УДК 512.7

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НУМЕРАЦИИ $\mathbb{Z}_n^2$

© 2007 А.В. Мартынов[1]

Найдено точное изопериметрическое неравенство для графа специального вида.

Обозначения

$|A|$ — мощность множества A; $|a|$ — абсолютная величина числа $a \in \mathbb{R}$; $[a]$ — целая часть $a \in \mathbb{R}$; $A^2 = A \times A$ — прямое произведение множества A на себя; $A^d = A^{d-1} \times A$; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\binom{K}{i}$ — множество тех подмножеств K, мощность которых равна i.

1. Экстремальная нумерация $\mathbb{Z}_n^2$

Пусть $D = \{0, 1, \ldots, n^d - 1\}$, $\sigma : \mathbb{Z}_n^d \to D$ — биекция. Два элемента $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{Z}_n^d$ будем называть соседними, если $a_i - b_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, что обозначаем как $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.

Определим

$$R(\sigma, n) = \max_{\mathbf{a} \sim \mathbf{b}} |\sigma(\mathbf{a}) - \sigma(\mathbf{b})|$$

и

$$R_n = \min_{\sigma} R(\sigma, n).$$

Здесь и далее в обозначениях символ d не указываем, поскольку в основной части работы d фиксировано, $d = 2$.

Пусть $k \in \{0, 1, ..., n^d - 2\}$, $G(\sigma, k) = \{x \in D, x \notin \{0, ..., k\} : \exists \mathbf{a} \sim \mathbf{b}, x = \sigma(\mathbf{a}), \sigma(\mathbf{b}) \in \{0, ..., k\}\}$, $S(\sigma, k) = |G(\sigma, k)| > 0$.

Тогда $\exists l \in G(\sigma, k)$, такое, что $l \geqslant k + S(\sigma, k)$, и $\exists k' \leqslant k$ такое, что $k' = \sigma(\mathbf{a})$, $l = \sigma(\mathbf{b})$, $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Получим

$$l - k' \geqslant S(\sigma, k).$$

[1]Мартынов Алексей Владимирович (prepodavatel@rambler.ru), кафедра математического анализа Владимирского государственного педагогического университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр-т Строителей, 11.

Следовательно, $R(\sigma,n) \geqslant S(\sigma,k)$. Обозначим $P(k) = \min_{\sigma} S(\sigma,k)$. Тогда имеют место неравенства:

$$R(\sigma,n) \geqslant \max_k S(\sigma,k),$$
$$R(\sigma,n) \geqslant \max_k P(k),$$
$$R_n \geqslant \max_k P(k).$$

1.1. Изопериметрическая задача

Изопериметрические задачи — важные задачи в математике и ее приложениях (см. [1, 2]). Библиографию вопроса можно найти в [3, 4]. В последнее время изопериметрические неравенства активно исследуются в комбинаторике, в задачах передачи информации, теории кодирования.

Пусть $G = (K, E, \psi)$ — граф, где K — множество вершин, E — множество ребер, $\psi : E \to \binom{K}{2}$ — инъективное отображение, определяющее какие вершины соединены данным ребром. Изопериметрическая задача для заданного $v \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant v \leqslant |K|$ состоит в нахождении минимума $|\partial V|$ по всем $V \subseteq K$, $|V| = v$, где

$$\partial V = \{k \in K \setminus V : \exists e \in E, \psi(e) = \{k, l\}, l \in V\}$$

— граница множества V.

1.1.1. Изопериметрическая задача в $\mathbb{Z}^2$

Сформулируем изопериметрическую задачу в $\mathbb{Z}^2$. Зададим на множестве $\mathbb{Z}^2$ множество клеток следующим образом:

$$K = \{\mathbf{k} = \{(k_1,k_2),(k_1,k_2+1),(k_1+1,k_2),(k_1+1,k_2+1)\} : (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Клетку $\mathbf{k}$ обозначаем как одну из ее вершин — (k_1,k_2), это не должно приводить к недоразумениям.

Клетки $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1,b_2) \in K$ будем называть соседними, если $(a_1,a_2) \sim (b_1,b_2)$ в $\mathbb{Z}^2$, и будем обозначать так же: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.

