТЕОРИЯ ПУНКТИРОВАННЫХ ТОЛЕРАНТНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ ГОМОЛОГИЙ

© 2007 С.И. Небалуев, И.А. Кляева[1]

В статье излагается теория гомологий толерантных пространств, пригодная для построения спектральных последовательностей толерантных расслоений.

Будем рассматривать категорию $\mathbb{T}_0$, объектами которой являются толерантные пространства (X, τ), состоящие из базисных множеств X и определенных на них отношений толерантности $\tau \subset X \times X$ со свойствами рефлексивности и симметричности. Морфизмами в этой категории являются отображения, сохраняющие толерантность. В этой категории имеются прямые (декартовы) произведения с покомпонентной толерантностью.

Понятие толерантного пространства было введено Зиманом в [1] и является наиболее общей математической моделью схожести. Толерантные пространства естественно появляются, например, при приближенных вычислениях и измерениях.

Толерантным отрезком длины m $(m \in \mathbb{N})$ назовем толерантное пространство (I_m, ι_m), в котором $I_m = \left\{ \frac{k}{m} \middle| \ k = \overline{0,m} \right\}$ — множество точек деления единичного отрезка на m частей, а толерантность ι_m определяется условием

$$\left(\forall \ k, l = \overline{0,m}\right) \qquad \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k - l| \leqslant 1.$$

В гомотопической теории толерантных пространств, толерантные отрезки (I_m, ι_m), $m \in \mathbb{N}$, играют роль единичного отрезка.

Для $n \in \mathbb{N}$ и $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$ толерантное пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i}, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \iota_{m_i} \right)$ будем называть толерантным кубом (Т кубом) размера $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$. Т кубы размера $\overline{m} = \overline{1} = (1, \dots, 1)$ будем называть простыми.

Определение 1. Толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$, где $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, назовем n-мерным толерантным сингулярным кубом (ТС кубом) пространства (X, τ). Если $m_1 = \ldots = m_n = 1$, то ТС куб $u : (I_{\overline{1}}, \iota_{\overline{1}}) \to (X, \tau)$ назовем простым. 0-мерным ТС кубом пространства (X, τ) будем называть любую точку в X и считать такие ТС-кубы простыми.

[1]Небалуев Сергей Иванович, Кляева Инна Александровна, кафедра компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственного университета, 410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

Для $n \geqslant 0$ обозначим через $Q_n(X)$ абелеву группу, свободно порожденную над $\mathbb{Z}$ всеми n-мерными ТС кубами пространства (X,τ), и положим $Q_n(X) = 0$ для $n < 0$. Элементы этой группы $Q_n(X)$ будем называть n-мерными толерантными кубическими сингулярными цепями (ТКС цепями) в (X,τ).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим граничный гомоморфизм $\partial_n : Q_n(X) \to \to Q_{n-1}(X)$, задаваемый на свободных образующих $u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right) : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to X$ формулой

$$\partial_n u = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[d_j^0(u) - d_j^1(u)\right],$$

где

$$d_j^\varepsilon(u) = u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_{j-1}}{m_{j-1}},\varepsilon,\frac{k_{j+1}}{m_{j+1}},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right), \quad \varepsilon = 0,1.$$

Для $n \leqslant 0$ полагаем $\partial_n = 0$.

Обычным способом доказывается, что $(\forall\ n \in \mathbb{Z})\quad \partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$, что позволяет говорить о цепном комплексе $\{Q_n(X),\partial_n\}$ ТКС цепей пространства (X,τ). Любое толерантное отображение $f : (X,\tau) \to (Y,\vartheta)$ индуцирует цепное отображение $\{Q_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)\}$, которое на образующих задается формулой

$$Q_n(f)(u) = f \circ u.$$

Определение 2. ТС куб u размерности $n > 0$ назовем вырожденным по j-му аргументу $(j = \overline{1,n})$, если

$$\left(\forall\ i = \overline{1,n}\right) \quad \left(\forall\ k_i = \overline{0,m_i}\right)$$

$$u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_j}{m_j},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right) = u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,0,\dots,\frac{k_n}{m_n}\right).$$

Обозначим через $D_n(X)$ подгруппу в $Q_n(X)$, свободно порожденную всеми вырожденными кубами. Так как $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$, то имеем цепной фактор-комплекс $\{C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X),\partial_n\}$ нормализованных ТКС цепей. При этом толерантные отображения $f : (X,\tau) \to (Y,\vartheta)$ индуцируют цепные отображения $\{C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)\}$, действующие на свободные образующие $u + D_n(X)$, $u \notin D_n(X)$ по формуле

$$C_n(f)(u + D_n(X)) = Q_n(f)(u) + D_n(X) = f \circ u + D_n(X).$$

В результате получается функтор $C = \{C_n\}$, который в композиции с гомологическим функтором позволяет определить функтор толерантных кубических сингулярных гомологий (ТКС гомологий), сопоставляющий каждому пространству (X,τ) группу

$$H^Q(X) = \bigoplus_{n\geqslant 0} H_n^Q(X) \overset{df}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} H_n(C_n(X)).$$

Достаточно стандартно доказывается следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть* $\{C_\alpha | \alpha \in A\}$ *— совокупность компонент линейной связности толерантного пространства* (X, τ)*, тогда эти компоненты можно рассматривать как свободный базис 0-мерной группы* $H_0^Q(X)$ *толерантных кубических сингулярных гомологий, то есть*

$$H_0^Q(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z} \cdot C_\alpha.$$

Предложение 2. *Если* (X, τ) *— толерантно стягиваемое пространство, то его группы ТКС гомологий имеют вид*

$$H_n^Q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Так как толерантный куб $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$ является толерантно стягиваемым (см. [2, предложения 1.2.3 и 1.2.4]), то как следствие получаем

$$H_q^Q(I_{\overline{m}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ 0, & q > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Повторим теперь построение ТКС гомологий, ограничившись простыми кубами. Обозначим через $Q_n^S(X)$ абелеву группу, свободно порожденную простыми ТС кубами

$$u(k_1, k_2, \ldots, k_n) : \left(\overset{n}{\times} I_1, \overset{n}{\times} \iota_1\right) \to (X, \tau), \quad k_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, n},$$

для $n > 0$ и точками пространства (X, τ) для $n = 0$. Граничные гомоморфизмы $\partial_n : Q_n^S(X) \to Q_{n-1}^S(X)$, группы вырожденных простых сингулярных кубов $D_n^S(X) \subset Q_n^S(X)$, $n > 0$, определяются как и раньше и удовлетворяют свойству $\partial_n(D_n^S(X)) \subset D_{n-1}^S(X)$. Это позволяет определить цепной комплекс $\{C_n^S(X) = Q_n^S(X)/D_n^S(X), \partial_n\}$ простых ТКС цепей и группы простых ТКС гомологий пространства (X, τ):

$$H_n^S(X) = H_n(C^S(X)), \quad n \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Два ковариантных функтора* C *и* C^S *из категории толерантных пространств* $\mathbb{T}_0$ *в категорию цепных комплексов являются естественно цепно гомотопно эквивалентными.*

Доказательство.

