УДК 512.7

АФФИННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

© 2007 Ю.Ю. Крутиков[1]

Для всякого трехмерного алгебраического k-тора T, мы находим минимальное натуральное $n(T)$, для которого существует регулярное вложение T в $GL_{n(T),k}$. Мы описываем это вложение и получаем реализацию T как аффинного многообразия в $\mathbb{A}_n^{n(T)}$.

1. Линейные алгебраические группы, алгебраический тор

Данный раздел носит вводный характер и содержит все необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории алгебраических групп и, в частности, из теории основного объекта исследования данной статьи — алгебраических торов. За основу изложения взят цикл статей [2]. Напомним некоторые общие сведения об алгебраических группах. В данной работе исследуются алгебраические группы, а именно трехмерные алгебраические торы, определенные над незамкнутым полем k. Если зафиксировать какую-нибудь группу G_0, определенную над $\overline{k}$, мы можем рассмотреть все группы G, определенные над полем k и изоморфные G_0 над $\overline{k}$. Более точно, рассмотреть k-группы G с условием $G \otimes_k \overline{k} \cong G_0$. Такие группы G называются *k-формами* группы G_0. Типичным примером служат алгебраические торы. Всякий тор над $\overline{k}$ является диагональной группой $D(n)$, однозначно определенной размерностью тора (в нашем случае $n = 3$). Группы более сложной геометрии являются следствием именно незамкнутости поля k. Формы T группы $D(n)$ определяются одномерными когомологиями Галуа группы Галуа $\mathcal{G} = Gal(k_s/k)$ со значениями в группе $GL(n, \mathbb{Z})$, здесь k_s — сепарабельное замыкание поля k. Очевидно, что описание k-форм тора $D(n)$ с ростом размерности n становится весьма нелегкой задачей. В ситуации незамкнутого поля очень удобна теория схем Гротендика. В основном нам понадобится лишь часть этой огромной области, а именно, теория аффинных схем. Приведем для удобства читателя ряд важных результатов из области групповых схем.

[1]Крутиков Юрий Юрьевич (yuri@magices.com), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Пусть S — схема [7], G — групповая S-схема. Это означает, что мы имеем три морфизма

$$\begin{array}{ll} m: & G\times_S G \longrightarrow G, \\ i: & G \longrightarrow G, \\ e: & S \longrightarrow G, \end{array}$$

называемых морфизмами умножения, обращения и единицы соответственно и удовлетворяющих стандартным аксиомам ассоциативности, свойствам обратного элемента, свойствам единицы. Если T — произвольная S-схема, то множество $G(T)$ является обычной группой и схема G представляет функтор $T \mapsto G(T)$. Пусть теперь R — коммутативное кольцо с единицей и $S = Spec\,R$. Групповая S-схема G называется *аффинной* S-группой, или R-группой, если $G = Spec\,A$, где A есть R-алгебра. Групповая структура аффинной R-группы $G = Spec\,A$ полностью описывается в терминах ее кольца A. Морфизмам m, i, e соответствуют гомоморфизмы R-алгебр

$$\begin{array}{lll} m^*: & A \longrightarrow A\otimes_R A & \text{(коумножение)}, \\ i^*: & A \longrightarrow A & \text{(кообращение)}, \\ e^*: & A \longrightarrow R & \text{(коединица)}, \end{array}$$

которые удовлетворяют соответствующим аксиомам, полученным по двойственности из аксиом умножения. Алгебра A с операциями m^*, i^*, e^*, удовлетворяющими аксиомам когруппы, называется *алгеброй Хопфа.* Вопросы классификации аффинных R-групп и R-алгебр Хопфа равносильны.

Пример 1. Мультипликативная группа G_m.
Пусть $G_m(B) = B^*$, где B^* — мультипликативная группа обратимых элементов кольца B. Функтор G_m представим аффинной схемой $Spec\,\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, ибо $Hom_{ring}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], B) = B^*$. Когрупповые операции:

$$\begin{array}{rcl} m^*(T) & = & T\otimes T, \\ e^*(T) & = & T^{-1}, \\ i^*(T) & = & 1. \end{array}$$

Аффинная группа G_m называется *мультипликативной группой.* Имеем матричное представление

$$G_m(B) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{array} \right) \middle|\, b\in B^* \right\}.$$

Пример 2. Полная линейная группа GL_n. Рассмотрим функтор $GL_n(X)$. Этот функтор представим аффинной схемой

$$GL_n = Spec\,\mathbb{Z}[T_{11}, \dots, T_{nn}, D^{-1}],\quad D = \det(T_{ij}),$$

$$\begin{array}{l} m^*(T_{ij}) = \sum T_{ik}\otimes T_{kj}, \\ e^*(T_{ij}) = \delta_{ij}, \\ i^*(T_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{-1}\det(T_{rs}),\quad r\neq i,\ s\neq j. \end{array}$$

Нас будут интересовать k-группы, где k — поле. Наиболее изучены в этой категории *алгебраические* группы, то есть гладкие групповые k-схемы конечного типа над k.

Пример 3. Диагональные группы. Пусть M — коммутативная абстрактная группа, $\mathbb{Z}[M]$ — ее групповое кольцо. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-схему $D(M) = Spec\,\mathbb{Z}[M]$. Изучим группу точек $D(M)(R)$ для любого коммутативного кольца R с единицей. Используя определение группового кольца, получаем

$$D(M)(R) = Hom_{ring}(\mathbb{Z}[M], R) = Hom_{gr}(M, R^*).$$

Очевидно, что множество $D(M)(R)$ обладает структурой коммутативной группы, причем последняя функториальна по R. Таким образом, схема $D(M)$ является коммутативной групповой схемой. Группа $D(M)$ называется *диагональной* группой. Групповые операции в группе $D(M)$ на языке алгебры Хопфа $\mathbb{Z}[M]$ выглядят следующим образом:

$$m^*(g) = g \otimes g, \quad e^*(g) = 1, \quad i^*(g) = g^{-1}, \quad g \in M.$$

Пусть $f : M \longrightarrow N$ — гомоморфизм абелевых групп, он продолжается до гомоморфизма абелевых колец $f : \mathbb{Z}[M] \longrightarrow \mathbb{Z}[N]$. Гомоморфизм f, в свою очередь, определяет групповой гомоморфизм схем $D(f) : D(N) \to D(M)$. Таким образом, соответствие $M \longrightarrow D(M)$ есть контравариантный функтор из категории абелевых групп в категорию групповых аффинных схем. Очевидно, что $D(M \times N) = D(M) \times D(N)$.

