

УДК 512.7

РАЗЛОЖЕНИЕ $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ В ПРЯМУЮ СУММУ ПОДАЛГЕБР ЛИ КАК ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

© 2007 Е.И. Коновалова¹

В работе получена классификация всех разложений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в сумму двух пространств таких, что каждое из них является подалгеброй Ли. Классификация реализована с точностью до действия группы автоморфизмов. Решение сформулированной задачи дает классификацию решений МУВЕ для $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, представимых как разность двух проекторов.

Введение

Определение 1.1 Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{f}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{f}'$, если существует $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ такой, что $\mathfrak{f} = \varphi(\mathfrak{f}')$.

Пусть имеется два разложения алгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в прямую сумму двух подалгебр как линейных подпространств: $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}'_1 \dot{+} \mathfrak{g}'_2$. Во избежание двойного пересчета везде далее будем считать, что $\dim \mathfrak{g}_1 \leq \dim \mathfrak{g}_2$ ($\dim \mathfrak{g}'_1 \leq \dim \mathfrak{g}'_2$).

Определение 1.2 Будем говорить, что два разложения сопряжены, если существует $\Phi \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ такой, что $\Phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}'_1$ и $\Phi(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}'_2$.

Основная цель работы — получить классификацию разложений $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в прямую сумму двух подалгебр как линейных подпространств с точностью до сопряжения. Решение этой задачи дает классификацию решений Модифицированного уравнения Янга–Бакстера (МУВЕ), представимых как разность 2-х проекторов [1].

Основной результат сформулирован в теореме 2.5. Доказательство теоремы вытекает из утверждений 2.2–2.4.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $G = \text{SL}(3, \mathbb{C})$, $A = \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}^x = \{y \in \mathfrak{g} : [y, x] = 0\}$ — централизатор элемента x в алгебре $\mathfrak{g}$, $G^x = \{g \in G : \text{Ad}_g(x) = x\}$ — централизатор элемента x в группе G , $\text{Norm}_{\mathfrak{g}}(K) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, K] \subset K\}$ — нормализатор подпространства K алгебры $\mathfrak{g}$, $\text{Norm}_A k = \{g \in A : gkg^{-1} \subset k\}$ — нормализатор подалгебры k в группе A ,

¹Коновалова Елена Игоревна (lenita@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$ — стандартный базис в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$, $h_{12} = e_{11} - e_{22}$, $h_{13} = e_{11} - e_{33}$, $h_{23} = e_{22} - e_{33}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, $\mathfrak{n}_{\pm}$ — подалгебра верхне (нижне) треугольных нильпотентных матриц, $\mathfrak{b}_{\pm}$ — подалгебра верхне (нижне) треугольных матриц (подалгебра Бореля), $\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}$ — нильпотентная подалгебра, $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{C}h_{12} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$ и $\mathfrak{A}'_1 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}(e_{21} + e_{32})$ — полупростые подалгебры, $\mathfrak{p}' = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathfrak{p}}' = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ — подалгебра, сопряженная $\mathfrak{p}'$ относительно внешнего автоморфизма, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}_+ + e_{21}$ — параболическая подалгебра, $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}_+ + e_{32}$ — параболическая подалгебра, сопряженная $\mathfrak{p}$ относительно внешнего автоморфизма, E — единичная матрица, E' — матрица с единицами по побочной диагонали.

1. Классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ с точностью до сопряжения вытекает из [2] и может быть сформулирована в виде предложения:

Предложение 1.1. *Всякая подалгебра $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{f} \geq 2$ сопряжена в смысле определения 1.1 одной из следующих подалгебр:*

1. $\mathfrak{h}$.
2. $\mathfrak{f}_1^2 = \mathbb{C}(h_{12} - h_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$.
3. $\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}$.
4. $\mathfrak{f}_2^2 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$.
5. $\mathfrak{f}_3^2 = \mathbb{C}(\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \lambda_3 e_{33}) + \mathbb{C}e_{13}$, для некоторых λ_i , таких что $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\sum \lambda_i = 0$, две подалгебры вида $\mathfrak{f}_3^2$ сопряжены, если два набора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ отличаются ненулевым множителем или если два набора симметричны относительно λ_2 .
6. $\mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}$.
7. $\mathfrak{f}_5^2 = \mathbb{C}(h_{13} + h_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$.
8. $\mathfrak{f}_6^2 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23})$.
9. $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{C}h_{12} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$.
10. $\mathfrak{A}'_1 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}(e_{21} + e_{32})$.
11. $\mathfrak{n}_+$ — подалгебра верхнетреугольных нильпотентных матриц.
12. $\mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
13. $\mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C}h_0$, где $h_0 \in \mathfrak{h}$, $h_0 \neq 0$.
14. $\mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{13}$.
15. $\mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}h_{13}$.
16. $\mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$.
17. $\mathfrak{f}_2^4 = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$.