Выберем среди объектов категории $\mathbb{T}_0$ множество моделей $\mathcal{M}$, состоящее из Т кубов

$$\left\{ M_{\overline{m}} = M_{(m_1, \ldots, m_n)} = \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i} \right) \middle| \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (\forall \ i = \overline{1, n}) \ m_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Функтор C на категории $\mathbb{T}_0$ с моделями $\mathcal{M}$ является по построению неотрицательным, а согласно формуле (1), ацикличным в положительных размерностях. Но функтор C не является свободным (см. [3]), что не позволяет непосредственно использовать метод ацикличесих моделей. Однако, функтор C обладает рядом свойств, позволяющих использовать для доказательства идеологию метода ациклических моделей. В соответствии с этой идеологией рассмотрим тождественные отображения $v_{\overline{m}} = v_{(m_1,\ldots,m_n)} = \mathbf{1}_{I_{\overline{m}}}$, $n \geqslant 0$. Имеем $v_{\overline{m}} \in Q_n(M_{\overline{m}})$ и $v_{\overline{m}} \notin D_n(M_{\overline{m}})$. Зафиксируем классы $\overline{v}_{\overline{m}} = v_{\overline{m}} + D_n(M_{\overline{m}}) \in C_n(M_{\overline{m}})$. Каждый элемент свободного базиса $\{\overline{u} = u + D_n(X) | u \in Q_n(X) \setminus D_n(X)\}$ группы $C_n(X)$ можно представить в следующем виде:

$$\overline{u} = u \circ \mathbf{1}_{M_{\overline{m}}} + D_n(X) = C_n(u)\Big(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}} + D_n(X)\Big) = C_n(u)\,(\overline{v}_{\overline{m}})\,.$$

Следовательно, в $C_n(X)$ имеется свободный базис

$$\left\{ C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}}) \,\middle|\, \overline{m} \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}, u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}}, X), u \notin D_n(X) \right\}. \tag{2}$$

При этом

$$(\forall\ u \in D_n(X)) \quad C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}}) = 0. \tag{3}$$

Вложения $\{i_n : Q^S_n(X) \subset Q_n(X)\}$ индуцируют цепные, естественные по (X, τ) вложения

$$\varphi = \{\varphi_n : C^S_n(X) \to C_n(X)\}_{n\geqslant 0}, \quad \varphi_n(u + D^S_n(X)) = u + D_n(X). \tag{4}$$

Построим еще одно естественное цепное отображение

$$\psi = \{\psi_n : C_n(X) \to C^S_n(X)\}_{n\geqslant 0}, \quad \psi_n(u + D_n(X)) = j_n(u) + D^S_n(X), \tag{5}$$

которое будет индуцировано определенным ниже гомоморфизмом $j = \{j_n : Q_n(X) \to Q^S_n(X)\}$. Поскольку всякие гомоморфизмы определяются на образующих, то рассмотрим произвольный ТС куб $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ размерности $n > 0$. Для $i = \overline{1,n}$, $k_i = \overline{0, m_i - 1}$ определим ТС кубы $u_{(k_1,\ldots,k_n)} \in Q^S_n(X)$:

$$(\forall\ \varepsilon_i = \overline{0,1}, i = \overline{1,n}) \quad u_{(k_1,\ldots,k_n)}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = u\left(\frac{k_1 + \varepsilon_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n + \varepsilon_n}{m_n}\right), \tag{6}$$

а через них определим гомоморфизмы j_n:

$$j_n(u) = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}, \quad n > 0, \quad j_0(u) = u. \tag{7}$$

Очевидно, что из определения j_n следует

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad \psi_n | C^S_n(X) = \mathbf{1}_{C^S_n(X)}. \tag{8}$$

Цепное свойство гомоморфизма ψ следует из цепного свойства для j:

$$\partial_n(j_n(u)) = j_{n-1}(\partial_n(u)), \tag{9}$$

которое следует из того, что его левая часть равна

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{(k_1,\ldots,\widehat{k_i},\ldots,k_n)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,\widehat{m_i-1},\ldots,m_n-1)} \left[\sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0} - \sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1} \right],$$

и после применения соотношений (см. (6))

$$(\forall\ k_i = \overline{0, m_i - 1}) \quad u_{(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1} = u_{(k_1,\ldots,k_i+1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0},$$

легко приводится к правой части в формуле (9).

Естественность по (X,τ) отображения ψ означает, что

$$(\forall\ f\in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y),\ \ n\geqslant 0)\quad C_n^S(f)\circ\psi_n=\psi_n\circ C_n(f), \tag{10}$$

и доказывается прямым сравнением правой и левой части (10) с использованием (7) и очевидного соотношения $f\circ u_{(k_1,\dots,k_n)}=(f\circ u)_{(k_1,\dots,k_n)}$.

Осталось показать, что два естественных цепных отображения φ и ψ взаимно обратны с точностью до естественной цепной гомотопии. А так как из (8) следует, что $\psi\circ\varphi=\mathbf{1}_{C^S(X)}$, то остается построить естественную цепную гомотопию $\varphi\circ\psi\simeq\mathbf{1}_{C(X)}$. То есть для каждого пространства (X,τ) надо построить семейство гомоморфизмов $\mathcal{D}^X=\{\mathcal{D}_n^X:C_n(X)\to C_{n+1}(X)\}_{n\geqslant 0}$ таких, что

$$(\forall\ n\geqslant 1)\quad \partial_{n+1}\circ\mathcal{D}_n^X=\chi_n^X-\mathbf{1}_{C_n(X)}-\mathcal{D}_{n-1}^X\circ\partial_n, \tag{11}$$

где $\chi_n^X=(\varphi\circ\psi)_n=\varphi_n\circ\psi_n$. При этом должно выполняться свойство естественности:

$$(\forall\ f\in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y),\ \ n\geqslant 0)\quad C_{n+1}(f)\circ\mathcal{D}_n^X=\mathcal{D}_n^Y\circ C_n(f). \tag{12}$$

Гомоморфизм $\mathcal{D}_n^X$ следует задать на элементах свободного базиса (2) подходящим способом. Применив (12) к $u\in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}},X)$, получим

$$\begin{gathered}(\forall\ n\geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N})\ (\forall\ u\in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}},X))\\ C_{n+1}(u)\circ\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}=\mathcal{D}_n^X\circ C_n(u),\end{gathered} \tag{13}$$

из которого следует

$$\begin{gathered}(\forall\ n\geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N})\ (\forall\ u\in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}},X)\setminus D_n(X))\\ \mathcal{D}_n^X\left(C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}})\right)=C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Из (13) и (3) получаем еще одно условие:

$$(\forall\ n\geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N})\ (\forall\ u\in D_n(X))\quad C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right)=0. \tag{15}$$

Лемма 1. *Если гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}:C_n(M_{\overline{m}})\to C_{n+1}(M_{\overline{m}})$ определены так, что выполняется свойство (15), а гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$ определяются формулой (14), тогда выполняется свойство естественности (12).*

Выясним условия выполнения свойства (11). Для $X=M_{\overline{m}}$ и применительно к элементу $\overline{v}_{\overline{m}}\in C_n(M_{\overline{m}})$, это условие дает

$$(\forall\ \overline{m}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N},\ \ n>0)\quad \partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right)=\chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})-\overline{v}_{\overline{m}}-\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{v}_{\overline{m}}). \tag{16}$$

Лемма 2. *Если гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}$ удовлетворяют свойствам (16) и (15), то гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$ определяемые формулой (14), удовлетворяют условию (11).*