Замечание. Мультипликативная группа G_m есть частный случай диагональной группы, а именно, $G_m = D(\mathbb{Z})$, где группу $\mathbb{Z}$ рассматриваем в мультипликативной записи с образующим элементом t. Если $M \cong \mathbb{Z}^n$, то $D(M) = D(\mathbb{Z}^n) = G_m^n$.

Пусть G — произвольная групповая S-схема. Рассмотрим коммутативную группу

$$\hat{G}(S) = Hom_{S-gr}(G_S, G_{m,S}).$$

Назовем эту группу *группой S-характеров группы G*. Для всякого морфизма $u : T \longrightarrow S$ имеем гомоморфизм групп $\hat{G}(u) : \hat{G}(S) \longrightarrow \hat{G}(T)$. Получаем контравариантный функтор $\hat{G}$ из категории групповых схем в категорию коммутативных абстрактных групп. Пусть $f : G_1 \longrightarrow G_2$ — гомоморфизм групповых схем. Тогда мы имеем однозначно определенный гомоморфизм коммутативных абстрактных групп $\hat{f} : \hat{G}_2(S) \longrightarrow \hat{G}_1(S)$. Заметим также, что $(\widehat{G_1 \times G_2})(S) = \hat{G}_1(S) \times \hat{G}_2(S)$.

Теперь мы можем определить основной объект исследования в данной работе — алгебраический тор.

Определение. Групповая k-схема T называется алгебраическим тором, если

$$T \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(\mathbb{Z}^n) = G^n_{m,\bar{k}}. \tag{1}$$

Другими словами, алгебраический тор есть k-форма диагональной группы $D_{\bar{k}}(\mathbb{Z}^n)$ с $\mathcal{G}$-модулем рациональных характеров $\hat{T} = \mathbb{Z}^n$. Категория k-торов дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения. Условие разложения тора (1) выполняется на конечном уровне, то есть существует конечное расширение Галуа L/k такое, что $T \otimes_k L \cong G^n_{m,\ L}$. Поле

L называется *полем разложения* тора. Пересечение всех полей разложения называется *минимальным полем разложения* тора T. Пусть L — минимальное поле разложения тора T, тогда $T \otimes_k L = D_L(\mathbb{Z}^n)$, где $\mathbb{Z}^n$ есть П-модуль, $\Pi = Gal(L/k)$, и действие группы П определяется представлением $h : \mathcal{G} \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}^n)$. Алгебра Хопфа тора T совпадает с $A = (L[\mathbb{Z}^n])^\Pi$. Тор T как аффинная k-схема представляется в виде $T = Spec(L[\mathbb{Z}^n])^\Pi$. Следуя этому определению, тор задается двумя объектами: расширением Галуа L/k с группой Галуа $\Pi = Gal(L/k)$ и П-модулем $\widehat{T}$, что эквивалентно заданию целочисленного представления группы П, то есть реализации П матрицами из $GL(n, \mathbb{Z})$.

Пример 4. Важную роль в теории алгебраических торов играют так называемые *квазиразложимые* торы, то есть торы, у которых $\widehat{T}$ является пермутационным П-модулем. Пусть П действует на базисе $\widehat{T}$ транзитивно. В этом случае тор обозначается как $R_{F/k}(G_m)$, где F/k — промежуточное расширение степени d, $R_{F/k}$ — функтор ограничения Вейля. В общем случае квазиразложимый тор является прямым произведением таких торов. Пусть $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_d$ — базис $\widehat{T}$. Предположим, что орбита $O(\chi_1) = \{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_d\}, \Pi_1 = Stab(\chi_1), F = L^{\Pi_1}$, и пусть $e_1, e_2, ..., e_d$ — k-базис F как векторного пространства, дополняемый элементами $e_{d+1}, e_{d+2}, ..., e_n$ до базиса L/k. Для произвольного тора, вследствие того, что $L \otimes_k k[T] = L[\widehat{T}]$, любой элемент $\chi \in L[\widehat{T}]$ представим в следующем виде:

$$\chi = f_1 e_1 + f_2 e_2 + ... + f_n e_n, f_i \in k[T], \ \ i = 1, ..., n,$$

в частности

$$\chi_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_d e_d, x_i \in k[T], \ \ i = 1, ..., d.$$

В статье [5] доказано, что для квазиразложимого тора кольцо регулярных функций $k[T]$ имеет вид

$$k[T] = k[x_1, \ x_2, \ ..., \ x_d, \ y^{-1}], \tag{2}$$

где $y = f(x_1, x_2, ..., x_d)$ — норменный многочлен расширения F/k. Как видно из (2), простейший квазиразложимый тор можно рассмотреть как открытое подмножество в $\mathbb{A}^d_k$, также этот тор является максимальным тором в группе $GL_{d,k}$.

2. Задача оптимизации

Всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения: k — основное поле, T или T_i — алгебраический k-тор, L — минимальное поле разложения тора, $\Pi = Gal(L/k)$, $\widehat{T}$ или $\widehat{T_i}$ — группа характеров тора.

