

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЛОЖЕНИЯ РЕШЕТОК В ОДНОМЕРНЫЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗБИЕНИЯ¹

© 2007 В.В. Красильщиков,² А.В. Шутов³

В работе рассматриваются одномерные квазипериодические разбиения, которые определяются на основе подхода, использующего иррациональные повороты окружности. Получено полное описание широкого класса прогрессий, вкладывающихся в данные разбиения.

Введение

Работа посвящена изучению одномерных квазипериодических разбиений. На сегодняшний день существует несколько способов построения квазипериодических разбиений [1], [5], в том числе разработанные Н. де Брейном [2] и позднее В.И. Арнольдом [6]. Их подходы основаны на сечении периодических разбиений n -мерного пространства плоскостями меньшей размерности — метод проекции (cut and project method) [3]. Эти разбиения можно также определить с помощью пересечения луча $y = \alpha x$ с иррациональным углом наклона α и целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ [4]. В результате получают бесконечное слово из нулей и единиц — последовательность Штурма — по правилу: 0, если луч $y = \alpha x$ пересекает вертикальную линию целочисленной решетки; 1, если луч $y = \alpha x$ пересекает горизонтальную линию целочисленной решетки. Если поставить в соответствие нулю из этого слова интервал длины l_1 , а единице — l_2 , то получим одномерное квазипериодическое разбиение луча на интервалы двух типов. Данная конструкция эквивалентна следующей [4]. Определим последовательность $\{x_n\}$ по следующему правилу: 1) $x_{-1} = 0$, 2) переход от x_n к x_{n+1} осуществляется

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

²Красильщиков Василий Вячеславович (krasilshchikovvv@mail.ru), кафедры алгебры и теории чисел Владимирского государственного педагогического университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр-т Строителей, 11.

³Шутов Антон Владимирович (shutov@vgpu.vladimir.ru), кафедра информатики Владимирского государственного педагогического университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр-т Строителей, 11.

по формуле:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \alpha, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1 - \alpha), \\ x_n + 1 - \alpha, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1 - \alpha; 1), \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — дробная доля, α — некоторая иррациональность. Последовательность $\{x_n\}$ порождает на положительном действительном луче одномерное квазипериодическое разбиение. Нами рассмотрен более общий случай таких разбиений.

Определение 1. Последовательность $\{x_n^{(\beta)}\}$ определяется по правилу:

$$x_{-1}^{(\beta)} = 0, \\ x_{n+1}^{(\beta)} = \begin{cases} x_n^{(\beta)} + l_1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; \beta), \\ x_n^{(\beta)} + l_2, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [\beta; 1), \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — дробная доля, α — некоторая иррациональность, l_1, l_2, β — произвольные действительные числа.

Последовательность $\{x_n^{(\beta)}\}$ порождает на положительном действительном луче разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, состоящее из интервалов двух типов. На рис. 1 изображен пример такого разбиения для случая, когда $l_1 > l_2$.

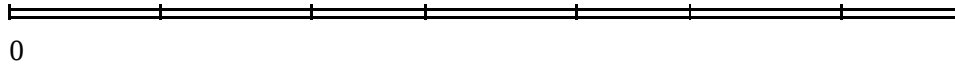


Рис. 1. Разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$

Пусть решетка — множество вида

$$L = \{h_0 + nh_L\}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Определение 2. Будем говорить, что решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если каждый интервал разбиения содержит единственную точку решетки L .

Определение 3. Будем говорить, что решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если

- 1) каждый длинный интервал разбиения содержит единственную точку решетки L ;
- 2) короткие интервалы разбиения не содержат точек решетки L .

В данной работе мы дадим обзор результатов о вложении решеток в одномерные квазипериодические разбиения, полученных в работах [8–10].

Авторы выражают глубокую благодарность за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные советы проф. В.Г. Журавлеву, а также признательность за предоставленную возможность выступить с докладом организаторам Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию проф. В.Е. Воскресенского.

1. Сильное вложение

На рис. 2 изображено разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ и решетка, сильно вкладывающаяся в него.

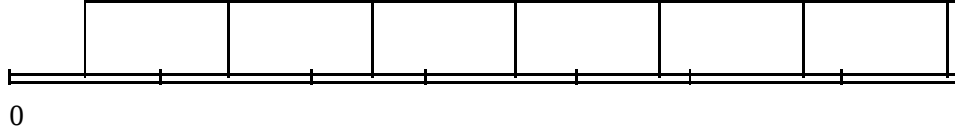


Рис. 2. Сильное вложение решетки

Дадим полное описание сильно вкладывающихся решеток [10].