Итак, нам надо построить цепи $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\in C_{n+1}(M_{\overline{m}})$, удовлетворяющие условиям (15) и (16). Пусть $u:I_{\overline{m}}\to X$ — произвольный n-мерный ТС куб. Пусть $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,s}$, $k_i=\overline{0,m_i-1}$. Определим новый ТС куб

$$u_{(k_1,\dots,k_s)}:\overset{s}{\times}I_1\times I_{m_{s+1}}\times\ldots\times I_{m_n}\to X,$$

$$\begin{gathered}(\forall\ \varepsilon_i = \overline{0,1},\ \ i = \overline{1,s})\quad (\forall\ k_j = \overline{0,m_j}\ \ j = \overline{s+1,n}))\\ u_{(k_1,\ldots,k_s)}\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s,\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) =\\ = u\left(\frac{k_1+\varepsilon_1}{m_1},\ldots,\frac{k_s+\varepsilon_s}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right).\end{gathered} \tag{17}$$

Для каждого $s = \overline{1,n}$ определим ТС кубы

$$\Delta^{(n,s)} : \left(\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m_i}\right)\times\left(\mathop{\times}_{i=s}^{n} I_{m_i}\right)\to\mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i} = M_{\overline{m}},$$

$$\begin{gathered}(\forall\ k_i = \overline{0,m_i}\ \ i = \overline{1,n})\ \ (\forall\ k'_s = \overline{0,m_s})\quad \Delta^{(n,s)}\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_s}{m_s},\frac{k'_s}{m_s},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) =\\ = v_{\overline{m}}\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{\max\{k_s,k'_s\}}{m_s},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) = \left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{\max\{k_s,k'_s\}}{m_s},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right).\end{gathered} \tag{18}$$

Определим теперь цепь $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) \in C_{n+1}(M_{\overline{m}})$ формулой

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}\,(v_{\overline{m}} + D_n(M_{\overline{m}})) =\\ = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left(\Delta^{(n,s)}_{(k_1,\ldots,k_s)} + D_{n+1}(M_{\overline{m}})\right)\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Тогда

$$\begin{gathered}C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right) =\\ = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left((u\circ\Delta^{(n,s)})_{(k_1,\ldots,k_s)} + D_{n+1}(X)\right)\right).\end{gathered} \tag{20}$$

Из формулы (20) следует, что для $u \in D_n(X)$ имеет место свойство (15).

Для проверки формулы (16) распишем ее левую часть

$$\begin{gathered}\partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right) =\\ = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left\{\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^j\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_s)} -\right.\right.\\ \left. - \left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_s)}\right] + (-1)^s\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_s=0}\right)_{(k_1,\ldots,\widehat{k_s})} -\right.\\ \left. - \left(\Delta^{(n,s)}|_{k_s=m_s}\right)_{(k_1,\ldots,\widehat{k_s})}\right] + (-1)^{s+1}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k'_s=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)} -\right.\\ \left. - \left(\Delta^{(n,s)}|_{k'_s=m_s}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right] + \sum_{j=s+1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)} -\right.\\ \left.\left. - \left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right] + D_n(M_{\overline{m}})\right\}.\end{gathered}$$

Опуская вырожденные ТС кубы и производя множественные сокращения, получим

$$\partial_{n+1}(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})) = -\mathbf{1}_{C_n(M_{\overline{m}})}(\overline{v}_{\overline{m}}) + \chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})+$$

$$+\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}(-1)^{s+j-1}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{1\leqslant s<j\leqslant n}(-1)^{s+j}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+D_n(M_{\overline{m}}). \qquad (21)$$

Пользуясь формулой (14), найдем выражение для $\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{v}_{\overline{m}})$:

$$\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{v}_{\overline{m}})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0}+D_{n-1}(M_{\overline{m}})\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=m_j}+D_{n-1}(M_{\overline{m}})\right).$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем их окончательный результат

$$\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{v}_{\overline{m}})=\sum_{1\leqslant s<j\leqslant n}(-1)^{j+s-1}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}(-1)^{j+s}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\Delta^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+D_n(M_{\overline{m}}). \qquad (22)$$

Формулы (21) и (22) вместе дают (16),что завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 получаем важное следствие.

Теорема 2. *Определенные выше гомологические функторы H^Q и H^S естественно изоморфны.*

Следующим шагом является сравнение ТКС гомологий с гомологиями, определяемыми через симплициальные комплексы и через сингулярные симплексы (см. [2]). Из теоремы 2 и [2, теоремы 2.6.1] следует, что сравнивать гомологии $H^S(X)$ надо будет с толерантными сингулярными гомологиями $H^\Lambda(X)$, и с естественно изоморфными им толерантными гомологиями

$H(X)$, которые являются соответственно упорядоченными и ориентированными гомологиями одного и того же симплициального комплекса $\overset{\circ}{S}(X)$, чьими вершинами являются точки из X, а симплексами — конечные наборы попарно толерантных вершин.

Теорема 3. *Для каждого толерантного пространства* (X,τ) *имеются изоморфизмы групп гомологий*

$$(\forall\ n \geqslant 0)\quad H_n^S(X) \cong H_n^\Lambda(X) \cong H_n(X),$$

естественные по (X,τ).

Доказательство.

Простой толерантный куб $\left(\overset{n}{\times} I_1, \overset{n}{\times} \iota_1\right)$ обозначим для краткости I_1^n, $n \geqslant 1$. Все точки куба $I_1^n = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) | \varepsilon_i = \overline{0,1},\ i = \overline{1,n})\}$ толерантны друг другу. Пусть (Λ^n,τ_n) — толерантный n-мерный симплекс, все точки которого $\Lambda^n = \{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ толерантны между собой. Будем представлять точки симплекса Λ^n как точки $(n+1)$-мерного куба $I_1^{n+1} = \{(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_n) | \delta_i = \overline{0,1}\ i = \overline{0,n}\}$, а именно

$$P_0 = (1,0,\ldots,0),\quad P_1 = (0,1,\ldots,0),\quad \ldots,\quad P_n = (0,0,\ldots,1).$$

Построим сюръективное толерантное отображение $p_n : I^n \to \Lambda^n$, которое в координатах $p_n(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = P(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ определяется формулами Серра

$$\begin{aligned}
&\delta_0 = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_1,\\
&\ldots\\
&\delta_k = \varepsilon_n \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{k+1} \cdot (1-\varepsilon_k),\\
&\ldots\\
&\delta_n = 1 - \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

В работе [2] символом $\Lambda_n(X)$ обозначается группа толерантных сингулярных цепей пространства (X,τ), свободно порожденная толерантными сингулярными симплексами, то есть толерантными отображениями $\sigma : (\Lambda^n,\tau_n) \to (X,\tau)$. Определим гомоморфизмы $\overline{\varphi}_n : \Lambda_n(X) \to C_n^S(X)$ на образующих

$$\overline{\varphi}_n(\sigma) = (-1)^n \sigma \circ p_n + D_n^S(X),\quad n \geqslant 1,$$
$$\overline{\varphi}_0(\sigma) = \sigma.$$

Показывается, что гомоморфизмы $\overline{\varphi} = \{\overline{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ обладают свойством цепного отображения:

$$\partial_n(\overline{\varphi}_n(\sigma)) = \overline{\varphi}_{n-1}(\partial'_n(\sigma)),$$

где $\sigma \in \Lambda_n(X)$, $n \geqslant 0$, ∂' — граничный гомоморфизм в $\{\Lambda_n(X)\}_{n\geqslant 0} = \Lambda(X)$. Цепное отображение $\overline{\varphi} = \{\overline{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ удовлетворяет так же свойству естественности

$$(\forall\ f \in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y))\quad C_n^S(f) \circ \overline{\varphi}_n = \overline{\varphi}_n \circ \Lambda_n(f).$$

Обозначим через $\mu = \{\mu_n : \overset{\circ}{C}_n(X) \to \Lambda_n(X)\}$ стандартное естественное цепное отображение (см. [4, 3.2.2]) из группы ориентированных в группу упорядоченных цепей, и рассмотрим композицию $\varphi = \overline{\varphi} \circ \mu$.