Алгебраический тор как линейную алгебраическую группу можно вложить в $GL_{n,k}$ для подходящего n, то есть рассмотреть регулярное вложение

$$\phi : T \hookrightarrow GL_{n,k}.$$

Тогда T можно рассматривать как подгруппу в общей линейной группе, а следовательно, существует максимальный тор S в $GL_{n,k}$, содержащий T, то есть вложение T в $GL_{n,k}$ пропускается через S. Известно [3], что $\dim\ S = n$ и S является квазиразложимым k-тором. Это вложение по двойственности равносильно существованию эпиморфизма $\phi^* : \widehat{S} \to \widehat{T}$, где $\widehat{S}$ — пермутационный П-модуль. Таким образом, вычислительные аспекты теории алгебраических торов диктуют постановку следующей **задачи оптимизации**:

Для данного k-тора T найти наименьшее значение $n = n(T)$ такое, что существует вложение T в $GL_{n,k}$.

В силу рассуждений выше эта задача может быть переформулирована следующим образом:

Для данного П-модуля $\widehat{T}$ найти наименьшее значение n, такое что $\widehat{T}$ допускает эквивариантное накрытие пермутационным П-модулем ранга n.

Мы получили полное решение данной задачи для трехмерных торов, этому посвящена первая часть настоящей работы.

Заметим, что в случае рассмотренных выше квазиразложимых k-торов $n(T) = \dim T$.

3. Решение задачи оптимизации для трехмерных алгебраических торов

Одномерные и двумерные торы являются хорошо изученными объектами (см. [3]). В частности, поставленная выше задача оптимизации для них решена, хотя и не была выделена как самостоятельная проблема. Бирациональная геометрия трехмерных торов изучалась в работах В.Е. Воскресенского, Б.Э. Кунявского, С.Ю. Попова. Но задача оптимизации для них не решалась. Мы будем рассматривать только те трехмерные торы, которые не представимы в виде прямого произведения торов меньшей размерности, то есть их модули рациональных характеров неразложимы. Известно, что получить все конечные подгруппы в $GL(3,\mathbb{Z})$ можно следующим образом: в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ выберем ортонормированный базис $e_1,\ e_2,\ e_3$. Тогда можно рассмотреть 3 стандартных решетки в $\mathbb{R}^3$, введенные в [1]: $L_0 =< e_1,\ e_2,\ e_3 >$, $L_1 =< e_1+e_2,\ e_1+e_3,\ e_1-e_2 >$, $L_2 =< 1/2(e_1+e_2+e_3),\ 1/2(-e_1-e_2+e_3),\ 1/2(e_1-e_2-e_3) >$. Рассмотрим группу симметрий координатного октаэдра. Известно, что эта группа 48 порядка, изоморфная $S_4\times\mathbb{Z}_2$. Группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^3$ естественно действует на всех трех решетках. Вычисляя матрицы операторов из группы октаэдра в базисах всех трех решеток, получаем 3 максимальные подгруппы в $GL(3,\mathbb{Z})$ (см. [6]). Остальные конечные неразложимые подгруппы в $GL(3,\mathbb{Z})$ являются подгруппами найденных. Известно (работа К. Тахары [8]), что существует 73 конечных попарно несопряженные подгруппы в $GL(3,\mathbb{Z})$. В работе Б.Э. Кунявского [4] были выделены из них все неразложимые — таких

Таблица 1

Тор	Образующие группы	Обозначение Тахары	Тор	Образующие группы	Обозначение Тахары
T_1	$\mathbb{Z}_3 \cong < g_1 >$	W_2	T_{18}	$D_6 \cong < -g_1, g_6 >$	W_8
T_2	$\mathbb{Z}_4 \cong < g_2 >$	W_3	T_{19}	$A_4 \cong < g_1, g_8 >$	W_9
T_3	$\mathbb{Z}_4 \cong < -g_2 >$	W_4	T_{20}	$A_4 \cong < g_1, g_9$	W_{10}
T_4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, g_4 >$	W_{12}	T_{21}	$A_4 \cong < g_1, g_{10} >$	W_{11}
T_5	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, -g_4 >$	W_{13}	T_{22}	$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_2, -g_7, g_0 >$	W_2
T_6	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, g_5 >$	W_{14}	T_{23}	$A_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_1, g_8, g_0 >$	W_1
T_7	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, -g_5 >$	W_{15}	T_{24}	$A_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_1, g_9, g_0 >$	W_2
T_8	$\mathbb{Z}_6 \cong < -g_1 >$	W_4	T_{25}	$A_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_1, g_{10}, g_0 >$	W_3
T_9	$S_3 \cong < g_1, g_6 >$	W_9	T_{26}	$S_4 \cong < g_{11}, -g_7 >$	W_6
T_{10}	$S_3 \cong < g_1, -g_6 >$	W_{10}	T_{27}	$S_4 \cong < -g_{11}, g_7 >$	W_7
T_{11}	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_2, g_0 >$	W_2	T_{28}	$S_4 \cong < g_{12}, -g_{13} >$	W_8
T_{12}	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, g_4, g_0 >$	W_5	T_{29}	$S_4 \cong < -g_{12}, g_{13} >$	W_9
T_{13}	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_3, g_5, g_0 >$	W_6	T_{30}	$S_4 \cong < g_{14}, g_{10} >$	W_{10}
T_{14}	$D_4 \cong < g_2, -g_7 >$	W_{11}	T_{31}	$S_4 \cong < -g_{14}, -g_{10} >$	W_{11}
T_{15}	$D_4 \cong < g_2, g_7 >$	W_{12}	T_{32}	$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_{11}, -g_7, g_0 >$	W_1
T_{16}	$D_4 \cong < -g_2, -g_7 >$	W_{13}	T_{33}	$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_{12}, -g_{13}, g_0 >$	W_2
T_{17}	$D_4 \cong < -g_2, g_7 >$	W_{14}	T_{34}	$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong < g_{14}, -g_{10}, g_0 >$	W_3

всего 34. Воспользуемся результатами Тахары и Кунявского и перечислим все рассматриваемые нами трехмерные торы (в удобных нам обозначениях):

$$g_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_{10} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ g_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ g_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ g_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что приведенная в табл. 1 нумерация торов будет сохраняться до конца данной работы.