Определим границу множества V:

$$\partial V = \{\mathbf{a} \in K \setminus V : \exists \mathbf{b} \in V, \mathbf{a} \sim \mathbf{b}\}.$$

Изопериметрическая задача в $\mathbb{Z}^2$ состоит в нахождении

$$P(v) = \min_{V \subset K, |V| = v} |\partial V|.$$

Теорема 1. *Для любого натурального* v *справедливо:* $P(v) \geqslant 2\sqrt{2v-1}+2$.

Доказательство. Определим на K преобразования, которые не увеличивают мощность границы V.

1. Разобьем V на вертикальные полосы (далее, для простоты, слово "вертикальные" будем опускать и говорить — полосы) $L_1, \ldots, L_n$, $l_i = |L_i|$.

$$L_i = \{\mathbf{a}_j(a_1,a_2) \in V : \forall j \in \mathbb{Z} \;\; a_1 = const\}.$$

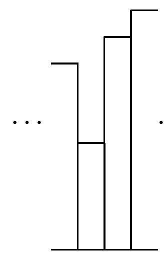
Пронумеруем клетки в каждой полосе следующим образом: самая нижняя клетка в полосе будет иметь номер 1, следующая — 2 и так далее до l_i.

T_c — преобразование, действующее на L_i таким образом, чтобы клетки полосы, номер которых равен $\left[\frac{l_i}{2}\right]$ располагались на одной горизонтальной прямой.

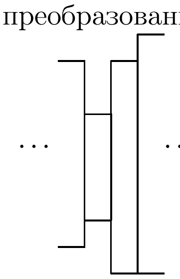
$$T_c : (a_1, a_2) \to \left(a_1, a_2 - \min_{(a_1,a_2)\in L_i} a_2 + \left\lceil \frac{\max_i l_i - l_i}{2} \right\rceil\right),$$

где $(a_1, a_2) \in L_i$.

Покажем, что T_c не увеличивает $|\partial V|$ (пока будем считать, что полосы сплошные, далее этот факт будет доказан). Пусть, наоборот, $L_1, \ldots, L_n$ располагаются так, что на одной прямой находятся их крайние нижние клетки. В этом случае (как видно из рисунка) $|\partial V| = d_1 + |l_{i+1} - l_i| + 1 + d_2$, где d_1, d_2 — константы.



Подействуем на клетки V преобразованием T_c.



В этом случае $|\partial(T_cV)| = d_1+|l_{i+1}-l_i|+d_2$, $|\partial V|-|\partial(T_cV)| = 1$. Таким образом, T_c не увеличивает ∂V.

2. Определим понятие связности. Не соседние клетки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются соседями второго порядка, если существует клетка $\mathbf{k}$, которая является соседней для клетки $\mathbf{a}$ и для клетки $\mathbf{b}$. Клетки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются соседями 3-го порядка, если существует клетка $\mathbf{k}$, которая является соседом 2-го порядка для клетки $\mathbf{a}$ и соседом для клетки $\mathbf{b}$. Клетки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются соседями k-го порядка, если существует клетка $\mathbf{k}$, которая является соседом $k-1$-го порядка для клетки $\mathbf{a}$ и соседом для клетки $\mathbf{b}$. Множество $W \subset K$ связно, если $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ $\exists k$ такое, что клетки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются соседями k-го порядка.

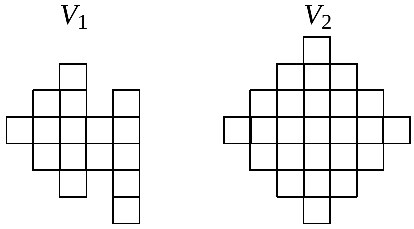
Пусть $V_1, V_2 \subset V$, $\forall \mathbf{a} \in V_1 \nexists \mathbf{b} \in V_2, \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.

T_s — преобразование, делающее V связным:

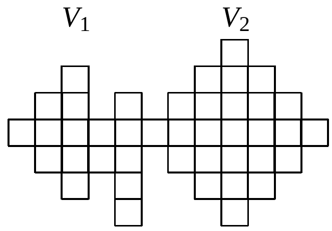
$$T_s : (a_1, a_2) \to (a_1 + m_1, a_2 + m_2),$$

где $(a_1, a_2) \in V_1$, m_1, m_2 — координаты вектора $\mathbf{m}$, который выбирается так, чтобы существовали соседние клетки $\mathbf{a} \in T_s V_1$ и $\mathbf{b} \in V_2$, $T_s V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Покажем, что T_s не увеличивает $|\partial V|$. Пусть $\partial V_1 \cap \partial V_2 = \varnothing$.



