УДК 511.554

# ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

 Л.Н. Куртова[1]

Рассмотрен аналог аддитивной проблемы делителей. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения с квадратичными формами.

## Введение

В 1927 г. А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n;$$

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leqslant n. \tag{1}$$

Эти задачи получили название аддитивные проблемы делителей.

В 1931 г. Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

где $P_2(n)$ — многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

В 1979 г. Д.И. Исмоилов [2], развивая элементарный метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В 1979 году другим методом ту же оценку, но равномерно по параметру $k \leqslant n^{2/3}$, получил Хиз-Браун [3].

В 2006 г. Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [4] вывели новую оценку $R(n)$:

$$R(n) \ll n^{3/4}\ln^4 n.$$

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Нас заинтересовал один из таких аналогов.

Пусть $d$ — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, $\delta_F$ — дискриминант поля $F$, $Q_1(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_1\overline{m}$ и $Q_2(\overline{k}) =$

[1]Куртова Лилиана Николаевна (lmoskalenko@bsu.edu.ru), кафедра алгебры, теории чисел и геометрии Белгородского государственного университета, 308007, Россия, г. Белгород, ул. Студенческая, 14.

$= \frac{1}{2}\overline{k}^t A_2\overline{k}$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами $A_1$ и $A_2$, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$. Пусть

$$I(n) = \sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=1} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}.$$

Целью статьи является получение асимптотической формулы для суммы $I(n)$. Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть* $\varepsilon$ — *сколь угодно малое положительное число. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

*где* $G_1(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i\frac{lQ_1(\overline{m})}{q})$ *и* $G_2(q,-l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{k} \pmod q} \exp(-2\pi i\frac{lQ_2(\overline{k})}{q})$ — *двойные суммы Гаусса,* $\delta_F$ — *дискриминант мнимого квадратичного поля* $F$.

*Особый ряд* $\sum\limits_{q=1}^{\infty} q^{-4}\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})$ *положителен.*

Сумма $I(n)$ представляет собой число решений уравнения $Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k}) = 1$, причем каждое решение считается с "весом" $e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}$.

Теорема доказывается круговым методом с использованием оценок А. Вейля сумм Клостермана.

В работе будут использоваться следующие обозначения:

$d$ — отрицательное бесквадратное число;

$F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле;

$\delta_F$ — дискриминант поля $F$;

$\chi_1(n)$ — характер квадратичного поля $F$;

$Q(\overline{k}) = \frac{1}{2}\overline{k}^t A_1\overline{k}$ — бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма с матрицей $A_1$, $\det A_1 = -\delta_F$;

$G(q,u,\overline{n}) = \sum\limits_{\overline{k} \bmod q} \exp\left[\frac{2\pi i}{q}\left(uQ(\overline{k}) + \overline{n}^t\overline{k}\right)\right]$ — двойная сумма Гаусса, отвечающая форме $Q(\overline{k})$, $\overline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^2$;

$Q_1'(\overline{k})$ — квадратичная форма с матрицей $A_1^{-1}$;

$S(u,v,q) = \sum\limits_{\substack{1\leqslant l\leqslant q\\(l,q)=1}} e^{2\pi i\frac{ul+vl^*}{q}}$ — сумма Клостермана, где $ll^* \equiv 1 (\mathrm{mod} q)$;

$d(n)$ — число представлений $n$ в виде произведения двух множителей;

$\mu(n)$ — функция Мебиуса;

$\chi(\overline{m};\delta,\overline{0}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \overline{m} \equiv \overline{0} \pmod{\delta}, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$

$N = [\sqrt{n}]$.