Перейдем к решению задачи оптимизации для трехмерных торов. В качестве "первого приближения" найдем какой-то пермутационный модуль, эквивариантно накрывающий $\widehat{T}$ для тора T. Пусть χ_1, χ_2, χ_3 — базис $\widehat{T}$.

Рассмотрим орбиты $O(\chi_i) = \{\xi_{1i} = \chi_i,\ \xi_{2i},\ \dots,\ \xi_{m_i i}\}$, $i = 1,2,3$. Для фиксированного i рассмотрим свободную абелеву группу $< f_{1i},\ f_{2i},\ \dots,\ f_{m_i i} >$, на которой П действует по правилу $\sigma(f_{ji}) = f_{ki}$, где $\sigma(\xi_{ji}) = \xi_{ki}$. Прямая сумма таких пермутационных П-модулей и есть искомое "первое приближение". Ранг найденного модуля обозначим n'. Для поиска возможного улучшения накрытия рассмотрим естественное вложение решетки характеров $\mathbb{Z}^3$ в $V = \mathbb{R}^3$ и продолжим действие П на линейное пространство V. Рассмотрим подгруппы H в П такие, что $|H| > |\Pi|/n'$. Для каждой такой подгруппы определим инвариантное подпространство V^H. Элементы этого подпространства обладают тем свойством, что длины их орбит под действием группы П меньше n'. В качестве базиса V^H возьмем базис подгруппы $\mathbb{Z}^3 \bigcap V^H$. Запишем любой элемент этого подпространства как линейную комбинацию базисных элементов с не более чем тремя вещественными параметрами. Выпишем его орбиту, элементы которой будут зависеть от тех же параметров. Далее выберем объединения орбит, сумма длин которых меньше n'. Для каждого объединения проверим, порождают ли элементы объединения решетку $\widehat{T}$. Для этого выпишем матрицу, состоящую из элементов объединяемых орбит, и, рассматривая ее миноры 3 порядка, ищем минор, равный ± 1, что приводит нас к решению уравнений в целых числах. Если решение есть, то мы получаем улучшение n' и нижняя граница улучшений и дает ответ. Все эти рассуждения приводят нас к следующему алгоритму решения поставленной задачи.

Алгоритм решения задачи оптимизации.

1) Построить накрытие $\widehat{T}$, получающееся из орбит базисных элементов. Длину орбиты или сумму длин орбит обозначаем n'.

2) Для подгрупп $H \subset \Pi : |H| > |\Pi|/n'$ определить V^H, выписать общий элемент V^H и его орбиту.

3) Проверить, порождают ли объединения орбит решетку $\widehat{T}$, при условии что сумма длин объединяемых орбит меньше n'.

4) По результатам проверки 3) сделать вывод.

Заметим, что при решении задачи оптимизации использовалась аддитивная запись П-модуля $\widehat{T}$. Продемонстрируем работу алгоритма на следующем примере.

Пример 5. Рассмотрим тор T_5 из нашего списка (см. Таблицу 1). Выпишем группу П:

$$\Pi =< g_3, -g_4 >= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3$ — базисные элементы группы характеров $\widehat{T}$.

1. Рассмотрим орбиты $O(\chi_2) = \{\chi_2,\ \chi_3\}$ и $O(\chi_1) = \{\pm\chi_1,\ \pm(\chi_1 - \chi_2 + \chi_3)\}$. Модуль, накрывающий $\widehat{T}$ выглядит так: $\widehat{S} =< f_{\pm 1},\ f_{\pm 4} > \bigoplus < f_2,\ f_3 >$, где накрывающий гомоморфизм задается на базисе $\widehat{S}$ так $f_{\pm 1} \mapsto \pm\chi_1,\ f_{\pm 4} \mapsto \pm(\chi_1 - \chi_2 + \chi_3),\ \ f_2 \mapsto \chi_2,\ \ f_3 \mapsto \chi_3$. Получаем $n' = 6$.

2. Возможные варианты H: $H_1 =< g_3 >,\ H_2 =< -g_4 >,\ H_3 =< -g_3 g_4 >$,

$H_4 = \Pi$. Имеем следующие инвариантные подпространства: $V^{H_1} = V^{H_4} = \,<(0,\ \alpha_1,\ \alpha_1)>$, $V^{H_2} = \,<(\alpha_2-\beta_2,\ \beta_2,\ \alpha_2)>$, $V^{H_3} = \,<(0,\ \alpha_3,\ \beta_3)>$. Соответствующие орбиты

$O_1 = O(0,\ \alpha_1,\ \alpha_1) = \{(0,\ \alpha_1,\ \alpha_1)\}$,

$O_2 = O(\alpha_2-\beta_2,\ \beta_2,\ \alpha_2) = \{(\alpha_2-\beta_2,\ \beta_2,\ \alpha_2),\ (-\alpha_2-\beta_2,\ \alpha_2,\ -\beta_2)\}$,

$O_3 = O(0,\ \alpha_3,\ \beta_3) = \{(0,\ \alpha_3,\ \beta_3),\ (0,\ \beta_3,\ \alpha_3)\}$.

3. Рассмотрим $O_1 \bigcup O_2$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2-\beta_2 & -\alpha_2-\beta_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель равен 0. Также в случае $O_1 \bigcup O_3$. Рассмотрим $O_2 \bigcup O_3$:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_2-\beta_2 & -\alpha_2-\beta_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Поиск минора приводит к уравнению

$$(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_3^2-\beta_3^2) = 1.$$

Имеем решение в целых числах: $\alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 1$.