Теорема 1. Если $\beta \notin \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, то при любых l_1 и l_2 не существует сильно вкладывающейся решетки.

Теорема 2. Если решетка $L = \{h_0 + nh_L\}$ сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, то

$$h_L = l_1\beta + l_2(1 - \beta).$$

Следствие 1. Решетка, сильно вкладывающаяся в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, единственна с точностью до параллельного переноса.

Определим остаток $r_1(\alpha, n)$ по формуле:

$$r_1(\alpha, n) = N_1(\alpha, n) - n\beta,$$

где $N_1(\alpha, n) = \#\{0 \leq i < n : \langle i\alpha \rangle \in [0; \beta)\}$.

Определим функции:

$$r_1^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_1} r_1(\alpha, n), r_1^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_1} r_1(\alpha, n),$$

$$r_2^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_2} r_1(\alpha, n), r_2^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in I_2} r_1(\alpha, n).$$

Доказано необходимое и достаточное условие сильной вложимости решетки.

Теорема 3. Решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняются три условия.

1. При $l_1 > l_2$:

$$1) \ r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{\max} - l_{\min}};$$

$$2) \ r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{\max} - l_{\min}};$$

$$3) \ r_1^+ - r_2^- < \frac{l_1}{l_{\max} - l_{\min}}, \text{ если } r_1^- > r_2^-; \ r_2^+ - r_1^- < \frac{l_2}{l_{\max} - l_{\min}}, \text{ если } r_2^- > r_1^-.$$

2. При $l_2 > l_1$:

$$1) \ r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{\max} - l_{\min}};$$

$$2) \ r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{\max} - l_{\min}};$$

$$3) \quad r_2^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{\max} - l_{\min}}, \text{ если } r_1^+ < r_2^+; \quad r_1^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{\max} - l_{\min}}, \text{ если } r_2^+ < r_1^+.$$

Теорема 3 позволяет получить необходимые и достаточные условия сильной вложимости решетки L в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых частных значениях $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, если известны оценки для $r_1(\alpha, n)$.

Введем обозначение: $\lambda = \frac{l_{\max}}{l_{\min}}$. Определим функцию $r(\alpha)$:

$$r(\alpha) = \sup_n |r_1(\alpha, n)|.$$

Сформулируем достаточное условие сильной вложимости решеток.

Теорема 4. Пусть $r(\alpha) < \frac{1}{2(\lambda-1)}$, тогда решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

Теорема 5. Пусть $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Пусть h определяется условием $\beta - \alpha h \in \mathbb{Z}$. Пусть $|h| < \frac{1}{2(\lambda-1)}$, тогда решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

2. Слабое вложение

На рис. 3 изображено разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ и решетка, слабо вкладывающаяся в него.

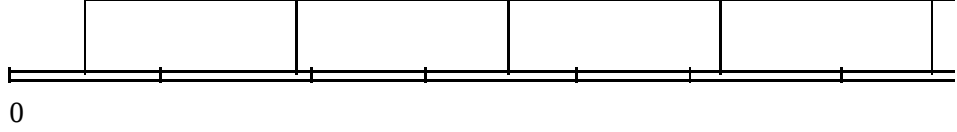


Рис. 3. Слабое вложение решетки

Определим следующие функции: $[x > y] = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \leq y, \end{cases}$ и $\Delta = [l_1 > l_2]\beta + [l_2 > l_1](1 - \beta)$.

Получено описание слабо вкладывающихся решеток [8].

Теорема 6. Если решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, то h_L представимо в виде $h_L = \frac{l_1\beta + l_2(1 - \beta)}{\Delta}$.

Теорема 7. Решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n r_1(\alpha, n) - \inf_n r_1(\alpha, n) < \Delta\lambda.$$

Теорема 7 позволяет получить необходимые и достаточные условия слабой вложимости решетки L в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых частных значениях $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, если известны оценки для $r_1(\alpha, n)$.

Сформулируем достаточное условие слабой вложимости решеток.

Теорема 8. Пусть $r(\alpha) < \frac{\Delta\lambda}{2}$, тогда решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

Теорема 9. Пусть $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Пусть h определяется условием $\beta - \alpha h \in \mathbb{Z}$. Пусть $|h| < \frac{\Delta\lambda}{2}$, тогда решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

3. Случай $\beta = 1 - \alpha$

На основе данных результатов получены полные описания сильно и слабо вкладывающихся решеток в квазипериодические разбиения для случая $\beta = 1 - \alpha$ [9].