## 1. Леммы

**Лемма 1.** (Вычисление двойной суммы Гаусса).
*Пусть* $(u,q)=1$, $uu^*\equiv 1 \pmod q$. *Справедливо равенство*

$$G(q,u,\overline{n}) = c_1(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))\chi_1(u)q\sqrt{(\delta_F,q)}\exp\left(-\frac{2\pi i}{q}c_2(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))u^*\right),$$

*где* $\chi_1$ — *характер квадратичного поля* $Q(\sqrt{d})$, *а* $c_1(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))$ *и* $c_2(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))$ — *целые числа такие, что*

$$0\leqslant \left|c_1(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))\right|\leqslant 1;$$

$$c_2(q,\overline{0},Q(\sqrt{d}))=0;$$

$$c_1(q,\overline{0},Q(\sqrt{d}))=0, \text{ если } 2\|q;$$

$$c_1(q,\overline{n},Q(\sqrt{d}))=0, \text{ если } 4\|q, d\equiv 2 \pmod 4.$$

*Доказательство* см. в [5].
**Лемма 2.** (Оценка суммы Клостермана).
*Пусть* $S(u,v,q)=\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{2\pi i\frac{ul+vl^*}{q}}$ — *сумма Клостермана, где* $ll^*\equiv 1 \pmod q$. *Справедлива оценка*

$$|S(u,v,q)|\leqslant d(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

*Доказательство* см. в [6].
**Лемма 3.** (Функциональное уравнение для тета-ряда).
*Пусть* $Im\tau>0$, $\overline{x}\in\mathbf{R}^2$, $\theta(\tau,\overline{x})=\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\tau Q(\overline{n}+\overline{x})}$. *Тогда*

$$\theta(\tau,\overline{x})=\frac{i}{\tau\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{\overline{n}\in\mathbf{Z}^2} exp(-\frac{\pi i}{\tau}\overline{n}^tA^{-1}\overline{n}+2\pi i\overline{n}^t\overline{x}).$$

*Доказательство* см. в [7, глава VI].
**Лемма 4.** *Пусть* $1\leqslant q\leqslant N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}}\frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx=\frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}}+O\left(qN\right).$$

*Доказательство.* Представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}}\frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx=I_1-I_2.$$

Интеграл $I_2$ оценим сверху

$$I_2 = \int\limits_{|x|>\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx = O\left(\int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right) = O(qN).$$

Вычислим интеграл $I_1$. Имеем (см., например, [8, глава VI])

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{\frac{1}{n^2}+t^2}dt = \frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}}.$$

Таким образом, лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *Пусть* $\delta_F$ *— дискриминант поля* $Q(\sqrt{d})$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} = \frac{\varphi(\delta)}{\delta}S(-1,0,q) + O(|\delta_F|\, q^{\varepsilon}),$$

*где* $\delta_F = \delta\delta_1, (\delta, q) = 1$.

*Доказательство.* Пусть $\delta_F = \delta\delta_1$, где $(\delta, q) = 1$, а $\delta_1$ — либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят $q$, тогда

$$S = \sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} = \sum_{\substack{l=0\\(l,\delta q)=1}} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Так как $\sum\limits_{d\backslash n}\mu(d) = 1$, если $n = 1$, то сумму $S$ можем переписать в виде

$$S = \sum_{\substack{l=0\\(l,\delta q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} \sum_{s\backslash(l,\delta q)} \mu(s).$$

В силу мультипликативности $\mu(s)$ и условия $(\delta, q) = 1$ будем иметь

$$S = \sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2) \sum_{\substack{l=0\\l\equiv 0 \pmod{s_1 s_2}}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Пусть $l = l_1 s_2$, $l_1 \equiv 0 \pmod{s_1}$, тогда

$$S = \sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2) \sum_{\substack{l_1=0\\l_1\equiv 0 \pmod{s_1}}}^{q_1-1} e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}},$$

где $q_1 = \dfrac{q}{s_2}$.

Если $l_1 \equiv 0 \pmod{s_1}$, то $\dfrac{1}{s_1}\sum\limits_{b=0}^{s_1-1} e^{-2\pi i\frac{bl_1}{q_1}} = 1$ и 0 в противном случае. Следовательно

$$S = \sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}}\frac{1}{s_1}\sum_{b=0}^{s_1-1} e^{-2\pi i\frac{bl_1}{q_1}}.$$

Выделим слагаемое $b=0$:

$$S=\sum_{s_1\backslash\delta}\frac{\mu(s_1)}{s_1}\left(\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}}\right)+\sum_{s_1\backslash\delta}\frac{\mu(s_1)}{s_1}\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{b=1}^{s_1-1}\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1},$$