4. Так как есть решение, следовательно $n(T) = 4$, а модуль, накрывающий $\widehat{T}$, имеет вид: $\widehat{S} =\, <f_1,\ f_4> \bigoplus <f_2,\ f_3>$, где накрывающий гомоморфизм задается так: $f_1 \mapsto \chi_1+\chi_3,\ \ f_4 \mapsto -\chi_1+\chi_2,\ \ f_2 \mapsto \chi_2,\ \ f_3 \mapsto \chi_3$.

Следуя описанному алгоритму, были рассмотрены все торы из табл. 1. Принималось во внимание, что если на первом шаге мы получали накрывающий модуль ранга 3 или 4, то он и давал ответ. Отметим, что во всех случаях, кроме тора T_5, если и рассматривались уравнения, то они не имели решения в целых числах и ответом являлось n'.

Результаты вычислений позволяют сделать вывод, что справедлива следующая

Теорема. *Для неразложимых трехмерных алгебраических торов T наименьшее значения $n(T)$, для которого существует регулярное вложение*

$$\phi : T \hookrightarrow GL_{n(T),\ k}$$

определяется следующей таблицей (используем нумерацию торов из табл. 1)

Таблица 2

Торы	$n(T)$
$T_1,\ T_{10}$	3
$T_2,\ T_3,\ T_5,\ T_6,\ T_7,\ T_{15},\ T_{16},\ T_{20},\ T_{29}$	4
$T_8,\ T_9,\ T_{18},\ T_{19},\ T_{23},\ T_{26},\ T_{27},\ T_{32}$	6
$T_4,\ T_{11},\ T_{12},\ T_{13},\ T_{14},\ T_{17},\ T_{22},\ T_{24},\ T_{28},\ T_{33}$	8
$T_{21},\ T_{25},\ T_{30},\ T_{31},\ T_{34}$	12

4. Аффинная реализация произвольного тора

Применим полученные результаты к решению следующей проблемы: для данного трехмерного алгебраического k-тора найти его аффинное представление как подмногообразия в $\mathbb{A}^{n(T)}$. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \widehat{N} \xrightarrow{\beta} \widehat{S} \xrightarrow{\alpha} \widehat{T} \to 0,$$

где α — эквивариантное накрытие, найденное при решении задачи оптимизации. Эта последовательность, в свою очередь, индуцирует по двойственности следующую точную последовательность алгебраических торов

$$1 \to T \xrightarrow{\alpha_L^*} S \xrightarrow{\beta_L^*} N \to 1,$$

где S и N — торы, с группами характеров $\widehat{S}$ и $\widehat{N}$, соответственно. Напомним, что S является открытым подмножеством в $\mathbb{A}^{n(T)}$. В [5] доказано, что идеал тора T, то есть $Ker\beta_L^*$, как аффинного многообразия в $\mathbb{A}^{n(T)}$ порождается элементами $\xi_i - 1$, где ξ_i — базисные элементы $Ker\alpha$. В результате мы можем записать искомый тор так:

$$T = ker(S \xrightarrow{\beta_L^*} N).$$

Таким образом, метод нахождения аффинного представления тора T заключается в следующем:

1. Находим пермутационный П-модуль $\widehat{S}$, который накрывает группу характеров искомого тора $\widehat{T}$, определяем α (полностью аналогично решению задачи оптимизации в пункте 3).

2. Находим ядро $\widehat{N}$ отображения α, определяем вложение β.

3. Пользуясь двойственностью, определяем искомый тор как ядро отображения β_L^*, то есть фактически описываем уравнения, задающие T в $\mathbb{A}^{n(T)}$.

Самым простым примером записи тора в таком виде является норменный тор. По определению он задается так:

$$T = ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/k}} G_m\right),$$

где L/k — расширение степени $d+1$, $N_{L/k}$, как и всюду далее, — норменное отображение. Такой тор является подгруппой в $GL_{d+1,k}$ и обозначается $R^1_{L/k}(G_m)$. Заметим, что задача оптимизации дает для норменного тора ответ $n(T) = \dim T + 1$.

Рассмотрим пример работы алгоритма, а затем представим результаты для всех торов из табл. 1.

Пример 6. Рассмотрим тор T_4. Выпишем группу Π:

$$G =< g_3, g_4 >= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

В данном случае $\widehat{T_4} =< \chi_1, \ \chi_2, \ \chi_3 >$ накрывается прямой суммой двух пермутационных модулей $\widehat{S_1} =< f_{\pm 1}, \ f_{\pm 4} >$ и $\widehat{S_2} =< f_{\pm 2}, \ f_{\pm 3} >$, где накрывающий гомоморфизм α задается так $f_{\pm 1} \mapsto \chi_1^{\pm 1}, \ f_{\pm 2} \mapsto \chi_2^{\pm 1}, \ f_{\pm 3} \mapsto \chi_3^{\pm 1}, \ f_{\pm 4} \mapsto (\chi_1 \chi_2^{-1} \chi_3)^{\pm 1}$. Порождающие элементы ядра $\widehat{N}$ отображения α такие:

$$\xi_i \xi_{-i}, \ \ i = 1, 2, 3, 4, \xi_1 \xi_{-2} \xi_3 \xi_{-4}. \tag{3}$$

Пусть $F_2^{(1)} = L^{<g_3>}$, $F_2^{(2)} = L^{<g_3 g_4>}$, $F_2^{(3)} = L^{<g_4>}$, здесь $F_2^{(j)}/k$ — нормальные расширения степени 2, j=1, 2 или 3. Действие Π на элементах $f_1, \ f_1 f_{-1}$ и $f_2, \ f_2 f_{-2}$ показывает, что решеткам $\widehat{S_1}$ и $\widehat{S_2}$ соответствуют торы, полученные из норменных путем ограничения основного поля — $R_{F_2^{(1)}/k}(R^1_{L/F_2^{(1)}}(G_m))$ и $R_{F_2^{(2)}/k}(R^1_{L/F_2^{(2)}}(G_m))$. Рассмотрим теперь $f = f_1 f_{-2} f_3 f_{-4}$ — элемент ядра $\widehat{N}$: $g_3(f) = f^{-1}, \ g_4(f) = f, g_3 g_4(f) = f^{-1}$, следовательно, $\widehat{N}$ соответствует тору $R^1_{F_3^{(2)}/k}(G_m)$. Найдем β_L^*. Так как