Следующая наша цель — построение цепного отображения $\psi = \{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ цепно гомотопически обратного к φ. Гомоморфизмы $\psi_n : C^S_n(X) \to \overset{\circ}{C}_n(X)$ мы должны определить на свободных образующих группы $C^S_n(X)$, то есть на классах $u+D_n(X)$, где $u : I^n \to X$ — невырожденные ТС кубы. В этих построениях мы будем рассматривать конечные линейные комбинации $\sum \alpha_j A_j$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $A_j \subset I^n_1$. Отображения $u : I^n \to X$ мы будем распространять на эти линейные комбинации обычным способом: $u\left(\sum \alpha_j A_j\right) = \sum \alpha_j u|A_j$. В частности, если определим $\partial_n I^n_1$ как формальную линейную комбинацию

$$\partial_n I^n_1 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[I^{j-1}_1 \times \{0\} \times I^{n-j} - I^{j-1}_1 \times \{1\} \times I^{n-j}\right],$$

то можно записать $\partial_n u = u\left(\partial_n I^n_1\right)$. Эти же соглашения примем и при работе с толерантными симплексами. Толерантный сингулярный симплекс $\sigma : \Lambda^n \to X$ однозначно определяется упорядоченным набором $\langle\sigma(P_0), \dots, \sigma(P_n)\rangle$ попарно толерантных точек из (X, τ). Здесь скобки $\langle\dots\rangle$ означают упорядоченность набора. Толерантные симплексы (Λ^n, τ_n) будем рассматривать как упорядоченные наборы точек в (I^n_1, ι^n_1)

$$\Lambda^n = \left\langle P_0, \dots, P_n \,\middle|\, P_k = \left(\varepsilon^{(k)}_1, \dots, \varepsilon^{(k)}_n\right) \in I^n_1,\ \ k = \overline{0, n}\right\rangle.$$

В таком случае ТС куб $u : (I^n_1, \iota^n_1) \to (X, \tau)$ определяет ТС симплекс

$$\sigma = u|\Lambda^n = u|\langle P_0, \dots, P_n\rangle : \Lambda^n \to X,$$

как отображение, сохраняющее порядок. А если определить

$$\partial'_n \Lambda^n = \partial'_n(\langle P_0, \dots, P_n\rangle) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\langle P_0, \dots, \widehat{P}_j, \dots, P_n\right\rangle,$$

то можно записать

$$\partial'_n(\sigma) = \partial'_n(u|\Lambda^n) = u|\partial'_n\Lambda^n = \sigma(\partial'_n\Lambda^n).$$

Определим вспомогательное отображение $\mathcal{D}_n$, которое геометрически иллюстрируется разбиением призмы на тетраэдры.

$$\mathcal{D}_n(\Lambda^n) = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathcal{D}^{(j)}_n(\Lambda^n),$$

где

$$\mathcal{D}^{(j)}_n(\Lambda^n) = \mathcal{D}^{(j)}_n(\langle P_0, \dots, P_n\rangle) = \langle(P_0, 1), \dots, (P_j, 1), (P_j, 0), \dots, (P_n, 0)\rangle.$$

Лемма 3. *Пусть* $L = \sum \alpha_i \Lambda^n_i$ *— целочисленная линейная комбинация* n*-мерных симплексов* $\Lambda^n_i \subset I^n_1$*, тогда*

$$\left(\partial'_{n+1} \circ \mathcal{D}_n\right)(L) = \left(\mathcal{D}_{n-1} \circ \partial'_n\right)(L) + (-1)^{n+1}\left[L \times \{0\} - L \times \{1\}\right].$$

Определим индуктивно еще одно вспомогательное отображение R_n, геометрический смысл которого состоит в том, что куб I_1^n сначала разлагается на призмы, с учетом разложения куба $I_1^{n-1} \subset I_1^n$, а затем эти призмы разлагаются на тетраэдры с помощью $\mathcal{D}_{n-1}$. Полагаем по определению

$$R_0(I_1^0) = I_1^0, \quad R_1(I_1^1) = R_1(I_1^0 \times I_1) = \mathcal{D}_0(R_0(I_1^0)) = \mathcal{D}_0(I_1^0) = -\langle 1, 0\rangle,$$
$$R_n(I_1^n) = R_n(I_1^{n-1} \times I_1) = \mathcal{D}_{n-1}(R_{n-1}(I_1^{n-1})), \quad n > 1.$$

Лемма 4.
$$(\forall\ n \geqslant 1) \quad \partial_n'(R_n(I_1^n)) = R_{n-1}(\partial_n I_1^n).$$

Определим теперь гомоморфизмы $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_n : C_n^S(X) \to \Lambda_n(X)\}_{n\geqslant 0}$ на свободных образующих

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad \overline{\psi}_n\left(u + D_n^S(X)\right) = u|R_n(I_1^n).$$

Обозначим через $\nu = \{\nu_n : \Lambda_n(X) \to \overset{\circ}{C}_n(X)\}$ стандартное естественное цепное отображение (см. [4, 3.2.3]) из группы упорядоченных в группу ориентированных цепей, и рассмотрим композицию $\psi = \nu \circ \overline{\psi}$.

С помощью леммы 4 доказывается, что $\psi = \{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ является цепным и естественным отображением. При этом имеют место цепные гомотопии

$$\psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_{\overset{\circ}{C}_n(X)}, \quad \varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_{C^S(X)},$$

которые доказываются с помощью метода ациклических носителей (см. [4]), и из которых получается утверждение теоремы 3.

В дальнейшем мы будем использовать ряд важных вспомогательных конструкций, связанных с ТС кубами. Рассмотрим произвольный толерантный куб $I_{\overline{m}} = I_{(m_1,\dots m_n)} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}$. Удвоим количество точек в каждом из толерантных отрезков I_{m_i}, $i = \overline{1, n}$, и получим новый куб $I_{\overline{M}} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{M_i}$, где $M_i = 2m_i + 1$. Определим толерантное отображение $d^{(n)} : I_{\overline{M}} \to I_{\overline{m}}$

$$(\forall\ k_i = \overline{0, M_i},\ \ i = \overline{1, n}) \quad d^{(n)}\left(\left(\frac{k_i}{M_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = \left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right),$$

где $[\dots]$ означает целую часть числа.

Определение 3. Полным двойным замедлением ТС куба $u : I_{\overline{m}} \to X$ назовем ТС куб $\breve{u} : I_{\overline{M}} \to X$ такой, что $M_i = 2m_i + 1$, $i = \overline{1, n}$, и

$$(\forall\ k_i = \overline{0, M_i},\ \ i = \overline{1, n}) \quad \breve{u}\left(\left(\frac{k_i}{M_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = u\left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right), \tag{23}$$

то есть $\breve{u} = u \circ d^{(n)}$.

