УДК 512.554.3

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИДЕАЛОВ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ

© 2007 Ю.В. Кочетова[1]

В работе исследуются свойства частично упорядоченных алгебр Ли над различными полями. Приведены примеры направленных, решеточно упорядоченных и линейно упорядоченных алгебр Ли. Получен ряд результатов, касающихся свойств l-идеалов решеточно упорядоченных алгебр Ли над частично упорядоченным полем.

Введение

Понятие частично упорядоченной алгебры Ли над частично упорядоченным полем было введено В.М. Копытовым [1]. В работах В.М. Копытова [1–3] и Н.Я. Медведева [4, 5] подробно рассматриваются свойства линейно упорядоченных алгебр Ли над линейно упорядоченными полями, но практически отсутствуют примеры частично упорядоченных алгебр Ли. А именно, лишь в работах Н.Я. Медведева [4, 5] находим пример линейно упорядоченной алгебры Ли над линейно упорядоченным полем (см. пример 5).

В данной работе приведены примеры частично упорядоченных алгебр Ли с различными свойствами частичного порядка. В каждом примере указан вид порядка на поле, над которым рассматривается алгебра Ли.

Также в данной работе доказываются некоторые свойства идеалов и l-идеалов решеточно упорядоченных алгебр Ли над частично и линейно упорядоченными полями.

Пусть дана алгебра Ли L над полем K. Для произвольного элемента $x \in L$ обозначим через α_x преобразование $L \to L$ по правилу $\alpha_x(a) = a + [a, x]$ для любого $a \in L$.

Определение 1. Частично упорядоченной алгеброй Ли L над частично упорядоченным полем K называется алгебра Ли над полем K, на которой задано отношение порядка $\leqslant$ такое, что:
1) $\langle L; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) для любых элементов $x, y \in L$, $\lambda \in K$ из неравенств $x \leqslant y, \lambda \geqslant 0$ следует $\lambda x \leqslant \lambda y$;

[1]Кочетова Юлия Викторовна, кафедра алгебры Московского педагогического государственного университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

3) для любых элементов $x, y, z \in L$ из неравенства $x \leqslant y$ следует неравенство $\alpha_z(x) \leqslant \alpha_z(y)$.

В зависимости от свойств частичного порядка $\leqslant$ алгебры Ли над частично упорядоченным полем различают направленные, решеточно упорядоченные (l-алгебры Ли) и линейно упорядоченные алгебры Ли.

В параграфе 1 содержатся примеры частично упорядоченных алгебр Ли над полями, порядки которых обладают различными свойствами.

Напомним, что идеалом в алгебре Ли L называется подпространство I в L такое, что из $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$.

Определение 2. Идеал I частично упорядоченной алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K называется выпуклым, если I является выпуклым подмножеством в L.

Выпуклый идеал l-алгебры Ли, являющийся подрешеткой этой алгебры, называется l-идеалом.

Во втором параграфе рассматриваются свойства l-идеалов l-алгебр Ли, в частности, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Множество всех l-идеалов l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K является полной подрешеткой решетки всех ее идеалов.

Пусть L — частично упорядоченная алгебра Ли над частично упорядоченным полем K и I — выпуклый идеал в L. Несложно доказать, что факторалгебра L/I является частично упорядоченной алгеброй Ли над полем K (аналогичное утверждение для частично упорядоченных алгебр Ли над линейно упорядоченным полем см. [1, теорема 2.2]).

Определение 3. Спрямляющим идеалом частично упорядоченной алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K будем называть такой ее выпуклый идеал I, что факторалгебра L/I линейно упорядочена относительно индуцированного порядка.

Третий параграф посвящен изучению свойств спрямляющих l-идеалов решеточно упорядоченных алгебр Ли над линейно упорядоченным полем. В этом параграфе приводится доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. l-идеал I l-алгебры Ли L над линейно упорядоченным полем K является спрямляющим l-идеалом в L тогда и только тогда, когда множество l-идеалов в L, содержащих I, линейно упорядочено по включению.