$$f_1 f_{-2} f_3 f_{-4} = \frac{f_1 f_3}{f_2 f_4} = \frac{f_1 f_1^{g_4}}{f_2 f_2^{g_4}} = N_{L/F_2^{(3)}} * N^{-1}_{L/F_2^{(3)}},$$

то $\beta_L^* = N_{L/F_2^{(3)}} * N^{-1}_{L/F_2^{(3)}}$, и тор T_4 есть ядро этого отображения. Окончательно имеем:

$$T_4 = \ker \left(R_{F_2^{(1)}/k}(R^1_{L/F_2^{(1)}}(G_m)) \times R_{F_2^{(2)}/k}(R^1_{L/F_2^{(2)}}(G_m)) \overset{N_{L/F_2^{(3)}} * N^{-1}_{L/F_2^{(3)}}}{\longrightarrow} R^1_{F_2^{(3)}/k}(G_m) \right).$$

По аналогии с примером 6 мы рассмотрели все торы из таблицы 1, результаты следующие:

1) $T_1 = R_{L/k}(G_m)$.

2) $T_2 = \ker \left(R_{L/k}(G_m) \overset{N^2_{L/F_2} * N^{-1}_{L/k}}{\longrightarrow} R^1_{F_2/k}(G_m) \right)$,

где $F_2 = L^{<g_2^2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2.

3) $T_3 = R^1_{L/k}(G_m)$.

4) $T_4 = \ker\left(R_{F_2^{(1)}/k}\left(R^1_{L/F_2^{(1)}}(G_m)\right) \times R_{F_2^{(2)}/k}\left(R^1_{L/F_2^{(2)}}(G_m)\right) \xrightarrow{N_{L/F_2^{(3)}} * N^{-1}_{L/F_2^{(3)}}} R^1_{F_2^{(3)}/k}(G_m)\right)$,

где $F_2^{(1)} = L^{<g_3>}$, $F_2^{(2)} = L^{<g_3 g_4>}$, $F_2^{(3)} = L^{<g_4>}$, $F_2^{(j)}/k$ — нормальные расширения степени 2, j=1, 2 или 3.

5) $T_5 = \ker\left(R_{F_2^{(1)}/k}(G_m) \times R_{F_2^{(2)}/k}(G_m) \xrightarrow{N_{F_2^{(1)}/k} * N^{-1}_{F_2^{(2)}/k}} G_m\right)$,

где $F_2^{(1)} = L^{<-g_4>}$, $F_2^{(2)} = L^{<-g_3 g_4>}$, $F_2^{(j)}/k$ — нормальные расширения степени 2, j=1 или 2.

6) $T_6 = R^1_{L/k}(G_m)$.

7) $T_7 = \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N^2_{L/F_2} * N^{-1}_{L/k}} R^1_{F_2/k}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_3>}$ — нормальное расширение степени 2.

8) $T_8 = R_{F_3/k}\left(R^1_{L/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<-g_1^3>}$ — нормальное расширение степени 3.

9) $T_9 = R_{F_3/k}\left(R^1_{L/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<g_1^2 g_6>}$, F_3/k — ненормальное расширение степени 3.

10) $T_{10} = R_{F_3/k}(G_m)$,

где $F_3 = L^{<-g_1^2 g_6>}$, F_3/k — ненормальное расширение степени 3.

11) $T_{11} = R_{F_4/k}\left(R^1_{L/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{L/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_2 g_0>}$, $F_4 = L^{<g_0>}$, F_i/k — нормальные расширения степени i, i=2 или 4.

12) $T_{12} = \ker\left(R_{F_2^{(1)}/k}\left(R^1_{F_4^{(1)}/F_2^{(1)}}(G_m)\right) \times R_{F_2^{(2)}/k}\left(R^1_{F_4^{(2)}/F_2^{(2)}}(G_m)\right) \xrightarrow{N_{F_4^{(1)}/F_2^{(3)}} * N_{F_4^{(2)}/F_2^{(3)}}} R^1_{F_2^{(3)}/k}(G_m)\right)$,

где $F_2^{(1)} = L^{<g_3,\ g_0>}$, $F_2^{(2)} = L^{<g_3 g_4,\ g_0>}$, $F_2^{(3)} = L^{<g_4,\ g_3 g_0>}$, $F_4^{(1)} = L^{<g_3 g_0>}$, $F_4^{(2)} = L^{<g_3 g_4 g_0>}$, $F_2^{(i)}/k$ — нормальное расширение степени 2, i=1, 2 или 3, $F_4^{(j)}/k$ — нормальные расширения степени 4, j=1 или 2.

13) $T_{13} = R_{F_4/k}\left(R^1_{L/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{L/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_3,\ g_5>}$, $F_4 = L^{<g_0>}$, F_i/k — нормальные расширения степени i, i=2 или 4.

14) $T_{14} = R_{F_4/k}\left(R^1_{L/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{L/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_2^2,\ -g_7>}$, $F_4 = L^{<-g_7g_2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_4/k — ненормальное расширение степени 4.