где $\alpha=\dfrac{b}{s_1}-\dfrac{1}{q_1}$. Отсюда, так как

$$\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}}=\sum_{\substack{l_1=0\\(l_1,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l_1}{q}}=S(-1,0,q)\ \text{ и }\ \sum_{s_1\backslash\delta}\frac{\mu(s_1)}{s_1}=\frac{\varphi(\delta)}{\delta},$$

то получаем

$$S=\frac{\varphi(\delta)}{\delta}S(-1,0,q)+O\left(\sum_{s_1\backslash\delta}\frac{1}{s_1}\sum_{s_2\backslash q}\left|\sum_{b=1}^{s_1-1}\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1}\right|\right).$$

Оценим сумму по $l_1$:

$$\left|\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1}\right|\leqslant\min(q_1,\frac{1}{2\,||\alpha||}).$$

Отсюда если $q_1\leqslant 2\,|\delta_F|$, то $\left|\sum\limits_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1}\right|\leqslant q_1\leqslant 2\,|\delta_F|$. Если же $2\,|\delta_F|<q_1$, то, так как $1\leqslant b\leqslant s_1-1$,

$$||\alpha||=\left\|\frac{b}{s_1}-\frac{1}{q_1}\right\|\geqslant\left\|\frac{1}{s_1}-\frac{1}{q_1}\right\|\geqslant\frac{1}{2s_1}\geqslant\frac{1}{2\,|\delta_F|}.$$

Следовательно, в этом случае имеем $\left|\sum\limits_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1}\right|\leqslant\frac{1}{2||\alpha||}\leqslant|\delta_F|$.

Таким образом, получено неравенство

$$\left|\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\alpha l_1}\right|\leqslant 3\,|\delta_F|\,,$$

из которого заключаем, что

$$S=\frac{\varphi(\delta)}{\delta}S(-1,0,q)+O(|\delta_F|\,q^{\varepsilon})\,,$$

где постоянная в символе $O$ — абсолютная.

Лемма 5 доказана.

**Следствие 1.** *Пусть* $\delta_F$ *— дискриминант поля* $Q(\sqrt{d})$*. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}=O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

*Постоянная в символе* $O$ *зависит от* $\delta_F$.

*Доказательство* следует из лемм 2 и 5.

**Лемма 6.** *Пусть* $S'(-1,\nu,q) = \sum\limits_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{2\pi i\frac{-l+\nu l^*}{q}}$, *где* $ll^* \equiv 1 \pmod q$, $|\delta_F|$ *— дискриминант поля* $Q(\sqrt{d})$. *Тогда*

$$S'(-1,\nu,q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

*Постоянная в символе* $O$ *зависит от* $\delta_F$.

*Доказательство.* Запишем $S'(-1,\nu,q)$ в виде:

$$S'(h,\nu,q) = \sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{|\delta_F|(q-1)} e^{2\pi i\frac{-l+\nu l^*}{q}} \sum_{l_1=0}^{q-1} \frac{1}{|\delta_F|q} \sum_{\substack{b \bmod |\delta_F|q\\|b|\leqslant \frac{|\delta_F|q}{2}}} e^{2\pi i\frac{b(l_1-l)}{|\delta_F|q}}.$$

Поменяем порядок суммирования и оценим внутренние суммы отдельно. Имеем

$$S'(-1,\nu,q) = \frac{1}{|\delta_F|q} \sum_{\substack{b \bmod |\delta_F|q\\|b|\leqslant \frac{|\delta_F|q}{2}}} \left(\sum_{l_1=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{bl_1}{|\delta_F|q}}\right) \sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{|\delta_F|(q-1)} e^{2\pi i\frac{-(|\delta_F|+b)l+|\delta_F|\nu l^*}{|\delta_F|q}}.$$

Для суммы Клостермана $\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{|\delta_F|(q-1)} e^{2\pi i\frac{-(|\delta_F|+b)l+|\delta_F|\nu l^*}{|\delta_F|q}}$ справедлива оценка из леммы 2:

$$|S(-|\delta_F|-b, |\delta_F|\nu, |\delta_F|q)| \leqslant d(|\delta_F|q)|\delta_F|q^{1/2}(\nu,q)^{1/2}.$$