Напомним, что подмножество X решетки L называется корневой системой, если для каждого $x \in X$ множество U_x всех элементов в L, больших x, линейно упорядочено и лежит в X [3. С. 51].

Имеет место следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Множество спрямляющих l-идеалов l-алгебры Ли L над линейно упорядоченным полем K образует корневую систему $\mathcal{L}_0(L)$ в решетке $\mathcal{L}(L)$ всех l-идеалов l-алгебры Ли L.

В статье используется терминология, общепринятая для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [3, 6]).

1. Примеры частично упорядоченных алгебр Ли

Пусть K — частично упорядоченное поле, L — четырехмерное векторное пространство над полем K с базисом $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тогда произвольные элементы $x, y \in L$ однозначно записываются в виде $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i$, где $\alpha_i, \beta_i \in K$.

Пример 1.

Зададим на L бинарную операцию $[,]$ следующим образом: $[x, y] = (\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2)e_1 + (\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$. Непосредственная проверка показывает, что L является алгеброй Ли над полем K.

Зададим на алгебре Ли L следующее отношение порядка: будем считать, что $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_4 = \beta_4$, $\alpha_3 \leqslant \beta_3$. Исходя из частичной упорядоченности поля K, можно установить, что алгебра Ли $\langle L, \leqslant\rangle$ удовлетворяет определению 1, то есть является частично упорядоченной алгеброй Ли над частично упорядоченным полем K относительно введенного отношения порядка.

Пример 2.

Для любых $x, y \in L$ будем считать, что $[x, y] = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)e_3 + (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)e_4$. Несложные вычисления показывают, что L является алгеброй Ли над полем K.

Если задать на L отношение порядка, при котором $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ или $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 < \beta_3$ или $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\alpha_4 \leqslant \beta_4$, то в силу частичной упорядоченности поля K для алгебры Ли $\langle L, \leqslant\rangle$ выполняются условия определения 1, поэтому L является частично упорядоченной алгеброй Ли над полем K. Если поле K является линейно упорядоченным, то данная алгебра Ли L является направленной алгеброй Ли и не является решеточно упорядоченной алгеброй Ли.

Пример 3.

Введем на векторном пространстве L над линейно упорядоченным полем K бинарную операцию $[,]$: будем считать, что $[x, y] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_4$. При этом получим алгебру Ли L.

Зададим на L бинарное отношение $\leqslant$ так, что $x \leqslant y$ в одном из трех случаев: 1) $\alpha_1 < \beta_1$; 2) $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$; 3) $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 \leqslant \beta_3$, $\alpha_4 \leqslant \beta_4$. Так как поле K линейно упорядочено, то можно установить, что алгебра Ли L является частично упорядоченной алгеброй Ли над линейно упорядоченным полем относительно введенного отношения порядка.

Покажем, что алгебра Ли L является решеточно упорядоченной. Пусть $x, y \in L$ и $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i$. Если $\alpha_1 < \beta_1$ или $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ или $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 \leqslant \beta_3$, $\alpha_4 \leqslant \beta_4$, то $x \leqslant y$, и поэтому точная верхняя и точная нижняя грани элементов x и y равны соответственно $x \vee y = y$ и $x \wedge y = x$.

В случаях, когда $\beta_1 < \alpha_1$ или $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 < \alpha_2$ или $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 \leqslant \alpha_3$, $\beta_4 \leqslant \alpha_4$ получаем, что $y \leqslant x$, следовательно, $x \vee y = x$ и $x \wedge y = y$.

Осталось рассмотреть случай, при котором $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ и элементы x и y несравнимы. Здесь $x \vee y = (\alpha_3 \vee \beta_3)e_3 + (\alpha_4 \vee \beta_4)e_4$ и $x \wedge y = (\alpha_3 \wedge \beta_3)e_3 + (\alpha_4 \wedge \beta_4)e_4$.

Итак, для любых элементов $x, y \in L$ существуют элементы $x \vee y$, $x \wedge y \in L$. Поэтому L — решеточно упорядоченная алгебра Ли над линейно упорядоченным полем K. При этом, так как в L есть несравнимые элементы, то алгебра Ли L не является линейно упорядоченной.