15) $T_{15} = \ker\left(R_{F_4/k}(G_m) \overset{N^2_{F_2/k} * N^{-1}_{F_4/k}}{\longrightarrow} R^1_{F_2/k}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_2g_7,\ g_7g_2>}$, $F_4 = L^{<g_7g_2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_4/k – ненормальное расширение степени 4, $k \subset F_2 \subset F_4 \subset L$.

16) $T_{16} = R^1_{F_4/k}(G_m)$,

где $F_4 = L^{<g_7g_2>}$, F_4/k — ненормальное расширение степени 4.

17) $T_{17} = R_{F_4/k}\left(R^1_{L/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{L/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<-g_2>}$, $F_4 = L^{<-g_7g_2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_4/k — ненормальное расширение степени 4.

18) $T_{18} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<-g_1^3,\ g_1^2g_6>}$, $F_6 = L^{<-g_6g_1>}$, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=3 или 6, $k \subset F_3 \subset F_6 \subset L$.

19) $T_{19} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<g_8,\ g_1g_8g_1^2>}$, $F_6 = L^{<g_1g_8g_1^2>}$, F_3/k — нормальное расширение степени 3, F_6/k – ненормальное расширение степени 6, $k \subset F_3 \subset F_6 \subset L$.

20) $T_{20} = R^1_{F_4/k}(G_m)$,

где $F_4 = L^{<g_1^2g_9>}$, F_4/k — ненормальное расширение четвертой степени.

21) $T_{21} = R_{F_6^{(1)}/k}\left(R^1_{L/F_6^{(1)}}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \overset{N_{L/F_4^{(1)}}}{\longrightarrow} R_{F_4^{(1)}/k}(G_m)\right) \bigcap$

$\bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \overset{N_{L/F_4^{(2)}}}{\longrightarrow} R_{F_4^{(2)}/k}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \overset{N_{F_4^{(3)}/k}}{\longrightarrow} R_{F_6^{(2)}/k}(G_m)\right)$,

где $F_4^{(1)} = L^{<g_1^2g_{10}>}$, $F_4^{(2)} = L^{<g_1g_{10}>}$, $F_4^{(3)} = L^{<ab>}$, $F_6^{(1)} = L^{<g_10>}$, $F_6^{(2)} = L^{<abab^2>}$, $F_4^{(i)}/k$ — ненормальные расширения степени 4, i=1, 2 или 3, $F_6^{(j)}/k$ — ненормальные расширения степени 6, j=1 или 2.

22) $T_{22} = R_{F_4/k}\left(R^1_{F_8/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{F_8/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_7g_2,\ g_2g_0>}$, $F_4 = L^{<g_7g_2,g_0>}$, $F_8 = L^{<g_7g_2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=4 или 8.

23) $T_{23} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<g_1^2 g_8 g_1,\ g_8,\ g_0>}$, $F_6 = L^{<g_8 g_0,\ g_1 g_8 g_1^2>}$, F_3/k — нормальное расширение степени 3, F_6/k — ненормальное расширение степени 6, $k \subset F_3 \subset F_6 \subset L$.

24) $T_{24} = R_{F_4/k}\left(R^1_{F_8/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{F_8/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_1^2,\ g_9>}$, $F_4 = L^{<g_1^2 g_9,\ g_0>}$, $F_8 = L^{<g_1^2 g_9>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=4 или 8.

25) $T_{25} = R_{F_6^{(1)}/k}\left(R^1_{F_{12}/F_6^{(1)}}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/F_8^{(1)}}} R_{F_8^{(1)}/k}(G_m)\right) \bigcap$

$\bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/F_8^{(2)}}} R_{F_8^{(2)}/k}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{F_4/k}} R_{F_6^{(2)}/k}(G_m)\right)$,

где $F_4 = L^{<g_1, g_{10} g_0>}$, $F_6^{(1)} = L^{<g_{10},\ g_0>}$, $F_6^{(2)} = L^{<g_{10} g_0,\ g_1 g_{10} g_1^2>}$, $F_8^{(1)} = L^{<g_1^2 g_{10}>}$, $F_8^{(2)} = L^{<g_1 g_{10}>}$, $F_{12} = L^{<g_{10} g_0>}$, F_4/k — ненормальное расширение степени 4, $F_i^{(j)}/k$ — ненормальные расширения степени i, i=6 или 8, j=1 или 2, F_{12}/k — ненормальное расширение степени 12.

26) $T_{26} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<g_{11}^2,\ -g_7>}$, $F_6 = L^{<-g_{11}^2 g_7>}$, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=3 или 6, $k \subset F_3 \subset F_6 \subset L$.

27) $T_{27} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right)$,

где $F_3 = L^{<g_{11}^2,\ g_7>}$, $F_6 = L^{<g_7,\ g_{11}^2 g_7 g_{11}^2>}$, F_3/k, F_6/k — ненормальные расширения степени i, i=3 или 6, $k \subset F_3 \subset F_6 \subset L$.

28) $T_{28} = R_{F_4/k}\left(R^1_{F_8/F_4}(G_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{F_8/F_2}(G_m)\right)$,

где $F_2 = L^{<g_{12}^2,\ -g_{13} g_{12}>}$, $F_4 = L^{<-g_{13} g_{12},\ -g_{12}^2 g_{13} g_{12}^2>}$, $F_8 = L^{<-g_{12}^3 g_{13}>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=4 или 8.

29) $T_{29} = R^1_{F_4/k}(G_m)$,

где $F_4 = L^{<-g_{13} g_{12},\ g_{12}^2 g_{13} g_{12}^2>}$, F_4/k — ненормальное расширение степени 4.