Для суммы $\sum\limits_{l_1=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{bl_1}{|\delta_F|q}}$ справедлива оценка:

$$\left|\sum_{l_1=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{bl_1}{|\delta_F|q}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\pi\frac{b}{|\delta_F|q}|} \leqslant \frac{|\delta_F|q}{|b|+1},$$

так как $\sin\pi\alpha \geqslant 2\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Объединив полученные оценки и считая, что $d(|\delta_F|q) \ll q^{\varepsilon}$, заключаем

$$S'(-1,\nu,q) \ll |\delta_F|q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\nu,q)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{b \bmod |\delta_F|q\\|b|\leqslant \frac{|\delta_F|q}{2}}} \frac{1}{|b|+1}.$$

Таким образом,

$$S'(h,\nu,q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где постоянная в символе $O$ зависит от $\delta_F$. Лемма 6 доказана.

## 2. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n) = \sum\limits_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=1} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}$ в виде интеграла

$$I(n) = \int\limits_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha}d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_1(\overline{m})}, \qquad S_2 = \sum_{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2} e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_2(\overline{k})}.$$

Пусть $N = [n]$, $\xi_{0,1} = [-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N})$. Разобьем промежуток $[-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру $N$(см. [9]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < < \frac{l'}{q'}$ — соседние дроби Фарея, $1 \leqslant l$, $q \leqslant N$, $q' \leqslant N$, $q'' \leqslant N$. Определим промежутки

$$\xi_{p,q} = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q(q+q')}\right].$$

Из свойств дробей Фарея следует, что

$$[-\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}) = \bigcup_{q=1}^{N} \bigcup_{\substack{p=0\\(p,q)=1}}^{q-1} \xi_{p,q},$$

причем $\xi_{p,q} \cap \xi_{p',q'} = \emptyset$ при $(p,q) \neq (p',q')$. Тогда

$$I(n) = \sum_{q\leqslant N} \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} \int\limits_{\xi_{p,q}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha}d\alpha =$$

$$= \sum_{q\leqslant N} \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} S_1(\frac{l}{q}+x)S_2(\frac{l}{q}+x)e^{-2\pi ix}dx. \qquad (2)$$

2. Преобразуем сумму $S_1(\frac{l}{q}+x) = \sum\limits_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\frac{l}{q}+2\pi ix)Q_1(\overline{m})}$, имеем

$$S_1(\frac{l}{q}+x) = \sum_{\overline{s} \bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\overline{s})} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\equiv\overline{s} \pmod q}} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi ix)Q_1(\overline{m})} =$$

$$= \sum_{\overline{s} \bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\overline{s})} \sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi ix)q^2Q_1(\overline{m}+\frac{\overline{s}}{q})} = \sum_{\overline{s} \bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\overline{s})}\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2, \frac{\overline{s}}{q}).$$

Используя лемму 3, функцию $\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2, \frac{\overline{s}}{q})$ перепишем в виде:

$$\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2, \frac{\overline{s}}{q}) = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}} \frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix} \sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}+2\pi i\frac{\overline{s}\overline{m}^t}{q}},$$

где, если $Q_1(\overline{s}) = \frac{1}{2}\overline{s}^tA_1\overline{s}$, $A_1$ — матрица размера $2\times 2$, то $Q_1'(\overline{s}) = \frac{1}{2}\overline{s}^tA_1^{-1}\overline{s}$.