До преобразования $|\partial V| = |\partial V_1| + |\partial V_2|$.

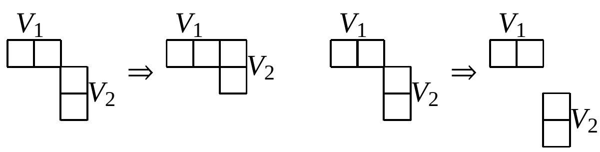


После преобразования $|\partial(T_s V)| = |\partial V_1| + |\partial V_2| - 2\min(l_1, l_2)$, где $l_1 = |L_1|$, $l_2 = |L_2|$, $L_1 \subset V_1$, $L_2 \subset V_2$. $|\partial V| > |\partial(T_s V)|$. Таким образом, T_s не увеличивает ∂V.

Определим функцию $\varphi(T, M) = |\partial M| - |\partial(TM)|$, где $M \subset V$, T — преобразование, действующее на V.

Пусть $\partial V_1 \cap \partial V_2 \neq \varnothing$. В этом случае возможны варианты конфигурации V, когда $\varphi(T_s, M)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$\varphi(T_s, M) = 1$ $\qquad\qquad$ $\varphi(T_s, M) = -2$



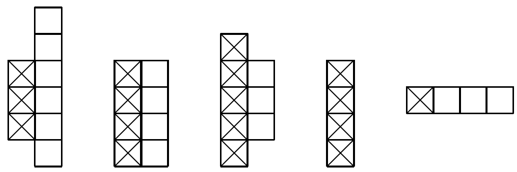
Выберем $\mathbf{m}$ в преобразовании T_s так, чтобы $\sum_{\forall M \subset V} \varphi(T_s, M) \geqslant 0$. Таким образом, T_s не увеличивает ∂V.

3. Будем считать, что на множество V уже подействовали преобразованием T_s, т.е. V — связно.

Покажем, что "внутри" множества V, имеющего экстремальную конфигурацию, не будет клеток не принадлежащих этому множеству. Для этого покажем, что множество $\overline{V} = \mathbb{Z}^2 \setminus V$ будет связным.

Предположим, что это не так, т.е. существует непустое множество $A \subset \overline{V}$, $\forall \mathbf{a} \in A\ \nexists \mathbf{b} \in (\overline{V} \setminus A), \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Добавим к V все клетки, принадлежащие множеству A, $V' = V + A$. Таким образом, $|V'| > |V|$, а $|\partial V| \geqslant |\partial V'|$. Удалим из множества V' $|A|$ клеток, следующим образом: будем удалять по одной клетке из крайней левой полосы, выбирая нижнюю клетку. При этом возможны следующие варианты расположения клеток в крайней левой полосе (клетки в этой полосе помечены крестом):

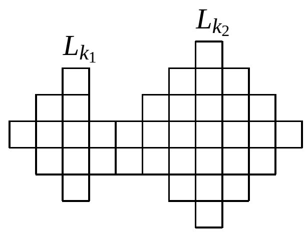
1) 2) 3) 4) 5)



Во всех этих случаях удаление нижней клетки из крайней левой полосы не ведет к увеличению $|\partial V'|$. Следовательно, можно получить множество мощности $|V|$, мощность границы которого меньше, чем у исходного множества V. Что противоречит тому, что V экстремально. Следовательно, множество $\bar{V}$ должно быть связным.

4. Покажем, что вертикальные полосы в экстремальной конфигурации V будут располагаться монотонно относительно свой мощности.

Предположим, что это не так, т.е. в V есть две полосы L_{k_1} и L_{k_2}, между которыми располагаются полосы меньшей мощности:

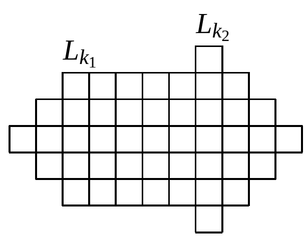


При этом можно считать, что полосы между L_{k_1} и L_{k_2} располагаются монотонно, если это не так, то достаточно в качестве L_{k_1} выбрать такую полосу, чтобы все внутренние полосы между L_{k_1} и L_{k_2} располагались монотонно. Поэтому $|\partial V| = d_1 + \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \max(2, |l_i - l_{i+1}|) + d_2$, где d_1, d_2 — константы.