Теорема 10. Решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} l_1 > (1 - \alpha)^{[l_2 > l_1]}(l_{\max} - l_{\min}), \\ l_2 > \alpha^{[l_1 > l_2]}(l_{\max} - l_{\min}). \end{cases}$$

Теорема 4 может быть переформулирована в следующем виде.

Теорема 11. Решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\frac{l_{\min}}{l_{\max} - l_{\min}} > \alpha[l_1 > l_2] + (1 - \alpha)[l_2 > l_1].$$

Теорема 12. Если решетка $L = \{h_0 + nh_L\}$ сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, то

- 1) $h_L = l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha$;
- 2) если $l_1 > l_2$, то $h_0 \in (l_1 - l_2; l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha)$,
если $l_1 < l_2$, то $h_0 \in (0; l_1 + (1 - \alpha)(l_1 - l_2))$;
- 3) любое h_0 , удовлетворяющее условию 2), допустимо для сильной вложимости решетки.

Теорема 13. Решетка L слабо вложится в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ при любых иррациональных α и действительных l_1 и l_2 .

Теорема 14. Решетки L , слабо вкладывающиеся в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, имеют следующий вид:

- 1) $h_L = \frac{l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha}{\Delta}$;
- 2) $h_0 \in \left(\frac{-\alpha l_2}{1 - \alpha} - l_1; \frac{-l_2}{1 - \alpha}\right)$ при $l_1 > l_2$,
 $h_0 \in (l_1 - l_2; 0)$ при $l_2 > l_1$;
- 3) любое h_0 , удовлетворяющее условию 2), допустимо для слабой вложимости решетки.

Примером для случая $\beta = 1 - \alpha$ может служить разбиение, порожаемое на действительной оси четными по Фибоначчи числами: 0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, Существует явная формула [7] для этих чисел: $a(n) = n + [(n + 1)\tau]$, где $\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ — золотое сечение, n — любое целое число. С помощью определения 1 можно описать четные по Фибоначчи числа, если положить

$l_1 = 2$, $l_2 = 1$ и $\alpha = 1 - \tau$, и каждую вершину множества $\{x_n\}$ сдвинуть на $l_1 + l_2$ влево вдоль действительной оси.

Предложение 1. Пусть $\beta = \tau$, тогда $I_1 = [0; \tau)$ и $I_2 = [\tau; 1)$. Множество $a(n)$ определяется по правилу:

$$a(-1) = -3,$$

$$a(n+1) = \begin{cases} a(n) + 2, & \text{если } \langle n(1-\tau) \rangle \in [0; \tau), \\ a(n) + 1, & \text{если } \langle n(1-\tau) \rangle \in [\tau; 1), \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — дробная доля.

Теорема 15. Решетка L , сильно вкладываемая в разбиение, порождаемое четными по Фибоначчи числами, имеет следующие характеристики:

- 1) $h_L = 1 + \tau$,
- 2) $h_0 \in (-1; \tau - 1)$.

Теорема 16. Решетка L , слабо вкладываемая в разбиение, порождаемое четными по Фибоначчи числами на множестве действительных чисел, будет описана следующим образом:

- 1) $h_L = \frac{1+\tau}{\tau}$;
- 2) $h_0 \in (-\frac{1+3\tau}{\tau}; -\frac{1+2\tau}{\tau})$.

Сформулируем результаты для разбиения, эквивалентного [4] получаемому по конструкции Штурма. Пусть $\alpha > \frac{1}{2}$.

Теорема 17. Решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теорема 18. Если решетка $L = \{h_0 + nh_L\}$ сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$, то

- 1) $h_L = 2\alpha(1-\alpha)$;
- 2) $h_0 \in (2\alpha - 1; 2\alpha(1-\alpha))$;
- 3) любое h_0 , удовлетворяющее условию 2), допустимо для сильной вложимости решетки.

Теорема 19. Решетки L , слабо вкладываемые в разбиение $Til_\infty(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$, имеют следующий вид:

- 1) $h_L = 2\alpha$;
- 2) $h_0 \in (-2\alpha; -1)$;
- 3) любое h_0 , удовлетворяющее условию 2), допустимо для слабой вложимости решетки.

4. Заключение

Используя результаты А.В. Шутова [11, 12], которые дают оценки остатков $r_1(\alpha, n)$ для некоторых α , достаточные условия сильной и слабой вложимости решеток можно существенно улучшить [10].

Пусть

- 1) $\beta \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, величина h определяется условием $\beta - \alpha h \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\psi(n) = \log_{\tilde{\tau}}(\sqrt{5}n + \sqrt{5} + \frac{1}{2})$, где $\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;
- 3) $\alpha_0 = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$.