18. $f_3^4 = n_+ + Ch_0$, для некоторого $h_0 \in \mathfrak{h}$, $h_0 \neq 0$.
19. $\mathfrak{b}_+$.
20. $\mathfrak{p}'$.
21. $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра.

2. Разложение $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в прямую сумму двух подалгебр

Изложим общую схему классификации. Пусть $\mathfrak{g}_1$ одна из подалгебр из формулировки предложения 1.1, такая что $\dim \mathfrak{g}_1 \leq 4$.

Определение 2.1. Подалгебру $\mathfrak{g}_2$ назовем дополнительной к $\mathfrak{g}_1$, если $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Обозначим через $X_{\mathfrak{g}_1}$ множество дополнительных подалгебр к $\mathfrak{g}_1$.

Разобьем задачу классификации на следующие две задачи:

Задача А. Выяснить для каких $\mathfrak{g}_1$ множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ пусто. Если $X_{\mathfrak{g}_1} \neq \emptyset$ дать описание $X_{\mathfrak{g}_1}$.

Задача В. Обозначим через $A_{\mathfrak{g}_1} = \text{Norm}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{g}_1$. Описать орбиты присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \rightarrow X_{\mathfrak{g}_1}$.

Множество пар $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, где $\mathfrak{g}_1$ — одна из подалгебр теоремы 2.1 размерности меньше 5, а $\mathfrak{g}_2$ — представитель $A_{\mathfrak{g}_1}$ -орбиты в $X_{\mathfrak{g}_1}$, является полным списком всех разложений $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 \leq \mathfrak{g}_2$ с точностью до сопряжения.

Размерность подалгебры $\mathfrak{g}_1$ может быть равна 1, 2, 3 или 4. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Случай 1. $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$. Из предложения 2.1 следует, что у алгебры $\mathfrak{g}$ нет подалгебр размерности 7, следовательно, разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, где $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 7$ невозможно.

Случай 2. Пусть $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 6$.

Утверждение 2.2. Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 6$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма подалгебр как линейных подпространств. Утверждается, что:

А. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ не пусто.

В. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, кроме подалгебры сопряженной f_4^2 , существует ровно одна орбита присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \rightarrow X_{\mathfrak{g}_1}$. Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена f_4^2 существуют две орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$.

С. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$ две подалгебры такие, что $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$. Тогда пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ сопряжена одной из следующих пар:

1. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathfrak{g}_1 = f_1^2 = \mathbb{C}(h_{12} - h_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^2 = \mathbb{C}(\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \lambda_3 e_{33}) + \mathbb{C}e_{13}$, для некоторых λ_i , таких что $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}$, где $T = E'$.

$$5. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}, \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}, \text{ где } T = E'.$$

$$6. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}, \mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_5^2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}, \mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$8. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_6^2 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}), \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Пункт А. Пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_2$ сопряжена параболической подалгебре $\mathfrak{p}$. Подалгебра $\mathfrak{g}_2$ $Ad_{SL(3, \mathbb{C})}$ -сопряжена $\mathfrak{p}$ или $\widetilde{\mathfrak{p}}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно внешнего автоморфизма $F(X) = -\check{X}$ ($X \in SL(3, \mathbb{C})$, $\check{X}$ — транспонирование относительно побочной диагонали), то можно считать, что $\mathfrak{g}_2$ сопряжена относительно $SL(3, \mathbb{C})$ подалгебре $\mathfrak{p}$. То есть $\mathfrak{g}_2$ — стабилизатор двумерного подпространства: $\mathfrak{g}_2 = \text{stab} W$, где $W \subset \mathbb{C}^3, \dim W = 2$. Пусть $W =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ где } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ — базис } W. \text{ Обозначим через } M_{12} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ — плюккеровы координаты } W.$$

Для разложения в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \text{stab} W$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{h} \cap \text{stab} W = \{0\}$. Пусть $h \in \mathfrak{h} \cap \text{stab} W$: $h = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$,