Добавим к этим внутренним полосам меньшей мощности h клеток, где

$$h = \sum_{i=k_1+1}^{k_2-1} (\min(|L_{k_1}|, |L_{k_2}|) - |L_i|)$$

и получим множество V':



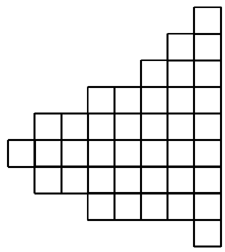
Так как все внутренние полосы стали мощности l_{k_1}, то $|\partial V'| = d_1 + \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \max(2, |l_i - l_{i+1}|) + d_2 = d_1 + 2(k_2 - k_1) + d_1$, $|\partial V| - |\partial V'| = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \max(2, |l_i - l_{i+1}|) - 2(k_2 - k_1) \geqslant 0$.

Как уже было показано выше, можно удалять из V' клетки (из крайней левой полосы), не увеличивая $|\partial V'|$. Если $|\partial V| - |\partial V'| > 0$, то удалив h

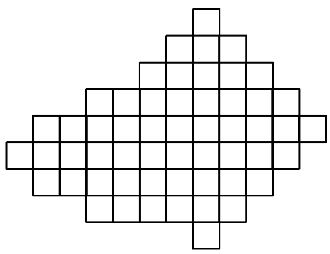
клеток, можно получить множество мощности $|V|$, мощность границы которого меньше, чем у исходного множества V. Что противоречит тому, что V имеет экстремальную конфигурацию. Если $|\partial V| - |\partial V'| = 0$, то экстремальная конфигурация V не единственна, и можно указать другую экстремальную конфигурацию, в которой вертикальные полосы будут располагаться монотонно относительно свой мощности. Следовательно, вертикальные полосы в экстремальной конфигурации V будут располагаться монотонно относительно свой мощности.

5. Покажем, что в экстремальной конфигурации V вертикальная полоса L_m, $|L_m| = l_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |L_i|$ не может располагаться с краю, т.е. $m \neq 1$ и $m \neq n$ (кроме некоторых случаев при малых v, например, при $v = 7$).

Пусть $m = n$:



Добавим к V клетки, справа от L_m так, чтобы $|\partial V|$ не увеличилась:



Удалим из крайней левой полосы добавленное количество клеток, получим множество, мощность границы которого не больше, чем у исходного множества V. Значит экстремальная конфигурация V не единственна, и можно указать другую экстремальную конфигурацию, в которой полоса максимальной мощности не располагается с краю.

6. Будем искать $|\partial V|$ как сумму границ L_i (с учетом их перекрытия). $|\partial L_1| = 2l_1 + 2$, $|\partial L_2| = 2l_2 + 2$, $|\partial(L_1 \cup L_2)| = l_1 + |l_2 - l_1| + l_2 + 2$. Но так как может оказаться, что $|l_1 - l_2| = 1$ или $l_1 = l_2$, то $|\partial(L_1 \cup L_2)| = l_1 + \max(2, |l_2 - l_1|) + l_2 + 2$. Аналогично получаем:

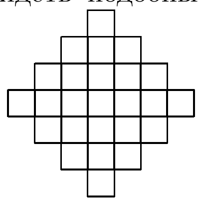
$$|\partial V| = l_1 + \sum_{i=2}^{n} \max(2, |l_i - l_{i-1}|) + l_n + 2.$$

Найдем

$$\begin{gathered} P(v) = \min|\partial V| = \min\left(l_1 + \textstyle\sum_{i=2}^{n} \max(2, |l_i - l_{i-1}|) + l_n + 2\right) \geqslant \\ \geqslant \min(l_1) + \min\left(\textstyle\sum_{i=2}^{n} \max(2, |l_i - l_{i-1}|)\right) + \min(l_n) + 2 = \\ = 1 + 2(n-1) + 1 + 2 = 2n + 2. \end{gathered}$$

7. Выясним, что это за конфигурация V, когда $\max_{2\leqslant i\leqslant n}(2, |l_i - l_{i-1}|) = 2$. Очевидно, что $|l_i - l_{i-1}| \leqslant 2$, при этом $v = \sum_{i=1}^{n} l_i$. Наибольшей граница V будет при большем v, следовательно, можно считать, что $|l_i - l_{i-1}| = 2$.