Пример 4.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathbf{H}^{(-)}$, получаемую из ассоциативной алгебры кватернионов $\mathbf{H}$, в которой вместо ассоциативного умножения рассматривается новое умножение $[x, y] = xy - yx$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathbf{H}^{(-)}$, $x = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$, $y = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ их коммутатор равен $[x, y] = 2(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)i + 2(\alpha_4\beta_2 - \alpha_2\beta_4)j + 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)k$.

Заданное на алгебре Ли $\mathbf{H}^{(-)}$ отношение порядка $\leqslant$, при котором $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \leqslant \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_4 = \beta_4$ в $\mathbf{R}$, позволяет частично упорядочить алгебру Ли $\mathbf{H}^{(-)}$ над линейно упорядоченным полем $\mathbf{R}$.

Пример 5 ([4]).

Пусть L — трехмерное векторное пространство над частично упорядоченным полем K с базисом $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Для любых элементов $x = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i e_i$ из L будем считать, что $[x, y] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$. Можно видеть, что L является алгеброй Ли над полем K.

Зададим на L лексикографическое упорядочивание $\leqslant$: считаем, что $x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $\alpha_1 < \beta_1$ или $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ или $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 \leqslant \beta_3$. Так же, как в рассмотренных выше примерах, можно сделать вывод о том, что алгебра Ли $\langle L, \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной алгеброй Ли над частично упорядоченным полем K. Если поле K является линейно упорядоченным, то данная алгебра Ли L также является линейно упорядоченной.

Замечание 1. Конкретной интерпритацией алгебры Ли, рассмотренной в примере 5, является алгебра Ли $t_0^+(3; \mathbf{R})$ строго верхнетреугольных матриц порядка 3 над линейно упорядоченным полем действительных чисел $\mathbf{R}$, в которой лиево умножение задается следующим образом: $[A, B] = AB - BA$ для любых элементов $A, B \in t_0^+(3; \mathbf{R})$.

2. Свойства l-идеалов l-алгебр Ли

Напомним, что положительная, отрицательная части и модуль элемента x l-алгебры Ли L определяются соотношениями: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = x \wedge 0$, $|x| = x \vee (-x)$.

Аналогично тому, как это делается в работе В.М. Копытова [2. С. 596] для решеточно упорядоченной алгебры Ли над линейно упорядоченным полем, можно сформулировать свойства положительной, отрицательной части и модуля элемента решеточно упорядоченной алгебры Ли над частично упорядоченным полем, которые будут необходимы нам в дальнейшем.

В данном случае свойства порядка поля не влияют на ход рассуждений.

Предложение 1. В l-алгебре Ли L над частично упорядоченным полем K для любых элементов $x, y, z \in L$ верны соотношения:

$$x = x^+ + x^-; \quad |x| = x^+ - x^-; \quad 0 \leqslant x^+ \leqslant |x|; \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|;$$
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|; \quad z + (x \wedge y) = (z + x) \wedge (z + y).$$

Доказательство. Исходя из определения 1, можно сделать вывод о том, что l-алгебра Ли L является аддитивной l-группой. Поэтому справедливость утверждения следует из свойств решеточно упорядоченных групп (см., например, [3, гл. II, § 2; 7, гл. XIII, § 3,4; 6, гл. V, § 4]).

Лемма 1 ([2. С. 596]). В l-алгебре Ли L над линейно упорядоченным полем K для любых элементов $x, y \in L$, $\lambda \in K$ верны соотношения:

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|; \quad \lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y, \text{ если } \lambda \geqslant 0.$$

Доказательство. Поскольку l-алгебра Ли L является решеточно упорядоченным векторным пространством над линейно упорядоченным полем K, то справедливость утверждения следует из свойств решеточно упорядоченных векторных пространств (см., например, [7, гл. XV, § 1, теорема 1]).

Предложение 2 ([2, предл. 1.4]). Пусть L — решеточно упорядоченная алгебра Ли над частично упорядоченным полем K. Тогда для любого положительного $a \in L$ и любого $x \in L$ справедливо соотношение $|[a, x]| \leqslant a$.