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и $\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \beta a_2 \\ \gamma a_3 \end{pmatrix} \in W, \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \beta b_2 \\ \gamma b_3 \end{pmatrix} \in W$. Следовательно,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ a_2 & b_2 & \beta a_2 & \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma a_3 & \gamma b_3 \end{pmatrix} = 2 \text{ и } M_{123}^{123} = M_{123}^{124} = 0. \text{ Раскладывая миноры по}$$

последнему столбцу и учитывая, что $h \in \mathfrak{h}$, получаем систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha a_1 M_{23} - \beta a_2 M_{13} + \gamma a_3 M_{12} = 0, \\ \alpha b_1 M_{23} - \beta b_2 M_{13} + \gamma b_3 M_{12} = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) тогда и только

тогда, когда определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_1 M_{23} & -a_2 M_{13} & a_3 M_{12} \\ b_1 M_{23} & -b_2 M_{13} & b_3 M_{12} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -M_{12} \cdot M_{23} \cdot M_{13} \neq 0.$$

Следовательно, $\text{stab} W \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ тогда и только тогда, когда

$$M_{12} \neq 0, M_{23} \neq 0, M_{13} \neq 0. \quad (1)$$

Пункт В. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$.

Обозначим через $G_{\mathfrak{h}} = \{g \in \text{SL}(3, \mathbb{C}) | \text{Ad}_g \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}$, $\check{F}(X) = -\check{X}$, $X \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$. Тогда $A_{\mathfrak{h}} = G_{\mathfrak{h}} \cup G_{\mathfrak{h}} \cdot \check{F}$.

Дополнительная подалгебра $\mathfrak{g}_2$ сопряжена относительно $A_{\mathfrak{h}}$ подалгебре

$\text{stab} W$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle$, с условиями (1). Покажем, что все подпространства, удовлетворяющие (1), сопряжены относительно $G_{\mathfrak{h}}$.

Можно считать, что $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle$, где $a_3, b_3 \neq 0$. Элемент $g_1 =$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \text{ принадлежит } G_{\mathfrak{h}}, \text{ тогда}$$

$$\text{Ad}_{g_1}(W) = \left\langle \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \\ a_3 x_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_{22} \\ a_3 x_{33} \end{pmatrix} \right\rangle \sim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_3 \frac{x_{33}}{x_{11}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b_3 \frac{x_{33}}{x_{22}} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пункт С. Можно найти $g \in A_{\mathfrak{h}}$ такой, что

$$g(\text{stab} W) = \text{stab} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Следовательно, пара } (\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_2) \text{ сопряжена паре}$$

$$(\mathfrak{h}, \text{stab} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle).$$

Аналогично для $\mathfrak{g}_1$, равной одной из подалгебр размерности 2 из предложения 1.1.

Случай 3. $\dim \mathfrak{g}_1 = 3$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 5$.

Утверждение 2.3. Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 3$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 5$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма подалгебр как линейных подпространств. Утверждается, что:

А. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 3$, множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ не пусто.

В. Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{n}_+$ или $\mathfrak{A}'_1$, то существует одна орбита присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \rightarrow X_{\mathfrak{g}_1}$. Для всех остальных подалгебр $\mathfrak{g}_1$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 3$, существует две орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$.

С. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 3$, две подалгебры такие, что $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$.

Тогда пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ сопряжена одной из следующих пар:

1. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_2 = \widetilde{\mathfrak{p}}'$.
2. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$, $\gamma_0 \neq 0$, $\mathfrak{g}_2 = \widetilde{\mathfrak{p}}'$.
3. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}'T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}'T^{-1}$, где $T = E'$.
5. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1} = \mathfrak{b}_-$, где $T = E'$.
6. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1} = \mathfrak{b}_-$, где $T = E'$.
10. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$, $\alpha_0 \neq \beta_0$, $\mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
12. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство.