Определим теперь серию вспомогательных толерантных отображений

$$d^{(n,s)} = d^{(m_1,\dots,m_n;s)} : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{M_i}\right) \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=s+1}^{n} I_{m_i}\right) \to I_{\overline{m}},$$

$$(\forall\ k_i=\overline{0,M_i},\ \ i=\overline{1,s})(\forall\ k_i=\overline{0,m_i},\ \ i=\overline{s+1,n})$$
$$d^{(n,s)}\left(\frac{k_1}{M_1},\dots,\frac{k_s}{M_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{m_1}\left[\frac{k_1}{2}\right],\dots,\frac{1}{m_s}\left[\frac{k_s}{2}\right],\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right). \tag{24}$$

Определим гомоморфизм $\varphi=\{\varphi_n:Q_n(X)\to Q_n(X)\}_{n\geqslant 0}$ на образующих

$$(\forall\ \ n>0)\quad \varphi_n(u)=\breve{u},\quad \varphi_0(u)=u.$$

С помощью (23) доказывается, что φ — цепное отображение и $\varphi(D_n(X))\subset \subset D_n(X)$. Следовательно имеется цепное отображение $\varphi^X=\{\varphi^X_n\}:C(X)\to \to C(X)$:

$$\varphi^X_n(u+D_n(X))=\breve{u}+D_n(X),$$

естественное по (X,τ).

Теорема 4. *Имеется естественная по* (X,τ) *цепная эквивалентность*

$$\varphi^X\simeq \mathbf{1}_{C(X)}$$

Доказательство.

Построим доказательство этой теоремы по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, сохранив введенные там обозначения. Нам надо построить семейство гомоморфизмов $\mathcal{D}^X=\{\mathcal{D}^X_n:C_n(X)\to C_{n+1}(X)\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющих свойствам

$$(\forall\ \ f\in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y))(\forall\ \ n\geqslant 0)\quad C_{n+1}(f)\circ\mathcal{D}^X_n=\mathcal{D}^Y_n\circ C_n(f),$$
$$(\forall\ \ n\geqslant 1)\quad \partial_{n+1}\circ\mathcal{D}^X_n=\varphi^X_n-\mathbf{1}_{C_n(X)}-\mathcal{D}_{n-1}\circ\partial_n. \tag{25}$$

Как и в теореме 1 для построения воспользуемся формулой

$$(\forall\ \ n\geqslant 0)\quad (\forall\ \ \overline{m}\in\overset{n}{\times}\mathbb{N})\quad (\forall\ \ u\in Q_n(X)\setminus D_n(X))$$
$$\mathcal{D}^X_n(\overline{u})=\mathcal{D}^X_n(u+D_n(X))=\mathcal{D}^X_n(C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}}))=C_{n+1}(u)(\mathcal{D}^{M_{\overline{m}}}_n(\overline{v}_{\overline{m}})); \tag{26}$$

при том, что должно выполняться свойство

$$(\forall\ \ u\in D_n(X))\quad C_{n+1}(u)(\mathcal{D}^{M_{\overline{m}}}_n(\overline{v}_{\overline{m}}))=0. \tag{27}$$

Для построения $\mathcal{D}^{M_{\overline{m}}}_n(\overline{v}_{\overline{m}})$, обеспечивающего эти условия, определим сначала невырожденный ТС куб

$$\delta^{(m_1,\dots,m_n;s)}=\delta^{(n,s)}:\left(\overset{s}{\underset{i=1}{\times}}I_{M_i}\right)\times\left(\overset{n}{\underset{i=s}{\times}}I_{m_i}\right)\to I_{\overline{m}}=\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}I_{m_i},\ \ s=\overline{1,n},$$
$$\delta^{(n,s)}\left(\frac{k_1}{M_1},\dots,\frac{k_s}{M_s},\frac{k'_s}{m_s},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{m_1}\left[\frac{k_1}{2}\right],\dots,\frac{1}{m_s}\max\left\{\left[\frac{k_s}{2}\right],k'_s\right\},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right). \tag{28}$$

Тогда полагаем по определению

$$\mathcal{D}^{M_{\overline{m}}}_n(\overline{v}_{\overline{m}}+D_n(M_{\overline{m}}))=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\delta^{(n,s)}+D_{n+1}(M_{\overline{m}})$$

и следовательно (см. (26))

$$\mathcal{D}_n^X(\overline{u}) = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1} u \circ \delta^{(n,s)} + D_{n+1}(X), \tag{29}$$

где

$$u \circ \delta^{(n,s)}\left(\frac{k_1}{M_1}, \dots, \frac{k_s}{M_s}, \frac{k'_s}{m_s}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right) =$$
$$= u\left(\frac{1}{m_1}\left[\frac{k_1}{2}\right], \dots, \frac{1}{m_s}\max\left\{\left[\frac{k_s}{2}\right], k'_s\right\}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right). \tag{30}$$

Завершается доказательство по аналогии с доказательством теоремы 1.

Процедуру полного двойного замедления можно применять любое конечное число раз с сохранением доказанной выше цепной гомотопии. Если $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i} \to X$ — произвольный ТС куб, тогда его h-кратное полное двойное замедление — это ТС куб $u^{\vee h} : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{M_i} \to X$, $M_i = 2^h(m_i + 1) - 1$, такой, что $u^{\vee h} = \varphi^h(u)$, где φ^h — степень относительно операции композиции.

В дальнейшем нам надо будет менять размер ТС куба по отдельным координатам. В связи с этим дадим определение.

Определение 4. Продлением ТС куба $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i} \to X$ по j-у аргументу, $j = \overline{1,n}$, называется ТС куб $u_{j,M_j} : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{j-1} I_{m_i}\right) \times I_{M_j} \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=j+1}^{n} I_{m_i}\right) \to X$, где $M_j \geqslant m_j$ и

$$u_{j,M_j}\left(\frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_j}{M_j}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right) = \begin{cases} u\left(\frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_j}{m_j}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right), & k_j = \overline{0, m_j}, \\ u\left(\frac{k_1}{m_1}, \dots, 1, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right), & k_j = \overline{m_j, M_j}. \end{cases}$$

Определение 5. Толерантное пространство (X, τ) с отмеченной точкой $x_0 \in X$ будем называть пунктированным, а ТС куб $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i} \to X$ назовем пунктированным, если все его вершины находятся в точке x_0, то есть $(\forall\ \varepsilon_i = \overline{0,1},\ i = \overline{1,n})\quad u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = x_0$.

Рассмотрим теперь произвольный куб $\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n+1} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n+1} \iota_{m_i}\right)$, $n \geqslant 1$. Обозначим через $R_{\overline{m}}$, где $\overline{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$, множество точек куба $I_{\overline{m}}$, лежащих во всех гранях кроме $\{1\}\times\left(\mathop{\times}\limits_{i=2}^{n+1} I_{m_i}\right)$. Множество $R_{\overline{m}}$ с индуцированной толерантностью образует подпространство $(R_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$ в $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$. Пусть на каждой грани из $R_{\overline{m}}$ заданы толерантные отображения

$$u(j, \varepsilon_j) : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{j-1} I_{m_i}\right) \times \{\varepsilon_j\} \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=j+1}^{n+1} I_{m_i}\right) \to X, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad \varepsilon = \overline{0,1}, \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Будем говорить, что ТС кубы $\{u(j, \varepsilon_j) | j = \overline{1, n+1},\ \varepsilon = \overline{0,1},\ \varepsilon_1 = 0\}$ согласованы на $R_{\overline{m}}$, если для любой пары индексов $j, j' = \overline{1, n+1}$ имеем

$$(\forall\ k_i = \overline{0, m_i},\ i = \overline{1, n+1}) \quad \frac{k_j}{m_j} = \varepsilon_j, \quad \frac{k_{j'}}{m_{j'}} = \varepsilon_{j'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(j,\varepsilon_j)\left(\left(\frac{k_i}{m_i}\right)_{i=\overline{1,n+1}}\right) = u(j',\varepsilon_{j'})\left(\left(\frac{k_i}{m_i}\right)_{i=\overline{1,n+1}}\right), \tag{31}$$

$$(\forall\ k_i, k_i' = \overline{0,m_i},\ \ i = \overline{1,n+1})\quad \frac{k_j}{m_j} = \varepsilon_j,\quad \frac{k_{j'}}{m_{j'}} = \varepsilon_{j'},\quad |k_i - k_i'| \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(j,\varepsilon_j)\left(\left(\frac{k_i}{m_i}\right)_{i=\overline{1,n+1}}\right)\tau u(j',\varepsilon_{j'})\left(\left(\frac{k_i'}{m_i}\right)_{i=\overline{1,n+1}}\right). \tag{32}$$

Заметим, что если (31) выполнено, то (32) автоматически выполняется после полного двойного замедления ТС кубов $u(j,\varepsilon_j)$.