Предложение 3. Следующие условия на идеал I решеточно упорядоченной алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K эквивалентны:
1) I — выпуклая подрешетка в L;
2) если $x \in I$, $y \in L$ и $|y| \leqslant |x|$, то $y \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$.

Доказательство. Если условие 1) выполняется, то I является l-идеалом в l-группе L. Откуда по соответствующему утверждению для l-групп следует справедливость условия 2) (см. [3, гл. II, § 3, теорема 1; 7, гл. XIII, § 9]).

Пусть выполняется условие 2). Тогда I является l-идеалом l-группы L (см. [3, гл. II, § 3, теорема 1]). Следовательно, условие 1) имеет место.

Предложение 4. Сумма l-идеалов l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K является l-идеалом в L.

Доказательство. Пусть $I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$ — сумма l-идеалов l-алгебры Ли L. Известно, что $I + J$ является идеалом в L (см., например, [8. С. 18]).

Пусть элементы $x \in (I + J)$, $y \in L$ удовлетворяют условию $|y| \leqslant |x|$. Тогда $x = a + b$, где $a \in I$, $b \in J$, откуда по предложению 1 $|y| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$. В силу свойства l-групп (см. [3, гл. II, § 2, следствие 1; 6, гл. V, § 1, следствие 2]), верного для аддитивной l-группы $\langle L, +\rangle$ l-алгебры Ли L, существуют элементы $a_1, b_1 \in L$ такие, что $0 \leqslant a_1 \leqslant |a|$, $0 \leqslant b_1 \leqslant |b|$ и $|y| = a_1 + b_1$.

Поскольку I, J — подрешетки в L, то $|a| \in I$ и $|b| \in J$, а так как I, J — выпуклые идеалы в L, то $a_1 \in I$ и $b_1 \in J$. Значит, $|y| \in (I + J)$.

По предложению 1 имеем $0 \leqslant y^+ \leqslant |y|$, поэтому аналогичные рассуждения применимы для доказательства того, что $y^+ \in (I+J)$. Из предложения 1 следует, что $y = y^+ + y^+ - |y|$, откуда, используя доказанные выше соотношения, заключаем, что $y \in I + J$. Следовательно, по предложению 3 $I + J$ — выпуклая подрешетка l-алгебры Ли L.

Предложение 5. Пересечение любого множества l-идеалов l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K также является l-идеалом в L.

Доказательство. Пусть $M = \{J_i$ — l-идеалы в L, $i \in I\}$ и $J = \bigcap\limits_{i \in I} J_i$. Тогда J является выпуклой нормальной l-подгруппой аддитивной l-группы L, как пересечение выпуклых нормальных l-подгрупп (см. [3. C. 40; 6. C. 116]).

Если $x, y \in J$, $\lambda \in K$, $l \in L$, то по определению операции пересечения множеств $x, y \in J_i$ для любого $i \in I$. Так как J_i — l-идеал в L для любого $i \in I$, то λx, $[x, l] \in J_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, λx, $[x, l] \in J$, то есть J — идеал в L.

Таким образом, из доказанного выше получаем, что J — идеал в L, являющийся выпуклой подрешеткой.

Замечание 2. Множество идеалов алгебры Ли L образует решетку.

Доказательство. Пусть $M = \{I \mid I$ – идеал в $L\}$. Покажем, что для любых элементов $I, J \in M$ имеют место соотношения: $I \wedge J = I \cap J$ и $I \vee J = I + J$.

Пусть $I, J \in M$. По предложению 5 $I \cap J$ является идеалом в L, при этом по определению операции пересечения множеств $I \cap J \subseteq I$ и $I \cap J \subseteq J$, а также для любого $T \in M$, такого, что $T \subseteq I$ и $T \subseteq J$ верно, что и $T \subseteq I \cap J$. Таким образом, $I \cap J = I \wedge J$.

В силу предложения 4 $I + J$ является идеалом в L, при этом ясно, что $I \subseteq I + J$ и $J \subseteq I + J$. Если элемент $T \in M$, таков, что $I \subseteq T$ и $J \subseteq T$, то по определению идеала и в силу задания суммы идеалов $I + J \subseteq T$. Следовательно, $I + J = I \vee J$.