Теорема 20. Пусть все неполные частные разложения α_0 в цепную дробь меньше K , $C(K) = \frac{1}{2(K+2)(K-1)}$. Пусть

1) $|h| < \frac{\sqrt{5}}{5} \tau^{\frac{C(K)}{K-1}-1}$, тогда решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$;

2) $|h| < \frac{\sqrt{5}}{5} \tau^{C(K)\Delta\lambda-1}$, тогда решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

Теорема 21. Пусть разложение α_0 в цепную дробь имеет вид $\alpha_0 = [0; q_1, q_2, \dots]$. Пусть $g(x)$ — монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^k q_i = g(k).$$

1. Пусть

$$\min\left\{\frac{g^2(\psi(m)) + 3g(\psi(m)) + 2}{2}, |h|\right\} < \frac{1}{2\lambda - 1},$$

тогда решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

2. Пусть

$$\min\left\{\frac{g^2(\psi(m)) + 3g(\psi(m)) + 2}{2}, |h|\right\} < \frac{\Delta\lambda}{2},$$

тогда решетка L слабо вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$.

Литература

- [1] Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions and multidimensional continued fractions / P. Arnoux [et al.] // Discrete models: combinatorics, computation and geometry. — Paris. — 2001. — P. 59–78.
- [2] De Bruijn, N.G. Sequences of zeros and ones generated by special production rules / N.G. De Bruijn // Kon. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. — 1982. — Ser. A. — V. 84. — P. 38–52.
- [3] Moody, R.V. Model sets: a survey. Quasicrystals to More Complex Systems / R.V. Moody. Les Houches, 1998. (F. Alex, J.-P. Gazeau, eds.) Centre de Physique des Houches. Springer-Berlin, 2000. — V. 13. — P. 145–166.
- [4] Fogg, N. Pytheas Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics / N. Pytheas Fogg. — Springer, 2002.
- [5] Zhuravlev, V.G. One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle / V.G. Zhuravlev // Max-Planck-Institut für Mathematik. Preprint Series. — 2004. — V. 59. — P. 1–43.
- [6] Арнольд, В.И. Замечания о квазикристаллической симметрии / В.И. Арнольд // Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. — М.: Наука. — 1989. — С. 291–300.

- [7] Журавлев, В.Г. Суммы квадратов над o -кольцом Фибоначчи / В.Г. Журавлев // Записки науч. семинаров ПОМИ. – 2006. – Т. 337. – С. 165–190.
- [8] Красильщиков, В.В. Об одном классе прогрессий, вкладывающихся в одномерные квазипериодические разбиения / В.В. Красильщиков // Чебышевский сборник. – Тула: Изд. ТГПУ. – 2007 (в печати).
- [9] Красильщиков, В.В. Вложение решеток в квазипериодические решетки / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвузовский сборник научных трудов. – Саратов: Изд-во Саратовского университета. – 2007. – Вып. 4. – С. 45–55.
- [10] Красильщиков, В.В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий / В.В. Красильщиков, А.В. Шутов, В.Г. Журавлев // Известия вузов. Математика. – Казань, 2007 (в печати).
- [11] Шутов, А.В. О распределении дробных долей / А.В. Шутов // Чебышевский сборник. – Тула: Изд. ТГПУ. – 2004. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 112–121.
- [12] Шутов, А.В. О распределении дробных долей II / А.В. Шутов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам.: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Из-во Саратовского Университета. – 2005. – Вып. 3. – С. 146–158.

Поступила в редакцию 17/IX/2007;
в окончательном варианте — 17/IX/2007.

ASPECTS OF PUTTING LATTICES IN ONE-DIMENSIONAL QUASIPERIODICAL TILINGS

© 2007 V.V. Krasil'shchikov,⁴ A.V. Shutov⁵

One-dimensional quasiperiodical tilings defined on the basis of the approach using irrational turns of a circle are considered in the paper. We obtain a complete description of a wide class of progressions included in given tilings.

Paper received 17/IX/2007.

Paper accepted 17/IX/2007.

⁴Krasil'shchikov Vasilii Vyatcheslavovich (krasilshchikovvv@mail.ru), Dept. of Algebra and Number Theory, Vladimir State Pedagogical University, Vladimir, 600024, Russia.

⁵Shutov Anton Vladimirovich (shutov@vgpu.vladimir.ru), Dept. of Informatics, Vladimir State Pedagogical University, Vladimir, 600024, Russia.