V в этом случае будет выглядеть подобным образом:



8. Найдем $v = \sum_{i=1}^{n} l_i$. Для простоты будем считать, что крайние нижние клетки L_i лежат на одной прямой, v от этого не изменится. Найдем уравнения прямых, на которых лежат крайние верхние клетки L_i. Очевидно, это $y = 2x - 1$ и $y = -2x + 2n + 1$. Найдем их точку пересечения $x = \frac{n+1}{2}$, $y = n$. Отсюда

$$l_1 + \cdots + l_x = \frac{1+n}{2}\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{4},$$

$$l_{x+1} + \cdots + l_n = \frac{1+n-2}{2}\left(n - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{(n-1)^2}{4},$$

$$l_1 + \cdots + l_n = \frac{n^2+1}{2}.$$

Сравним $P(v)$ и $2\sqrt{2v-1} + 2$. Для этого найдем разность между ними:

$$P(v) - 2\sqrt{2v-1} - 2 \geqslant 2n + 2 - 2\sqrt{2\frac{n^2+1}{2} - 1} - 2 \geqslant 0.$$

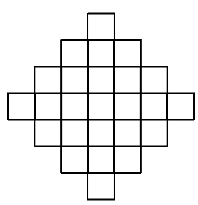
Следовательно, $\forall v \;\; P(v) \geqslant 2\sqrt{2v-1} + 2$.

Теорема 2.

$$\begin{aligned}
2k^2 + 2k < |V| \leqslant 2k^2 + 2k + 1 &\quad\Rightarrow\quad P(v) = 4k + 4,\\
2k^2 + 2k + 1 < |V| \leqslant 2k^2 + 3k + 1 &\quad\Rightarrow\quad P(v) = 4k + 5,\\
2k^2 + 3k + 1 < |V| \leqslant 2k^2 + 4k + 2 &\quad\Rightarrow\quad P(v) = 4k + 6,\\
2k^2 + 4k + 2 < |V| \leqslant 2k^2 + 5k + 3 &\quad\Rightarrow\quad P(v) = 4k + 7,\\
2k^2 + 5k + 3 < |V| \leqslant 2k^2 + 6k + 5 &\quad\Rightarrow\quad P(v) = 4k + 8,
\end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что для конфигураций с разностью между количеством клеток в соседних полосах равной 2 $|V| = \frac{n^2+1}{2}$, $|\partial V| = 2n + 2$. Конфигурация V в этом случае будет выглядеть подобным образом:

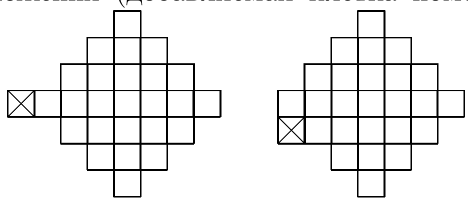


Так как $|V|$ должно быть целым числом, то n — нечетное число, $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Откуда $|V| = 2k^2 + 2k + 1$ и $|\partial V| = 4k + 4$.

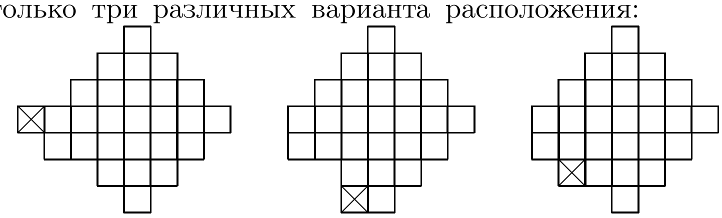
Пусть $n_0 = 2k+1$, $|V_0| = 2k^2 + 2k + 1$, $|\partial V_0| = 4k+4$. Рассмотрим конфигурацию V при $n_4 = 2(k+1)+1$, $|V_4| = 2k^2 + 6k + 5$, $|\partial V_4| = 4k + 8$. Мощность границы V при переходе от n_0 к n_4 увеличивается на $|\partial V_4| - |\partial V_0| = 4$, при этом $|V_4| - |V_0| = 4k + 4 = |\partial V_0|$. Следовательно, переход от V_0 к V_4 можно осуществить, добавляя к V_0 клетки из ∂V_0.