Предложение 6. Множество всех l-идеалов l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K образует подрешетку в решетке всех идеалов алгебры Ли L.

Доказательство. Пусть I, J — l-идеалы l-алгебры Ли L. По предложению 5 $I \cap J$ является l-идеалом в L, а по предложению 4 $I + J$ является l-идеалом в L, следовательно, множество всех l-идеалов l-алгебры Ли L является подрешеткой в решетке всех ее идеалов.

Доказательство теоремы 1. В силу предложения 6 множество всех l-идеалов l-алгебры Ли L образует подрешетку в решетке всех идеалов алгебры Ли L. По предложению 5 можно сделать вывод о том, что точная нижняя грань для любого множества l-идеалов является l-идеалом, поскольку пересечение любого множества l-идеалов есть l-идеал.

Рассмотрим множество l-идеалов J_α, $\alpha \in A$ l-алгебры Ли L. Пусть $I =$

$= \{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s} \mid x_{\alpha_i} \in J_{\alpha_i}\}$ — множество всевозможных конечных сумм элементов идеалов J_α $(\alpha \in A)$.

Если $x, y \in I$, $\lambda \in K$ и $l \in L$, то $x - y = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s} - y_{\beta_1} - y_{\beta_2} - \ldots - y_{\beta_t}$, $\lambda x = \lambda(x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s}) = \lambda x_{\alpha_1} + \lambda x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda x_{\alpha_s}$ и $[x, l] = [x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s}, l] = [x_{\alpha_1}, l] + [x_{\alpha_2}, l] + \ldots + [x_{\alpha_s}, l]$. По построению множества I ясно, что $x - y \in I$. Так как $x_{\alpha_i} \in J_{\alpha_i}$ и J_{α_i} — идеал в L, то $\lambda x_{\alpha_i}, [x_{\alpha_i}, l] \in J_{\alpha_i}$, поэтому $\lambda x, [x, l] \in I$. Следовательно, I — идеал в L.

Известно (см. [3. С. 40]), что построенное множество I является выпуклой l-подгруппой в L, порожденной множеством $\{J_\alpha, \alpha \in A\}$ выпуклых l-подгрупп l-группы L. Значит, идеал I является l-идеалом в L.

Если J — произвольный l-идеал l-алгебры Ли L, для которого $J_\alpha \subseteq J$ для любого $\alpha \in A$, то J содержит всевозможные конечные суммы элементов идеалов J_α, то есть $I \subseteq J$.

Таким образом, l-идеал I является точной верхней гранью l-идеалов J_α, $\alpha \in A$.

Замечание 3. О полноте подрешетки l-идеалов в решетке всех идеалов l-алгебры Ли над линейно упорядоченным полем см. в работах В.М. Копытова [2, 3].

3. Спрямляющие l-идеалы l-алгебр Ли

Теорема 3. Пусть L — l-алгебра Ли над частично упорядоченным полем K, J — l-идеал в L. Тогда J является спрямляющим идеалом в L тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $a, b \in L \backslash J$ справедливо соотношение $a \wedge b \notin J$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что по [9, теорема 1] факторалгебра L/J является решеточно упорядоченной алгеброй Ли относительно индуцированного порядка.

Пусть J — спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L, $a, b > 0$ и $a, b \notin J$. Тогда по определению 3 факторалгебра L/J линейно упорядочена, а по определению 2 l-идеал J является абелевой выпуклой l-подгруппой l-группы $\langle L, + \rangle$. Поэтому по определению 1 факторгруппа L/J линейно упорядочена, то есть J является спрямляющей l-подгруппой l-группы L (см. определение в [3. С. 50]). В силу соответствующей теоремы для l-групп (см., например, [3, гл. III, § 3, теорема 1]) получаем, что $a \wedge b \notin J$.