Пункт А. Пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_+$. Как следует из классификации подалгебр, $\mathfrak{g}_2$ сопряжена либо $\mathfrak{p}'$, либо $\mathfrak{b}_+$. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

1. Пусть $\mathfrak{g}_2$ сопряжена $\mathfrak{p}'$. Подалгебра $\mathfrak{g}_2$ $Ad_{SL(3, \mathbb{C})}$ -сопряжена $\mathfrak{p}'$ или $\widetilde{\mathfrak{p}}'$. Поскольку $\mathfrak{n}_+$ инвариантна относительно внешнего автоморфизма $F(X) = -\check{X}$ ($X \in SL(3, \mathbb{C})$), то можно считать, что $\mathfrak{g}_2$ сопряжена относительно $SL(3, \mathbb{C})$ подалгебре $\mathfrak{p}'$. То есть $\mathfrak{g}_2$ определяется условиями:

- 1) $\mathfrak{g}_2 = \text{stab} W$, где W — двумерное подпространство $\mathbb{C}^3$: $W = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle$;
- 2) $\rho^*(W^\perp) = 0$, где ρ — естественное представление $\mathfrak{g}_2$ в $\mathbb{C}^3 = V$, $W^\perp = \{\lambda \in V^* | \lambda|_W = 0\}$.

Условие 1) является следствием условия 2).

Для разложения в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_2$ (подалгебра $\mathfrak{g}_2$ $\text{Ad}_{\text{SL}(3, \mathbb{C})}$ -сопряжена $\mathfrak{p}'$) необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Возьмем произвольный элемент $n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}_+$.

Условие $\rho^*(W^\perp) = 0$ можно записать в виде $\bar{v} \cdot n = 0$, где $\bar{v}$ из $W^\perp$ представлен (1×3) -строкой, знак $\cdot$ — произведение матриц. Это условие равносильно уравнению $(M_{23}, -M_{13}, M_{12}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, после выполнения умножения матриц получаем однородную систему относительно (α, β, γ) :

$$\begin{cases} \alpha M_{23} = 0, \\ \beta M_{23} - \gamma M_{13} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система всегда имеет ненулевое решение, поэтому $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$, следовательно, разложение $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в прямую сумму подалгебр, сопряженных $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{p}'$ невозможно.

2. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{g}_2$ сопряжена $\mathfrak{b}_+$, тогда $\mathfrak{g}_2$ — это стабилизатор флага $\text{Flag} = \{W_1 \subset W, \text{ где } \dim W_1 = 1, \dim W = 2\}$, $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle$,

$W = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle$, где $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ — базис W .

Для разложения в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_2$ (подалгебра $\mathfrak{g}_2$ сопряжена $\mathfrak{b}_+$) необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Возьмем элемент $n \in \mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2$: $n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \in \text{stab} W_1$, $n \in \text{stab} W$.

Для того чтобы $n \in \text{stab} W_1$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы:

$$\begin{cases} a_2(\alpha a_2 + \beta a_3) = 0, \\ a_3(\alpha a_2 + \beta a_3) = 0, \\ \gamma a_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Дальнейшие рассуждения разделим на два случая:

а) $a_3 = 0$, тогда система (3) равносильна $\begin{cases} a_3 = 0, \\ \alpha a_2 = 0. \end{cases}$ Заметим, что $n \in \text{stab} W$

тогда и только тогда, когда $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & ab_2 + \beta b_3 \\ a_2 & b_2 & \gamma b_3 \\ 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = 2$, что равносильно выполнению уравнения: $b_3(\gamma a_1 - \beta a_2) = 0$. Это уравнение имеет ненулевое решение (α, β, γ) , поэтому в этом случае $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$;

б) $a_3 \neq 0$, тогда система (3) равносильна $\begin{cases} \gamma = 0, \\ a_3 \neq 0, \\ \alpha a_2 + \beta a_3 = 0. \end{cases}$ Элемент n при-

надлежит $\text{stab}W$ тогда и только тогда, когда $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & ab_2 + \beta b_3 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = 2$,

что равносильно $(ab_2 + \beta b_3)M_{23} = 0$. Если $M_{23} = 0$, то $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$, иначе имеет место система: $\begin{cases} ab_2 + \beta b_3 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta a_3 = 0. \end{cases}$ Поскольку $M_{23} \neq 0$, то эта система имеет только нулевое решение, следовательно, $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $a_3 \neq 0$ и $M_{23} \neq 0$.

Окончательно получаем, что $\text{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{n}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_2$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$a_3 \neq 0, M_{23} \neq 0. \quad (4)$$

Пункт В-С. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_+$.

Обозначим через $G_{\mathfrak{n}_+} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, x_{11}x_{22}x_{33} = 1 \right\}$, $\check{F}(X) = -\check{X}$, $X \in$

$\text{SL}(3, \mathbb{C})$. Тогда $A_{\mathfrak{n}_+} = G_{\mathfrak{n}_+} \cup G_{\mathfrak{n}_+} \cdot \check{F}$.