Тогда для $S_1(\frac{l}{q}+x)$ справедливо равенство

$$S_1(\frac{l}{q}+x)=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2}e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}}\sum_{\overline{s}\bmod q}e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\overline{s})+2\pi i\frac{\overline{sm}^t}{q}}.$$

Выделим слагаемое $\overline{m}=\overline{0}$. Тогда $S_1(\frac{l}{q}+x)=\varphi_1+\Phi_1$, где

$$\varphi_1=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}G_1(q,l,\overline{0})$$

и

$$\Phi_1=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}}e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}}G_1(q,l,\overline{m}).$$

$G_1(q,l,\overline{m})$ — двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $Q_1$. Аналогично получаем тождество для $S_2(\frac{l}{q}+x)$:

$$S_2(\frac{l}{q}+x)=\varphi_2+\Phi_2,$$

где

$$\varphi_2=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}+2\pi ix}G_2(q,-l,\overline{0})$$

и

$$\Phi_2=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}+2\pi ix}\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}}e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{\frac{1}{n}+2\pi ix}}G_2(q,-l,\overline{k}),$$

где $G_2(q,-l,\overline{k})$ — двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $Q_2$.

3. Всилу (3) и представлений для функций $S_1(\frac{l}{q}+x)$ и $S_2(\frac{l}{q}+x)$ имеем

$$I(n)=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\leqslant N}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ix}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2},$$

$$I_2=\sum_{q\leqslant N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\varphi_1\Phi_2e^{-2\pi ix}dx,$$

$$I_3=\sum_{q\leqslant N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\varphi_2\Phi_1e^{-2\pi ix}dx,$$

$$I_4 = \sum_{q\leqslant N} \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \Phi_1\Phi_2 e^{-2\pi i x} dx.$$

Интеграл $I_1$ вычислим асимптотически, а интегралы $I_2, I_3, I_4$ оценим сверху.

Начнем с $I_1$. Разобьем интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$ на сумму интегралов

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} = \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_1 = I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3}.$$

4. Вычислим асимптотически $I_{1,2}$. В силу леммы 4 имеем

$$I_{1,2} = \frac{4\pi^2}{|\delta_F|} \sum_{q\leqslant N} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) (\frac{n}{2} e^{-\frac{1}{n}} + O(qN)) =$$

$$= \sum{}_1 + O(\sum{}_2).$$

Оценим вклад остатка $O(\sum{}_2)$. Так как $(l,q)=1$, то в силу леммы 1

$$G_1(q,l,\overline{0}) = c_{11}\chi_1(l) q\sqrt{(|\delta_F|,q)} \ \text{ и } \ G_2(q,-l,\overline{0}) = c_{12}\chi_1(-l) q\sqrt{(|\delta_F|,q)},$$

где $c_{11}$ и $c_{12}$ не зависят от $l$. Получаем

$$\sum{}_2 = \frac{4\pi^2 c_{11}c_{12}N}{|\delta_F|} \sum_{q\leqslant N} \frac{1}{q}(|\delta_F|,q) \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} \chi_1^2(l) e^{-2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Воспользуемся тем, что $\chi_1^2(l) = 1$, где $(l,|\delta_F|) = 1$. Переходим к неравенствам:

$$\sum{}_2 \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{q\leqslant N} \frac{1}{q} \sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Для внутренней суммы справедлива оценка из следствия 1:

$$\sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Тогда

$$\sum{}_2 \ll N^{1+\varepsilon_1} \sum_{q\leqslant N} q^{-\frac{1}{2}} \ll N^{\frac{3}{2}+\varepsilon_1}.$$

Учитывая, что $N = [\sqrt{n}]$, получаем вклад остатка:

$$\sum{}_2 = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Имеем

$$I_{1,2}=\frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})+O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon})+R,$$

где

$$R=\frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q>N}q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}).$$

Оценим сверху сумму $R$:

$$R\ll ne^{-\frac{1}{n}}\sum_{q>N}q^{-4}\left|\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})\right|.$$

Заменим суммы Гаусса их точными значениями из леммы 1, тогда

$$R\ll ne^{-\frac{1}{n}}\sum_{q>N}q^{-2}\left|\sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\right|.$$

Учитывая оценку из следствия 1, будем иметь

$$R\ll n^{1+\varepsilon}\sum_{q>N}q^{-\frac{3}{2}}\ll n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

Таким образом

$$I_{1,2}=\frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})+O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

5. Проведем оценку интеграла $I_{1,3}$.