Обратно, пусть для любых $a, b \in L \backslash J$, $a, b > 0$ верно, что $a \wedge b \notin J$. Тогда J является спрямляющей l-подгруппой l-группы $\langle L, + \rangle$ (см. [3, гл. III, § 3, теорема 1]). Отсюда по определению спрямляющей подгруппы (см. [3. С. 50]) следует, что факторгруппа L/J линейно упорядочена, что по определению 1 влечет линейную упорядоченность l-алгебры Ли L/J. Таким образом, J — спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L.

Следствие 2. l-идеал l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем K является спрямляющим тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $a, b \in L$ таких, что $a \wedge b \in J$ и $a \notin J$ верна принадлежность $b \in J$.

Доказательство. Пусть J — спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L, $a, b \in L$ — произвольные положительные элементы такие, что $a \notin J$ и $a \wedge b \in J$. Предположим, что $b \notin J$. Тогда по теореме 3 из того, что J — спрямляющий l-идеал, для элементов $a, b \in L \backslash J$, $a > 0$, $b > 0$ справедливо соотношение $a \wedge b \notin J$, что приводит нас к противоречию. Итак, $b \in J$.

Пусть $a, b \in L \backslash J$ и $a > 0$, $b > 0$. Предположим, что $a \wedge b \in J$. Так как $a, b \in L$, $a > 0$, $b > 0$ и $a \notin J$, $a \wedge b \in J$, то из условия следствия получаем $b \in J$, что противоречит условию $b \notin J$.

Итак, для любых $a, b \in L \backslash J$, $a > 0$, $b > 0$ верно, что $a \wedge b \notin J$. По теореме 3 отсюда следует, что J — спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L. Следствие доказано.

Для дальнейшего изложения свойств спрямляющих идеалов l-алгебр Ли нам понадобятся следующие леммы. Для элемента a l-алгебры Ли L будем обозначать через na $(n \in \mathbf{N})$ сумму $na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}$.

Лемма 2. В l-алгебре Ли L над частично упорядоченным полем K для любых элементов $x, y \in L$ выполняется соотношение $|[x, y]| \leqslant 9|x|$.

Доказательство. Из свойств положительной части и модуля элемента в предложении 1, используя соотношения из предложения 2, получаем неравенства $|[x^+, y]| \leqslant x^+$ и $\left|[|x|, y]\right| \leqslant |x|$, верные для любых $x, y \in L$.

Также с помощью предложения 1 можно вывести следующее равенство $|[x, y]| = \left|[x^+ + x^+ - |x|, y^+ + y^+ - |y|]\right| = \left|4[x^+, y^+] - 2[x^+, |y|] + 2[y^+, |x|] + [|x|, |y|]\right|$, откуда $|[x, y]| \leqslant 4|[x^+, y^+]| + 2\left|[x^+, |y|]\right| + 2\left|[|x|, y^+]\right| + \left|[|x|, |y|]\right|$.

Из данного неравенства и неравенств, полученных выше, следует требуемое соотношение: $|[x, y]| \leqslant 4x^+ + 2x^+ + 2|x| + |x| \leqslant 6|x| + 3|x| = 9|x|$.

Лемма 3. Пусть L — l-алгебра Ли над линейно упорядоченным полем K. Если J — l-идеал в L и $a \in L$, $a > 0$, то множество $C = \{y \in L \mid |y| \wedge a \in J\}$ является l-идеалом l-алгебры Ли L, содержащим J.

Доказательство. Пусть $y \in J$, тогда, в силу того, что J — l-идеал, имеем $|y| \in J$. Поскольку $0 \leqslant |y| \wedge a \leqslant |y|$, то из выпуклости идеала J получаем, что $|y| \wedge a \in J$, поэтому $y \in C$. Таким образом, $J \subseteq C$.

Покажем, что C — l-идеал в L. Действительно, пусть $y \in C$ и $z \in C$, тогда обозначим $0 \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$ и $0 \leqslant |z| \wedge a = c_2 \in J$. Рассмотрим $|y - z| \wedge a$. Тогда по предложению 1 и определению точной нижней грани имеем $|y - z| \wedge a \leqslant (|y| + |z|) \wedge a \leqslant (|y| + |z|) \wedge (a + |y| \wedge 0) = (|y| + |z|) \wedge (|y| + a) \wedge a = (|y| + (|z| \wedge a)) \wedge a = (|y| + c_2) \wedge a \leqslant (|y| + c_2) \wedge (a + c_2) = c_2 + (|y| \wedge a) = c_2 + c_1 \in J$. Исходя из задания множества C и выпуклости J, видно, что $y - z \in C$, то есть C — подгруппа в L.