Согласованное семейство $\{u(j,\varepsilon_j)\}$ на $R_{\overline{m}}$ определяет толерантное отображение $u(R_{\overline{m}}) : (R_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X,\tau)$, которое на каждой грани совпадает с соответствующим ТС кубом $u(j,\varepsilon_j)$.

Предложение 3. *Пусть* $u(R_{\overline{m}}) : R_{\overline{m}} \to X$ *— толерантное отображение, определенное согласованным на* $R_{\overline{m}}$ *семейством ТС кубов* $\{u(j,\varepsilon_j)\}$*. Тогда существует целое неотрицательное число* $h(\overline{m})$ *такое, что для всех* $h \geqslant h(\overline{m})$ *можно построить отображение*

$$\varphi_{\overline{M}} : I_{(M_1,\ldots,M_{n+1})} \to R_{(M_1,\ldots,M_{n+1})},\quad M_i = 2^h(m_i+1)-1, i = \overline{1,n+1},$$

которое постоянно на $R_{(M_1,\ldots,M_{n+1})}$*, и для которого композиция*

$$\Phi_{\overline{M}} = u^{\vee h}(R_{\overline{M}}) \circ \varphi_{\overline{M}} : I_{\overline{M}} \to X$$

является толерантным отображением таким, что $\Phi_{\overline{M}}|R_{\overline{M}} = u^{\vee h}(R_{\overline{M}})$.

Доказательство.

Это предложение доказывается с помощью метода, изложенного в работе [5] (см. доказательство теоремы 7).

В следующем предложении собраны свойства ТС куба $\delta^{(\overline{m};s)}$ определенного в (28).

Предложение 4. *Для любого ТС куба* $u : I_{\overline{m}} \to X$ *и любого* $s = \overline{1,n}$*, имеем*

1) $(\forall\ h \geqslant 0)\quad \left(u \circ \delta^{(m_1,\ldots,m_n;s)}\right)^{\vee h} = u^{\vee h} \circ \delta^{(M_1,\ldots,M_n;s)},\ M_i = 2^h(m_i+1)-1,\ \ i = \overline{1,n};$

2) u *— вырожден* $\Leftrightarrow u \circ \delta^{(\overline{m};s)}$ *— вырожден;*

3) u *— пунктирован* $\Leftrightarrow u \circ \delta^{(\overline{m};s)}$ *— пунктирован;*

4)

$$d_i^{\varepsilon}\left(u \circ \delta^{(m_1,\ldots,m_n;s)}\right) = \begin{cases} (d_i^{\varepsilon}u) \circ \delta^{(m_1,\ldots,\hat{m}_i,\ldots,m_n;s-1)}, & i < s, \\ (d_i^{\varepsilon}u) \circ \delta^{(m_1,\ldots,\hat{m}_i,\ldots,m_n;s)}, & s+1 < i < n, \end{cases}$$

$$d_s^0\left(u \circ \delta^{(\overline{m};s)}\right) = u \circ d^{(\overline{m};s-1)},\ \ d_s^1\left(u \circ \delta^{(\overline{m};s)}\right) = d_s^1\left(u \circ d^{(\overline{m};s)}\right)\ \text{— вырожден},$$

$$d_{s+1}^0\left(u \circ \delta^{(\overline{m};s)}\right) = u \circ d^{(\overline{m};s-1)},\ \ d_{s+1}^1\left(u \circ \delta^{(\overline{m};s)}\right) = d_s^1\left(u \circ d^{(\overline{m};s)}\right)\ \text{— вырожден}.$$

Аналогичные свойства имеют место для ТС кубов $d^{(\overline{m};s)}$ (см. (24)). Опишем еще одну конструкцию, которая обобщает $d^{(n;s)}$ и полное двойное замедление. Пусть $u : I_{(m_1,\ldots,m_n)} \to X$ — произвольный ТС куб, и $(h_1,\ldots,h_n)$ —

произвольный набор неотрицательных целых чисел. Определим новый ТС куб

$$d(h_1,\ldots,h_n)(u) : I_{(M_1,\ldots,M_n)} \to X, \quad M_i = 2^{h_i}(m_i+1)-1, i=\overline{1,n},$$

$$d(h_1,\ldots,h_n)(u)\left(\left(\frac{k_i}{M_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = u\left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2^{h_i}}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right). \tag{33}$$

Договоримся называть ТС кубы вида $u = d(h_1,\ldots,h_n)(w)$ замедленными, если существует $h_i \neq 0$. Если же из условия $u = d(h_1,\ldots,h_n)(w)$ следует, что все $h_i = 0$, то ТС куб u будем называть незамедленным. Связь замедленных кубов с предыдущими конструкциями отражена в формулах:

$$u \circ d^{(n,s)} = d(h_1,\ldots,h_n)(u), \quad h_1 = \ldots = h_s = 1,\ h_{s+1} = \ldots = h_n = 0;$$

$$u^{\vee h} = d(h,\ldots,h)(u);$$

$$u \circ \delta^{(n,s)} = d(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{0,\ldots,0}_{n+1-s})\left(u \circ \Delta^{(n,s)}\right),$$

где ТС куб $\Delta^{(n,s)} = \Delta^{(m_1,\ldots,m_n;s)}$ определяется формулой (18). В следующем предложении собраны свойства замедленных кубов.

Предложение 5. *1) ТС кубы* $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i(u)} \to X$*,* $w : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i(w)} \to X$ *таковы, что* $u = d(h_1,\ldots,h_n)(w)$*, тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$m_i(u) = 2^{h_i}(m_i(w)+1)-1 \quad \textit{или} \quad m_i(w) = 2^{-h_i}(m_i(u)+1)-1;$$

$$(\forall\ l_i = \overline{0, m_i(w)-1},\ r_i = \overline{0, 2^{h_i}-1},\ i = \overline{1,n})$$

$$u\left(\left(\frac{1}{m_i(u)}(2^{h_i}l_i + r_i)\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = u\left(\left(\frac{1}{m_i(u)}2^{h_i}l_i\right)_{i=\overline{1,n}}\right);$$

$$w\left(\left(\frac{1}{m_i(w)}l_i\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = u\left(\left(\frac{1}{m_i(u)}2^{h_i}l_i\right)_{i=\overline{1,n}}\right). \tag{34}$$