Опишем этот процесс добавления клеток. При добавлении клеток каждый раз должна получаться экстремальная конфигурация V, следовательно клетки надо добавлять так, чтобы $|\partial V|$ либо не менялась, либо менялась на наименьшую возможную величину.

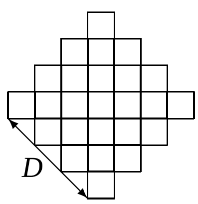
При добавлении клетки к V при $|V| = |V_0|$ возможно только два различных варианта расположения (добавляемая клетка помечена крестом):



В первом случае $|\partial V_0|$ увеличивается на 2, во втором — на 1. Следовательно, выбираем второй вариант. Далее, для добавления клетки к V возможно только три различных варианта расположения:



Выбираем третий вариант, так как $|\partial V|$ при этом не меняется. Очевидно, что на следующем шаге мы опять будем иметь три таких же варианта добавления клетки. Подсчитаем количество подобных шагов. Очевидно, третий вариант добавления клетки возможен до тех пор, пока не заполнена диагональ D:

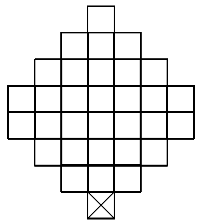


Найдем $|D|$. Очевидно, что

$$|D| = \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{2k+1}{2}\right] = k.$$

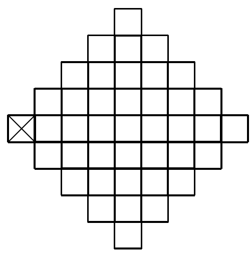
Следовательно, при увеличении $|V|$ на k, $|\partial V|$ увеличивается на 1, т.е. при $2k^2 + 2k + 1 < |V| \leqslant 2k^2 + 3k + 1 \qquad |\partial V| = 4k + 5$.

Далее можно добавить к V еще k клеток аналогичным образом, при этом $|\partial V| = 4k + 6$. На следующем шаге получаем четвертый вариант добавления клетки, не увеличивающий $|\partial V|$:



Следовательно, при увеличении $|V|$ на $k+1$, $|\partial V|$ увеличивается на 1, т.е. при $2k^2 + 3k + 1 < |V| \leqslant 2k^2 + 4k + 2 \quad |\partial V| = 4k + 6$.

Аналогичным образом можно добавить еще два раза по $k + 1$ клетке, т.е. при $2k^2 + 4k + 2 < |V| \leqslant 2k^2 + 5k + 3 \quad |\partial V| = 4k + 7$, и при $2k^2 + 5k + 3 < |V| \leqslant 2k^2 + 6k + 4 \quad |\partial V| = 4k + 8$. На следующем шаге опять получаем четвертый вариант добавления клетки, не увеличивающий $|\partial V|$:



Следовательно, при $2k^2 + 5k + 3 < |V| \leqslant 2k^2 + 6k + 5 \quad |\partial V| = 4k + 8$. Доказательство теоремы 2 закончено.

1.1.2. Изопериметрическая задача в $\mathbb{Z}_n^2$

Зададим на множестве $\mathbb{Z}_n^2$ множество клеток следующим образом:

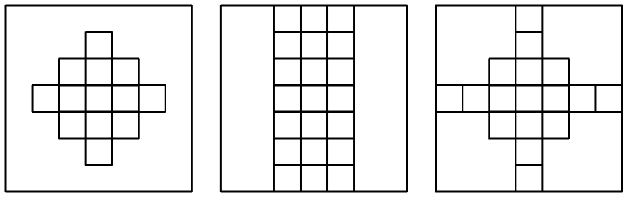
$$K = \{\mathbf{k} = \{(k_1, k_2), (k_1, k_2 + 1), (k_1 + 1, k_2), (k_1 + 1, k_2 + 1)\} : (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_n^2\}.$$

Клетку $\mathbf{k}$ обозначаем как одну из ее вершин — (k_1, k_2).

Теорема 3. $R_n \geqslant 2n - 1$.