30) $T_{30} = R_{F_6^{(1)}/k}\left(R^1_{F_{12}/F_6^{(1)}}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/F_8^{(1)}}} R_{F_8^{(1)}/k}(G_m)\right) \bigcap$

$\bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/F_8^{(2)}}} R_{F_8^{(2)}/k}(G_m)\right) \bigcap \ker\left(R_{L/k}(G_m) \xrightarrow{N_{L/F_6^{(2)}}} R_{F_6^{(2)}/k}(G_m)\right)$, где $F_6^{(1)} = L^{<g_{14}^2,\ g_{14}g_{10}g_{14}^2g_{10}>}$, $F_6^{(2)} = L^{<g_{10},\ (g_{14}^2g_{10})^2>}$, $F_8^{(1)} = L^{<g_{10}g_{14}>}$, $F_8^{(2)} = L^{<g_{14}g_{10}g_{14}^2>}$, $F_{12} = L^{<g_{14}g_{10}g_{14}^2g_{10}>}$, $F_i^{(j)}/k$ — ненормальные расширения степени i, i=6 или 8, j=1 или 2, F_{12}/k — ненормальное расширение степени 12.

31) $$T_{31} = R_{F_6^{(1)}/k}\left(R^1_{F_{12}/F_6^{(1)}}(G_m)\right)\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_8^{(1)}}}R_{F_8^{(1)}/k}(G_m)\right)\bigcap$$
$$\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_8^{(2)}}}R_{F_8^{(2)}/k}(G_m)\right)\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_6^{(2)}}}R_{F_6^{(2)}/k}(G_m)\right),$$

где $F_6^{(1)} = L^{<g_{14}^2,\ g_{14}g_{10}g_{14}^2g_{10}>}$, $F_6^{(2)} = L^{<-g_{14}^2g_{10}>}$, $F_8^{(1)} = L^{<g_{10}g_{14}>}$, $F_8^{(2)} = L^{<g_{14}g_{10}g_{14}^2>}$, $F_{12} = L^{<-g_{14}^3g_{10}g_{14}^2g_{10}>}$, $F_i^{(j)}/k$ — ненормальные расширения степени i, i=6 или 8, j=1 или 2, F_{12}/k — ненормальное расширение степени 12.

32) $$T_{32} = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(G_m)\right),$$

где $F_3 = L^{<g_7,\ g_{11}^2,\ g_0>}$, $F_6 = L^{<g_7,\ g_{11}^2g_0>}$, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=3 или 6, $k\subset F_3\subset F_6\subset L$

33) $$T_{33} = R_{F_4/k}\left(R^1_{F_8/F_4}(G_m)\right)\bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{F_8/F_2}(G_m)\right),$$

где $F_2 = L^{<g_{12},\ -g_{13}>}$, $F_4 = L^{<-g_{13}g_{12},\ g_{12}^2g_{13}g_{12}^2g_0>}$, $F_8 = L^{<-g_{13}g_{12},\ g_{12}^2g_{13}g_{12}^2>}$, F_2/k — нормальное расширение степени 2, F_i/k — ненормальные расширения степени i, i=4 или 8.

34) $$T_{34} = R_{F_6^{(1)}/k}\left(R^1_{F_{12}/F_6^{(1)}}(G_m)\right)\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_{16}^{(1)}}}R_{F_{16}^{(1)}/k}(G_m)\right)\bigcap$$
$$\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_{16}^{(2)}}}R_{F_{16}^{(2)}/k}(G_m)\right)\bigcap\ker\left(R_{L/k}(G_m)\xrightarrow{N_{L/F_6^{(2)}}}R_{F_6^{(2)}/k}(G_m)\right),$$

где $F_{12}^{(1)} = L^{<g_{14}^2g_{10},\ g_{14}g_{10}g_{14}^2g_{10}>}$, $F_6 = L^{<g_{14}^2,\ g_{14}g_{10}g_{14}^2g_{10},\ g_0>}$, $F_{16}^{(1)} = L^{<g_{10}g_{14}>}$, $F_{16}^{(2)} = L^{<g_{14}g_{10}g_{14}^2>}$, $F_{12}^{(2)} = L^{<g_{14}^2g_{10}g_0>}$, F_6/k — ненормальное расширение степени 6, $F_i^{(j)}/k$ — ненормальные расширения степени i, i=12 или 16, j=1 или 2.

Литература

[1] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Системы корней / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1972.

[2] Воскресенский, В.Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп / В.Е. Воскресенский // Вестник СамГУ, 1997. – №2(4). – С. 18–99; 1997. – №4(6). – С. 5–69; 1998. – №2(8). – С. 5–55; 1997. – №2(12) С. 5–48.

[3] Воскресенский, В.Е. Алгебраические торы / В.Е. Воскресенский. – М.: Наука, 1977.

[4] Кунявский, Б.Э. Бирациональная классификация трехмерных алгебраических торов / Б.Э. Кунявский // Куйбышев: Куйбышевский ГУ, 1981 (рукопись депонирована в ВИНИТИ).

[5] Попов, С.Ю. Стандартная целая модель алгебраического тора / С.Ю. Попов // Вестник СамГУ. – 2001. – №4(22). – С. 85–109.

[6] Рышков, С.С. Максимальные конечные подгруппы целочисленных $n \times n$ матриц / С.С. Рышков // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. – 1972. – Т. 128. – С. 183–211.

[7] Grothendieck, A. Schemas en groupes. I. / A. Grothendieck, M. Demasure. – Berlin: Springer-Verlag, 1977. – 565 pp.

[8] Tahara, K. On the finite subgroups of $GL(3, \mathbb{Z})$ / K. Tahara // Nagoya Math. J. – 1971. – V. 41. – P. 169–209.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

AFFINE REPRESENTATIONS OF 3-DIMENSIONAL ALGEBRAIC TORI

© 2007 Yu.Yu. Krutickov[2]

For an arbitrary three-dimensional algebraic k-torus T we found the the minimal natural $n(T)$ such that there exists a regular embedding of T to $GL_{n(T),k}$. We describe this embedding obtain a realization of T as affine variety in $\mathbb{A}_n^{n(T)}$.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Krutickov Yuriy Yurievich (yuri@magices.com), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.