2) Если ТС куб $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i(u)} \to X$ *таков, что* $u = d(h'_1,\ldots,h'_n)(w') = d(h''_1,\ldots,h''_n)(w'')$*, то ТС куб* $w : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i(w)} \to X$*,* $m_i(w) = 2^{-h_i}(m_i(u)+1)-1$*,* $h_i = \max\{h'_i, h''_i\}$*,* $i = \overline{1,n}$*, который определяется формулой (34), удовлетворяет соотношениям:*

$$u = d(h_1,\ldots,h_n)(w),\ w' = d(h_1-h'_1,\ldots,h_n-h'_n)(w),$$

$$w'' = d(h_1-h''_1,\ldots,h_n-h''_n)(w).$$

3) Пусть $h'_i, h''_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*,* $i=\overline{1,n}$*, а* u *— произвольный* n*-мерный ТС куб, тогда*

$$d(h''_1,\ldots,h''_n)(d(h'_1,\ldots,h'_n)(u)) = d(h'_1+h''_1,\ldots,h_n+h''_n)(u).$$

С помощью предложений 3–5 доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $((X,\tau),x_0)$ *пунктированное линейно связное толерантное пространство. Для каждого ТС куба* $u:\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m^{(i)}(u)}\to X$ *найдется неотрицательное целое число* $h(u)$ *и такой ТС куб*

$$V(u|h(u)):I_{M_1(u)}\times\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{M^{(i)}(u)}\right)\to X,$$

которые удовлетворяют следующим свойствам:

(П.1) $(\forall\ i=\overline{1,n})(\forall\ \varepsilon=\overline{0,1})\quad h(d_i^{\varepsilon}(u))\leqslant h(u)$*;*

(П.2) $d_1^0(V(u|h(u)))=u^{\vee h(u)}$*;*

(П.3) $d_1^1(V(u|h(u)))$ *— пунктированный ТС куб;*

(П.4) *если* u *— выpожден по* j*-у аргументу, то* $V(u|h(u))$ *— выpожден по* $(j+1)$*-у аргументу;*

(П.5) *если* u *— пунктированный, то* $h(u)=0$, $M^{(i)}(u)=m^{(i)}(u)$, $i==\overline{1,n}$, $M_1(u)=1$, *и*

$$V(u|0)\left(\frac{k_1}{M_1(u)},\frac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)},\dots,\frac{k^{(n)}}{M^{(n)}(u)}\right)=u\left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}(u)},\dots,\frac{k^{(n)}}{m^{(n)}(u)}\right);$$

(П.6) $(\forall\ i=\overline{2,n+1})(\forall\ \varepsilon=\overline{0,1})$

$$d_i^{\varepsilon}(V(u|h(u)))=\left(\left(V\left(d_{i-1}^{\varepsilon}(u)|h(d_{i-1}^{\varepsilon}(u))\right)\right)^{\vee(h(u)-h(d_{i-1}^{\varepsilon}(u)))}\right)_{1,M_1(u)};$$

(П.7) *если* $u=V(w|h(w))$*, то* $h(u)=h(w)$*,*

$$V(u|h(u))=V(w|h(w))^{\vee h(w)}\circ\Delta^{(n,1)};$$

(П.8) *если* $u=d(h_1,\dots,h_n)(w)$*, то* $h(u)=h(w)$ *и*

$$V(u|h(u))=d(h_1,h_1,\dots,h_n)(V(w|h(w)));$$

(П.9) *если* $u=w\circ\Delta^{(n-1,s)}$*, то* $h(u)=h(w)$*,*

$$V(u|h(u))=V(w|h(w))\circ\Delta^{(n,s+1)}.$$

Определение 6. ТС куб $V(u|h(u))$ будем называть пунктированием ТС куба u, число $h(u)$ — границей пунктируемости, а ТС кубы вида $d_1^0(V(u|h(u)))$ — пунктируемыми. Из теоремы 5 следует, что все ТС кубы после полного двойного замедления достаточно большой кратности становятся пунктируемыми.

Предложение 6. *Для любого ТС куба* u *и любого целого* $h\geqslant h(u)$ *имеем*

$$d_1^0(V(u^{\vee(h-h(u))}|h(u)))=u^{\vee h}.$$

Обозначим через $Q_n^\vee(X)$ и назовем группой замедленных ТКС цепей, подгруппу в $Q_n(X)$, свободно порожденную пунктируемыми кубами, а точнее

$$Q_n^\vee(X) = \left\langle u^{\vee h} \,|u \ \text{— } n\text{-мерный ТС куб}, \ h \geqslant h(u) \right\rangle \subset Q_n(X),$$

где скобки $\langle \ldots \rangle$ обозначают порожденную группу. Аналогично

$$D_n^\vee(X) = \left\langle u^{\vee h} \,|u \ \text{— вырожденный ТС куб}, \ h \geqslant h(u) \right\rangle = Q_n^\vee(X) \cap D_n(X).$$

Свойство (П.1) теоремы 5 показывает, что $\partial_n(Q_n^\vee(X)) \subset Q_{n-1}^\vee(X)$, $\partial_n(D_n^\vee(X)) \subset D_{n-1}^\vee(X)$. Следовательно, имеем цепной комплекс $C^\vee(X) = \{C_n^\vee(X) = Q_n^\vee(X)/D_n^\vee(X), \partial_n\}$ замедленных НТКС цепей, который с точностью до изоморфизма (Нетер) можно считать подкомплексом в $C(X) = \{C_n(X), \partial_n\}$. Группы $Z_n^\vee(X) = Ker \ \partial_n$, $B_n^\vee(X) = Im \ \partial_{n+1}$ назовем группами замедленных циклов и границ комплекса $\{C_n^\vee(X), \partial_n\}$. А группы гомологий

$$\{H_n^\vee(X) = Z_n^\vee(X)/B_n^\vee(X), \ n \geqslant 0\}$$

будем называть замедленными ТКС гомологиями пространства (X, τ).

С помощью теоремы 4 и свойства (П.9) теоремы 5 доказывается следующее предложение.

Предложение 7.

$$(\forall \ z \in Z_n^\vee(X))(\forall \ h \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad z^{\vee h} - z \in B_n^\vee(X).$$

Теорема 6.

$$(\forall \ n \geqslant 0)(\exists \ \varphi_n : H_n^Q(X) \cong H_n^\vee(X)). \tag{35}$$

Доказательство.

Для произвольной цепи $c = \sum \alpha_i \overline{u}_i \in C_n(X)$ определим границу пунктируемости $h(c) \overset{df}{=} \max\{h(u_i) | \alpha_i \neq 0\}$, $h(0) \overset{df}{=} 0$. Из свойства (П.1) теоремы 5 следует, что $h(\partial_n c) \leqslant h(c)$. Из определения $C_n^\vee(X)$ и того, что при $\alpha_i \neq 0$ имеем $h(c) \geqslant h(u_i)$, следует

$$c^{\vee h(c)} = \sum \alpha_i \overline{u_i^{\vee h(c)}} \in C_n^\vee(X).$$

Поэтому можно определить отображение $\varphi_n : H_n^Q(X) \to H_n^\vee(X)$

$$\varphi_n(z + B_n(X)) = z^{\vee h(z)} + B_n^\vee(X).$$

С помощью предложения 7 доказывается, что φ_n корректно определено и является искомым изоморфизмом.

Доказательство теоремы 6 завершено.