Дополнительная подалгебра $\mathfrak{g}_2$ сопряжена относительно $A_{\mathfrak{n}_+}$ подалгебре stabFlag , $\text{Flag} = \{W_1 \subset W\}$ с условиями (4). Покажем, что все подпространства, удовлетворяющие (4), сопряжены относительно $G_{\mathfrak{n}_+}$.

Можно считать, что $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Элемент $g_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}$, $x_{11}x_{22}x_{33} = 1$ принадлежит $G_{\mathfrak{n}_+}$, тогда

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{g_1}(W) &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1x_{11} + a_2x_{12} + x_{13} \\ a_2x_{22} + x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1x_{11} + x_{12} \\ x_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \sim \\ &\sim \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \frac{x_{11}}{x_{33}} + a_2 \frac{x_{12}}{x_{33}} + \frac{x_{13}}{x_{33}} \\ a_2 \frac{x_{22}}{x_{33}} + \frac{x_{23}}{x_{33}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \frac{x_{11}}{x_{22}} + \frac{x_{12}}{x_{22}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Можно найти $g \in A_{\mathfrak{n}_+}$ такой, что $g(\text{stab}W_1) = \text{stab} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $g(\text{stab}W) =$

$= \text{stab} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Следовательно, $A_{\mathfrak{n}_+}$ имеет в $X_{\mathfrak{n}_+}$ одну орбиту и пара $(\mathfrak{n}_+, \mathfrak{g}_2)$ сопряжена паре $(\mathfrak{n}_+, T\mathfrak{b}_+T^{-1}) = (\mathfrak{n}_+, \mathfrak{b}_-)$, где $T = E'$.

Аналогично для $\mathfrak{g}_1$, равной одной из подалгебр размерности 3 из предложения 1.1.

Случай 4. Осталось рассмотреть случай, когда $\dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_2 = 4$. В соответствие с теоремой 1.1, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ имеет три подалгебры размерности 4: $\mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{f}_2^4 = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ + \mathbb{C}h_0$, для некоторого $h_0 \in \mathfrak{h}$, $h_0 \neq 0$, и, соответственно, шесть возможных пар подалгебр.

Утверждение 2.4 Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_2 = 4$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма подалгебр как линейных подпространств. Утверждается, что:

А. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 4$, множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ не пусто.

В. Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{f}_1^4$, то существует две орбита присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \rightarrow X_{\mathfrak{g}_1}$. Если $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{f}_2^4$ или $\mathfrak{f}_3^4$, то существует три орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$.

С. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_2 = 4$, две подалгебры такие, что $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$. Тогда пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ сопряжена одной из следующих пар или паре, которая получается перестановкой слагаемых:

$$1. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}, \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^4 = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}, \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ + \mathbb{C} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}, \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_3^4T^{-1}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5. \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ + h_1, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{n}_- + h_2, \text{ где } h_1, h_2 \in \mathfrak{h}, h_1 \neq \mathbb{C}h_2.$$

Из утверждений 2.2–2.4 вытекает теорема:

Теорема 2.5 Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{g}_1 \leq \dim \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма подалгебр как линейных подпространств. Тогда существует $\Phi \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ такой, что пара подалгебр $(\mathfrak{g}'_1, \mathfrak{g}'_2) = (\Phi(\mathfrak{g}_1), \Phi(\mathfrak{g}_2))$ совпадает с одной из пар из утверждений 2.2–2.4.

Литература

- [1] Рейман, А.Г. Интегрируемые системы / А.Г. Рейман, М.А. Семенов-Тянь-Шанский. – М.;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [2] Баранник, А.Ф. Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3, \mathbb{R})$ / А.Ф. Баранник, Ю.Д. Москаленко, В.И. Фущич. – Препринт 89-65, Киев, Математический институт Академии Наук Украины, 1989.

Поступила в редакцию 19/X/2007;
в окончательном варианте — 19/X/2007.

$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ DECOMPOSITION INTO A SUM OF TWO LIE SUBALGEBRAS

© 2007 E.I. Konovalova²

In this paper we obtain a classification of all decompositions of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ into a sum of two subspaces such that each of them is a Lie subalgebra. The classification is realized up to action of the group of automorphisms. The solution of formulated problem gives a classification of all solutions of MYBE for $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ represented as a subtraction of two projectors.

Paper received 19/X/2007.
Paper accepted 19/X/2007.

²Konovalova Elena Igorevna (lenita@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.