Далее, из леммы 1 следует, что $|\lambda y| \wedge a = |\lambda| |y| \wedge a$. Так как поле K линейно упорядочено, то можно утверждать, что $|\lambda| \geqslant 1$ или $|\lambda| \leqslant 1$. Если $|\lambda| \geqslant 1$, то $|\lambda| - 1 \geqslant 0$ и по пункту 2 определения 1 получаем, что $|\lambda| a \geqslant a$. Отсюда по определению точной нижней грани элементов, используя лемму 1, заключаем, что $|\lambda y| \wedge a = |\lambda|\,|y| \wedge a \leqslant |\lambda|\,|y| \wedge |\lambda| a = |\lambda|(|y| \wedge a) = |\lambda| c_1 \in J$. Если же $|\lambda| \leqslant 1$, то по пункту 2 определения 1 получаем, что $|\lambda|\,|y| \leqslant |y|$, поэтому $|\lambda y| \wedge a = |\lambda|\,|y| \wedge a \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$. Таким образом, учитывая выпуклость J, в каждом из двух этих случаев получаем, что $\lambda y \in C$, следовательно, C — подпространство в L.

Если $l \in L$, то из леммы 2 следует неравенство $|[y,l]| \leqslant 9|y|$. Отсюда по определению точной нижней грани заключаем, что $|[y,l]| \wedge a \leqslant 9|y| \wedge a = (8|y| + |y|) \wedge (a + 8|y| \wedge 0) = (8|y| + |y|) \wedge (a + 8|y|) \wedge a = (8|y| + (|y| \wedge a)) \wedge a = (8|y| + c_1) \wedge a \leqslant (8|y| + c_1) \wedge (a + c_1) = c_1 + (8|y| \wedge a)$. Продолжая подобным образом, получим, что $|[y,l]| \wedge a \leqslant 9c_1 \in J$, следовательно, из выпуклости идеала J и задания множества C имеем: $[y,l] \in C$, то есть C — идеал в L.

Пусть $l \in L$, $y \in C$ и $|l| \leqslant |y|$. В этом случае $|l| \wedge a \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$, откуда, в силу выпуклости идеала J и задания множества C, заключаем, что $l \in C$. По предложению 3 отсюда следует, что C — l-идеал в l-алгебре Ли L.

Доказательство теоремы 2. Пусть I — спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L и A, B — произвольные l-идеалы в L, содержащие I. Тогда по определению 3 факторалгебра L/I линейно упорядочена, а по определению l-идеала I, A и B являются абелевыми выпуклыми l-подгруппами l-группы $\langle L; +\rangle$, при этом выпуклые l-подгруппы $\langle A; +\rangle$ и $\langle B; +\rangle$ содержат $\langle I; +\rangle$. По определению 1 факторгруппа L/I линейно упорядочена, поэтому $\langle I; +\rangle$ является спрямляющей l-подгруппой l-группы $\langle L; +\rangle$. Следовательно, используя соответсвующую теорему для l-групп (см., например, [3, гл. III, § 3, теорема 2]), получаем, что для l-подгрупп $\langle A; +\rangle$ и $\langle B; +\rangle$ выполнено одно из соотношений $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$. Значит, те же соотношения выполнены и для l-идеалов A и B, содержащих l-идеал I.