Доказательство. Определим вид экстремальных конфигураций на торе. Когда v достаточно мало, то экстремальная конфигурация на торе будет совпадать с экстремальной конфигурацией на плоскости при таком же значении v. При росте v может произойти склейка конфигурации по одной размерности тора, что может дать экстремальную конфигурацию. При дальнейшем росте v может произойти склейка конфигурации по второй размерности тора, что также может дать экстремальную конфигурацию.

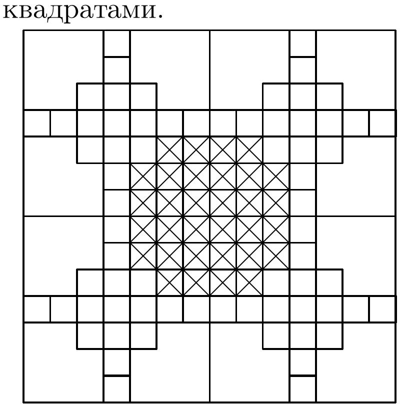
Таким образом, конфигурации V на торе, которые могут быть экстремальными, можно разделить на три вида: гомеоморфные кругу, кольцу и кресту (двум пересекающимся кольцам).



Рассмотрим эти варианты конфигурации. В первом случае, когда конфигурация гомеоморфна кругу, можно "разрезать" тор по линиям вне конфигурации V, получить часть плоскости $\mathbb{Z}^2$ и применить теорему 1, из которой следует, что $d_s = |\partial V| \geqslant 2\sqrt{2v-1}+2$.

Во втором случае, когда конфигурация гомеоморфна кольцу, то количество клеток $n \leqslant |V| \leqslant n^2 - n$, так как при $|V| < n$ получаем круг, а при $|V| > n^2 - n$ получаем крест. Очевидно, что $d_l = |\partial V| = 2n$ при $|V| < n^2 - n$ и $d_l = n$ при $|V| = n^2 - n$.

Найдем $|\partial V|$ для третьего случая, когда конфигурация гомеоморфна кресту. Разрежем тор по двум линиям между клетками так, чтобы крест можно было расположить на части плоскости $\mathbb{Z}^2$. Очевидно, что эта часть плоскости, содержащая крест, будет квадрат со стороной n. Замостим плоскость $\mathbb{Z}^2$ такими квадратами.



Рассмотрим множество клеток D (клетки в этой области помечены крестом, см. рис.). Удалим из этого множества клетки, которые не принадлежат ∂V. Обозначим мощность получившегося множества d_k. Очевидно, что $d_k = |\partial V|$. По теореме 1 $d_k \geqslant 2\sqrt{2(n^2 - v - d_k) - 1} + 2$, откуда получаем, что $d_k \geqslant 2\sqrt{2(n^2 - v) - 1} - 2$.

Рассмотрим конфигурацию V при $|V| = n^2 - n$. В этом случае возможно только два варианта расположения клеток: крест и кольцо. Сравним d_k и d_l в данном случае. $d_k = 2\sqrt{2(n^2 - n^2 + n) - 1} - 2 = 2\sqrt{2n-1} - 2$, $d_l = n$, $d_l - d_k = n - 2\sqrt{2n-1} + 2 \geqslant 0$ при любом значении n. Следовательно, при $|V| \geqslant n^2 - n$ экстремальная конфигурация V будет гомеоморфна кресту и $|\partial V| \geqslant 2\sqrt{2(n^2 - v) - 1} - 2$.

Рассмотрим конфигурацию V при $|V| < n^2 - n$. Найдем $v = |V|$, при которой $d_k \geqslant d_l$.

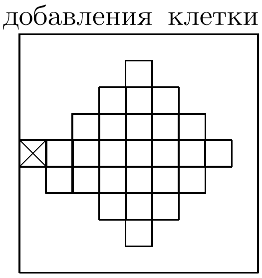
$$2\sqrt{2(n^2 - v) - 1} - 2 \geqslant 2n, \qquad n^2 - 2n - 2 \geqslant 2v, \qquad v \leqslant \frac{n^2}{2} - n - 1. \tag{1.1}$$

Сравним при $|V| \leqslant \dfrac{n^2}{2} - n - 1 \quad d_l$ и d_s.