Перейдем к неравенствам:

$$|I_{1,3}|\leqslant\frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\leqslant N}q^{-4}\left|\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})\right|\left|\int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ix}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right|.$$

Так как $q\leqslant N$, то

$$\left|\int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ix}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right|\ll\int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=O(qN).$$

Тогда

$$I_{1,3}=O(\sum\nolimits_2).$$

Оценка для суммы $\sum_2$ проводилась в пункте 4. Таким образом

$$I_{1,3}=O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Интеграл $I_{1,1}$ оценивается аналогично.

6. Рассуждения об оценках $I_2, I_3, I_4$ не сильно отличаются от $I_1$. Приведем полное доказательство для интеграла $I_4$:

$$I_4 = \sum_{q\leqslant N} \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \Phi_1\Phi_2 e^{-2\pi i x}dx.$$

Вместо $\Phi_1, \Phi_2$ подставим их значения, полученные в пункте 2. Имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\leqslant N} q^{-4} \int\limits_{\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{2\pi i x}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{\frac{1}{n}-2\pi i x}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{\frac{1}{n}+2\pi i x}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})\right).$$

Для начала оценим сумму

$$V = \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k}).$$

Для сумм Гаусса справедливы тождества

$$G_1(q,l,\overline{m}) = c_{11}\chi_1(l)q\sqrt{(\delta_F,q)}e^{-\frac{2\pi i}{q}c_{21}l^*} \text{ и } G_2(q,-l,\overline{k}) = c_{12}\chi_1(-l)q\sqrt{(\delta_F,q)}e^{\frac{2\pi i}{q}c_{22}l^*},$$

где постоянные $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{21}$, $c_{22}$ не зависят от $l$.

Полученную сумму $\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1} e^{2\pi i\frac{-l+(c_{22}-c_{21})l^*}{q}}$ оцениваем, используя лемму 6. В итоге имеем:

$$V \ll q^{\frac{5}{2}+\varepsilon}.$$

Разобьем интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$ на сумму интегралов

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} = \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}.$$

Оценим $I_{4,2}$:

$$|I_{4,2}| \leqslant \frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\leqslant N} q^{-4} \int\limits_0^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2 n)}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2 n)}}|V|.$$

Пусть $\theta$ — сколь угодно малое положительное число, тогда

$$|I_{4,2}| \leqslant \sum_{q\leqslant n^{1/2-\theta}} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}} + \sum_{q\leqslant n^{1/2-\theta}} \int\limits_{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}^{\frac{1}{qN}} + \sum_{n^{1/2-\theta}<q\leqslant N} \int\limits_0^{\frac{1}{qN}} =$$

$$= \sum{}_{41} + \sum{}_{42} + \sum{}_{43}.$$

В сумме $\sum_{41}$ так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}$, то

$$\left| \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}} \frac{dx}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2} \right| \ll \int\limits_0^{\frac{2\pi}{qn^{1/2+\theta}}} \frac{dt}{\frac{1}{n^2} + t^2} = O(n^{\frac{3}{2}-\theta} q^{-1}).$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на $q$:

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cn^{2l}}, \quad e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cn^{2l}}.$$

Так как оценка для суммы $V$ не зависит от $\overline{m}$ и $\overline{k}$, тогда

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} = O(e^{-cn^{2l}}), \quad \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} = O(e^{-cn^{2l}}).$$

Таким образом

$$\sum{}_{41} \ll n^{\frac{3}{2}-l+\varepsilon} e^{-cn^4 l} \sum_{q\leqslant n^{1/2-\theta}} q^{-\frac{5}{2}} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Перейдем к $\sum_{42}$.

$$\left| \int\limits_{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}^{\frac{1}{qN}} \frac{dx}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2} \right| \ll n \int\limits_{\frac{n^{1/2-\theta}}{q}}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = O(n^{\frac{1}{2}+\theta} q).$$

Теперь, так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}, \frac{1}{qn^{1/2+\theta}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{qN}$, то

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cQ_1'(\overline{m})}, e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cQ_1'(\overline{k})}.$$

Учтем оценку для суммы $V$, имеем:

$$\sum{}_{42} \ll n^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_1'(\overline{m})} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_2'(\overline{k})} \sum_{q\leqslant n^{1/2-\theta}} q^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_1'(\overline{m})} = O(1), \quad \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_2'(\overline{k})} = O(1),$$