Обратно, пусть множество l-идеалов l-алгебры Ли L, содержащих l-идеал I, линейно упорядочено по включению. Предположим, что I не является спрямляющим l-идеалом. Тогда по теореме 3 найдутся элементы $a, b > 0$, $a, b \in L \backslash I$ такие, что $a \wedge b \in I$. Рассмотрим подмножества A и B в L, построенные следующим образом: $A = \{x \in L \mid |x| \wedge b \in I\}$ и $B = \{x \in L \mid |x| \wedge a \in I\}$. По лемме 3, примененной к l-идеалу I и элементам $a, b \in L$, $a, b > 0$, получаем, что A и B — l-идеалы в L, содержащие I. Покажем, что A и B несравнимы по включению. Действительно, так как $a > 0$ в L, то $|a| = a$, поэтому $|a| \wedge b = a \wedge b \in I$, откуда, в силу задания множества A следует, что $a \in A$. При этом $a \notin B$, так как в противном случае $|a| \wedge a = a \wedge a = a \in I$, что противоречит тому, что $a \notin I$. Итак, $a \in A$ и $a \notin B$, следовательно $A \nsubseteq B$. Аналогично доказывается, что $b \in B$ и $b \notin A$, и поэтому $B \nsubseteq A$. Поскольку A, B — l-идеалы в L, содержащие I и A, B несравнимы по включению, то мы приходим к противоречию. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство следствия 1. Пусть I — произвольный спрямляющий l-идеал l-алгебры Ли L. Рассмотрим множество U_I всех l-идеалов l-алгебры Ли L, содержащих I. По теореме 2 множество U_I линейно упорядочено по включению. Покажем, что множество U_I лежит во множестве спрямляющих l-идеалов l-алгебры Ли L. Рассмотрим любой элемент $A \in U_I$, то есть l-идеал A в L такой, что $A \supset I$. Если B_1, B_2 — произвольные l-идеалы в L, содержащие A, то $B_1 \supset I$ и $B_2 \supset I$. Отсюда по теореме 2, из того, что I является спрямляющим l-идеалом, следует, что $B_1 \subseteq B_2$ или $B_2 \subseteq B_1$. Таким образом, множество всех l-идеалов в L, содержащих l-идеал A, линейно упорядочено по включению, поэтому по теореме 2 A — спрямляющий l-идеал в L. Следствие доказано.

Теоремы 2 и 3 показывают, что спрямляющие l-идеалы l-алгебр Ли над частично и линейно упорядоченными полями обладают хорошими свойствами.

Литература

[1] Копытов, В.М. Упорядочение алгебр Ли / В.М. Копытов // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11. – №3. – С. 295–325.

[2] Копытов, В.М. Решеточно упорядоченные алгебры Ли / В.М. Копытов // Сиб. матем. ж. – 1977. – Т. XVIII. – №3. – С. 595–607.

[3] Копытов, В.М. Решеточно упорядоченные группы / В.М. Копытов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

[4] Медведев, Н.Я. О решетках многообразий решеточно упорядоченных групп и алгебр Ли / Н.Я. Медведев // Алгебра и логика. – 1977. – Т. 16. – №1. – С. 40–45.

[5] Медведев, Н.Я. О продолжении порядков алгебр Ли / Н.Я. Медведев // Сиб. матем. ж. – 1977. – Т. XVIII. – №2. – С. 469–471.

[6] Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М.: Мир, 1965. – 343 с.

[7] Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984. – 568 с.

[8] Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфрис; пер. с англ. Б.Р. Френкина. – М.: МЦНМО, 2003. – 216 с.

[9] Кочетова, Ю.В. О естественном гомоморфизме решеточно упорядоченных алгебр Ли / Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова // Тезисы докл. Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского. Самара, 21–25 мая, 2007 г. – С. 29–30.

Поступила в редакцию 17/IX/2007;
в окончательном варианте — 17/IX/2007.

ON PROPERTIES OF IDEALS OF LATTICE-ORDERED LIE ALGEBRAS

© 2007 J.V. Kochetova[2]

In the paper the properties of partial-ordered Lie algebras over various fields are studied. Examples of directed Lie algebras, lattice-ordered Lie algebras and linearly-ordered Lie algebras are given. Results concerned with the properties of l-ideals of lattice-ordered Lie algebras over partial ordered fields are obtained.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Kochetova Julia Viktorovna, Dept. of Algebra, Moscow State Pedagogical University, Moscow, 107140, Russia.