Рассмотрим случай, когда n — нечетное число. Пусть $|V| = \dfrac{n^2}{2} - 2n + \dfrac{5}{2}$, $d_s \geqslant 2\sqrt{2(\frac{n^2}{2} - 2n + \frac{5}{2}) - 1} + 2 = 2n - 2, \quad d_l = 2n, \quad d_s < d_l$. Следовательно, экстремальная конфигурация V — круг.

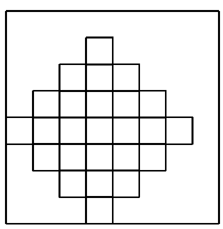
Пусть $\dfrac{n^2}{2} - 2n + \dfrac{5}{2} < |V| \leqslant \dfrac{n^2+1}{2}$. Как уже было показано выше (1.1), при $|V| = \dfrac{n^2+1}{2} > \dfrac{n^2}{2} - n - 1$ экстремальная конфигурация V — крест. $d_k \geqslant 2\sqrt{2(n^2 - \frac{n^2+1}{2}) - 1} - 2 = 2n - 2$.

Опишем процесс перехода от $|V| = \frac{n^2}{2} - 2n + \frac{5}{2}$ к $|V| = \frac{n^2+1}{2}$. Очевидно, что этот процесс аналогичен процессу, описанному при доказательстве теоремы 2, за исключением случая добавления клетки по следующему варианту:



В этом случае $|\partial V|$ не изменится. С учетом этого факта получаем, что при переходе от $|V| = \dfrac{n^2}{2} - 2n + \dfrac{5}{2}$ к $|V| = \dfrac{n^2+1}{2}$, $|\partial V|$ постоянна и равна $2n - 1$.

Рассмотрим случай, когда n — четное число. Пусть $|V| = \dfrac{n^2}{2} - n - 1$, так как при такой $|V|$ конфигурация гомеоморфная кругу приближается к кресту,



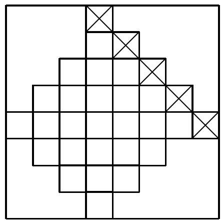
то надо из d_s дополнительно вычесть 2. Получим $d_s \geqslant 2\sqrt{2(\frac{n^2}{2} - n - 1) - 1} + 2 - 2 = 2n - 2, \quad d_l = 2n$. Следовательно, $d_s < d_l$ при $|V| \leqslant \dfrac{n^2}{2} - n - 1$.

Найдем $v = |V|$, при которой $d_k < 2n - 1$.

$$2\sqrt{2(n^2 - v) - 1} - 2 < 2n - 1, \qquad 4n^2 - 4n - 5 < 8v, \qquad v > \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{5}{8}.$$

При $|V| = \dfrac{n^2}{2} - n - 1$, $d_s = 2n - 2$. Рассмотрим процесс перехода от

$|V| = \dfrac{n^2}{2} - n - 1$ к $|V| = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n}{2} + 2$. Очевидно, что этот процесс аналогичен процессу перехода, описанному выше и дает прирост $|\partial V|$ только на 1.



Следовательно, при $\dfrac{n^2}{2} - n - 1 \leqslant |V| \leqslant \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n}{2} + 2 \quad |\partial V| = 2n - 1$.

Окончательно получаем, $R_n \geqslant \max\limits_{\forall v} |\partial V| = 2n - 1$. Доказательство теоремы 3 закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-00118.

Литература

[1] Bollobás, B. Combinatorics: set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability / B. Bollobás. – Cambridge University Press, 1986.

[2] Harper, L.H. On an isoperimetric problem for Hamming graphs / L.H. Harper // Discrete Applied Mathematics. – 1999. – 95. – P. 285–309.

[3] Slivnik, T. The exact isoperimetric inequality for ternary and quarternary cubes / T. Slivnik // Discrete Mathematics. – 2002. – 244. – P. 455–460.

[4] Carlson, T.A. The edge-isoperimetric problem for discrete tori / T.A. Carlson // Discrete Mathematics. – 2002. – 254. – P. 33–49.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

EXTREMAL NUMBERING $\mathbb{Z}_n^2$

© 2007 A.V. Martynov[2]

The exact isoperimetric inequality for special graph is obtained.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Martynov Alexey Vladimirovich (`prepodavatel@rambler.ru`), Dept. of Mathematical Analysis, Vladimir State Pedagogical University, Vladimir, 600024, Russia.