то

$$\sum{}_{42} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Осталось оценить $\sum_{43}$. Здесь

$$\left|\int\limits_{0}^{\frac{1}{qN}} \frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right| \ll n\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = O(n).$$

Теперь, так как $q \leqslant N, x \leqslant \frac{1}{qN}$, то

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cQ_1'(\overline{m})}, \quad e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}} \leqslant e^{-cQ_1'(\overline{k})}$$

и соответственно

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_1'(\overline{m})} = O(1), \quad \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} e^{-cQ_2'(\overline{k})} = O(1).$$

Учтем оценку для суммы $V$, имеем:

$$\sum\nolimits_{43} \ll n^{1+\varepsilon}\sum_{n^{1/2-\theta}<q\leqslant N} q^{-\frac{3}{2}} \ll n^{1+\varepsilon}\sum_{q>n^{1/2-\theta}} q^{-\frac{3}{2}} \ll n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

Таким образом

$$I_{4,2} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Проведем оценку $I_{4,3}$. Так как $q \leqslant N$, то

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi ix}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right| \ll \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = O(qN).$$

Кроме того, при $q \leqslant N, x > \frac{1}{qN}$

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \left|e^{-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(\frac{1}{n}-2\pi ix)}}\right| = O(1), \quad \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \left|e^{-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(\frac{1}{n}+2\pi ix)}}\right| = O(1).$$

Тогда, с учетом оценки $V \ll q^{\frac{5}{2}+\varepsilon}$, заключаем, что

$$I_{4,3} \ll N^{1+\varepsilon}\sum_{q\leqslant N} q^{-\frac{1}{2}} \ll N^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

Так как $N = \left[\sqrt{n}\right]$, то $I_{4,3} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$.

Объединяем полученные для $I_4$ оценки, в итоге имеем:

$$I_4 = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

7. В силу проведенных выше рассуждений заключаем, что

$$I(n) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

## 3. Заключение

Для суммы $I(n) = \sum\limits_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=1} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}}$ получена асимптотическая формула:

$$I(n) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число, $G_1(q,l,\overline{0})$ и $G_2(q,-l,\overline{0})$ — двойные суммы Гаусса, $\delta_F$ — дискриминант мнимого квадратичного поля $F$.

Данный результат соответствует оценке Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова, но уравнение, для которого ищется число решений, имеет общий вид, а именно $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$.

## Литература


[1] Esterman, T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten / T. Esterman // J. reine und ang. Math. – 1931. – № 164. – P. 173–182.

[2] Исмоилов, Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений / Д.И. Исмоилов // Докл. АН ТаджССР. – 1979. – Т. 22. – № 2. – С. 75–79.

[3] Heath-Brown, D.R. The fourths power moment of the Riemann zeta-function / D.R. Heath-Brown // Proc. London Math. Soc. – 1979. – V. 38. – № 3. – P. 385–422.

[4] Архипов, Г.И. Об аддитивной проблеме делителей Ингама / Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2006. – № 5. – С. 32–35.

[5] Гриценко, С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле / С.А. Гриценко // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 53-67.

[6] Estermann, T. On Klostermann's sum / T. Estermann // Mathematika. – 1961. – № 8. – P. 83-86.

[7] Ogg, A.P. Modular Forms and Dirichlet Series / A.P. Ogg. – N.-Y.: W.A. Benjamin, Inc., 1969. – 211 p.

[8] Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студентов механических специальностей механико-математических факультетов государственных университетов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 678 с.

[9] Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Изд. технич. литер., 1952. – 112 с.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

# ON A BINARY ADDITIVE PROBLEM WITH QUADRATIC FORMS

 L.N. Kurtova[2]

An analog of additive problem of divisors is considered. An asymptotic formula for the number of solutions of the equation involving quadratic forms is given.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Kurtova Liliana Nikolaevna (lmoskalenko@bsu.edu.ru), Dept. of Algebra, Number Theory and Geometry, Belgorod State University, Belgorod, 308007, Russia.