Замечание. Изоморфизмы (35) следует обозначать $\varphi^X = \{\varphi_n^X\}$, так как они зависят от X. Для любого толерантного отображения $f : (X, \tau) \to (Y, \vartheta)$ гомологический функтор H^Q определяет гомоморфизм $f_* : H(X) \to H(Y)$. Определим индуцированный гомоморфизм $f_*^\vee : H^\vee(X) \to H^\vee(Y)$ формулой

$$f_*^\vee = \varphi^Y \circ f_* \circ (\varphi^X)^{-1}, \tag{36}$$

или, что эквивалентно,

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad (f_*^{\vee})_n(z^{\vee h(z)} + B_n^{\vee}(X)) = (C_n(f)(z))^{\vee h(C_n(f)(z))} + B_n^{\vee}(Y). \tag{37}$$

Тогда мы получаем гомологический функтор $H^{\vee}$, а изоморфизмы (35) определяют естественный изоморфизм функторов H^Q и $H^{\vee}$.

Пусть теперь $Q_n^{\bullet}(X)$ — группа свободно порожденная пунктированными ТС кубами, $D_n^{\bullet}(X) \subset Q_n^{\bullet}(X)$ — ее подгруппа, порожденная вырожденными кубами. Из свойства (П.5) теоремы 5 следует, что $Q_n^{\bullet}(X) \subset \subset Q_n^{\vee}(X)$, $D_n^{\bullet}(X) = = Q_n^{\bullet}(X) \cap D_n^{\vee}(X)$. И так как $\partial_n(Q_n^{\bullet}(X)) \subset Q_{n-1}^{\bullet}(X)$, $\partial_n(D_n^{\bullet}(X)) \subset D_{n-1}^{\bullet}(X)$, то имеем цепной комплекс $C^{\bullet}(X) = \{C_n^{\bullet}(X) = Q_n^{\bullet}(X)/D_n^{\bullet}(X), \partial_n\}$ пунктированных НТКС цепей, который с точностью до изоморфизма (Нетер) является подкомплексом в $C^{\vee}(X)$. Группы $Z_n^{\bullet}(X) = Ker\ \partial_n$, $B_n^{\bullet}(X) = Im\ \partial_{n+1}$, $H_n^{\bullet}(X) = Z_n^{\bullet}(X)/B_n^{\bullet}(X)$ будем называть пунктированными циклами, границами и пунктированными ТКС гомологиями пространства (X, τ). Отметим, что в результате мы получаем гомологический функтор $H^{\bullet}$ с тем же правилом индуцирования гомоморфизмов, что и для H^Q:

$$(\forall\ f \in Hom_{\mathbb{T}_0}(X, Y))(\exists\ f_*^{\bullet} \in Hom(H^{\bullet}(X), H^{\bullet}(Y)))$$
$$(\forall\ z = \sum \alpha_i(u_i + D^{\bullet}(X)) \in Z^{\bullet}(X))$$
$$f_*^{\bullet}(z + B^{\bullet}(X)) = \sum \alpha_i(f \circ u_i + D^{\bullet}(Y)) + B^{\bullet}(Y). \tag{38}$$

Аналогично предложению 7 доказывается

Предложение 8.

$$(\forall\ z \in Z_n^{\bullet}(X))(\forall\ h \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad z^{\vee h} - z \in B_n^{\bullet}(X).$$

Теорема 7. *Для всякого линейно связного пространства* (X, τ) *группы* $H^{\bullet} = = \{H_n^{\bullet}\}$ *пунктированных ТКС гомологий и группы* $H^{\vee} = \{H_n^{\vee}\}$ *замедленных ТКС гомологий изоморфны, то есть* $(\forall\ n \geqslant 0)(H_n^{\bullet}(X) \cong H_n^{\vee}(X))$.

Доказательство.

Пусть $\varphi = \{\varphi_n : C_n^{\bullet}(X) \hookrightarrow C_n^{\vee}(X)\}$ — отображение вложения, которое является цепным и естественным (см. (38),(36),(37)). Оно индуцирует естественный по (X, τ) гомоморфизм $\varphi_* : H^{\bullet}(X) \to H^{\vee}(X)$ такой, что

$$(\forall\ z \in Z^{\bullet}(X)) \quad \varphi_*(z + B^{\bullet}(X)) = z + B^{\vee}(X).$$

Определим отображение $\psi'_* : H^{\vee}(X) \to H^{\vee}(X)$

$$(\forall\ z \in Z^{\vee}(X)) \quad \psi'_*(z + B^{\vee}(X)) = z^{\vee h(z)} + B^{\vee}(X).$$

Легко доказывается, что ψ'_* — корректно определенный гомоморфизм, причем $\psi'_* = \mathbf{1}_{H^{\vee}(X)}$. Определим еще одно отображение $\psi''_* : H^{\vee}(X) \to H^{\bullet}(X)$ такое, что

$$(\forall\ z = \sum \alpha_i u_i + D_n^{\vee}(X) \in Z_n^{\vee}(X)) \qquad \psi''_{n*}(z^{\vee h(z)} + B_n^{\vee}(X)) =$$
$$= \sum \alpha_i \left(d_1^1\left((V(u_i|h(u_i)))^{\vee(h(z)-h(u_i))}\right) + D_n^{\bullet}(X)\right) + B_n^{\bullet}(X).$$

С помощью теоремы 5 и предложения 8 показывается, что ψ''_* — корректно определенный гомоморфизм, и при этом $\psi''_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}_{H^\bullet(X)}$. Остается показать, что $\varphi_* \circ \psi''_* = \mathbf{1}_{H^\vee(X)}$. Это следует из того, что для $z^{\vee h(z)} = \sum \alpha_i u_i^{\vee h(z)} + D_n^\vee(X) \in Z_n^\vee(X)$, согласно теореме 5, имеем

$$\sum \alpha_i d_1^1 \left((V(u_i|h(u_i)))^{\vee(h(z)-h(u_i))} \right) - \sum \alpha_i u_i^{\vee h(z)} =$$
$$= \partial_{n+1} \left(\sum \alpha_i \left((V(u_i|h(u_i)))_{1,M_1(z)} \right)^{\vee(h(z)-h(u_i))} \right) \in B_n^\vee(X),$$

где $M_1(z) = \max\{M_1(u_i)|\alpha_i \neq 0\}$. Доказательство теоремы 7 завершено.

Замечание. Изоморфизм $\varphi_* : H^\bullet(X) \cong H^\vee(X)$ является естественным по (X, τ).

Подводя итог, отметим, что в нашем распоряжении теперь имеется несколько естественно изоморфных гомологических функторов, но именно пунктированные ТКС гомологии являются подходящим инструментом для построения спектральных последовательностей толерантных расслоений.

Литература

[1] Zeeman E.S. The topology of brain and visual perception / E.S. Zeeman // The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). – 1962.

[2] Небалуев С.И. Гомологическая теория толерантных пространств / С.И. Небалуев. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

[3] Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. – М.: Мир, 1971.

[4] Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий / П. Хилтон, С. Уайли. – М.: Мир, 1966.

[5] Небалуев С.И. Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств / С.И. Небалуев // Чебышевский сборник: труды VI Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". – Тула: Изд-во ТГПУ, 2004. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 64–97.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007; в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

POINTED TOLERANT CUBIC SINGULAR HOMOLOGY THEORY

© 2007 S.I. Nebaluev, I.A. Klyaeva[2]

In the paper several homological functors on category of tolerance spaces, which are useful in the theory of spectral sequences of fibre tolerance spaces are constructed.

Paper received 17/*IX*/2007. Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Nebaluev Sergey Ivanovich, Klyaeva Inna Alexandrovna, Dept. of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University, Saratov, 410012, Russia.