УДК 512.7

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БИНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

© 2007 В.Г. Журавлев, Ю.Ю. Евсеева[1]

Дается обзор арифметических свойств количества представлений натуральных чисел многоклассными бинарными положительно определенными квадратичными формами. Рассмотрены двуклассные, трехклассные, четырехклассные формы, а так же циклические формы произвольного порядка.

Введение

Работа посвящена изучению свойств представлений натуральных чисел бинарными квадратичными формами. Пусть m — натуральное число, $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — положительно определенная бинарная квадратичная форма с отрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, и пусть $r(f,m)$ равно количеству решений уравнения

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

в целых числах $x, y \in \mathbb{Z}$. Задача о количестве представлений $r(f,m)$ является классической задачей теории чисел и была изучена Гауссом. Еще ранее Ферма рассматрел задачу о представлении натурального числа m в виде суммы двух квадратов целых чисел $x^2+y^2 = m$. Подробная история изучения данного вопроса описана в монографии Диксона [1].

Для одноклассных квадратичных форм $f(x,y)$ число представлений вычисляется по формуле [2]

$$r(f,m) = e(D)\rho(m), \tag{1}$$

где $e(D)$ — число целых автоморфизмов формы $f(x,y)$, $\rho(m)$ — мультипликативная функция, определенная на степенях простых чисел следующим образом

$$\rho(p^\alpha) = \alpha + 1 \ \text{ для } \ \chi_1(p) = +1;$$

$$\rho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2 \mid \alpha \\ 0, & \text{если } 2 \nmid \alpha \end{cases} \quad \text{для } \ \chi_1(p) = -1; \tag{2}$$

[1]Журавлев Владимир Георгиевич (vzhuravlev@mail.ru), Евсеева Юлия Юрьевна (ula_79@rambler.ru), кафедра алгебры и теории чисел Владимирского государственного педагогического университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр-т Строителей, 11.

$$\rho(p^{\alpha}) = 1 \text{ для } \chi_1(p) = 0.$$

В этих формулах $\chi_1(p)$ — характер Дирихле мнимого квадратичного поля дискриминанта D ([2] стр.265). Формула (1) также позволяет найти количество представлений натурального числа всеми формами данного дискриминанта. В случае $h > 1$ задача о количестве представлений чисел квадратичными формами была решена для некоторых форм специального вида в [3].

В данной работе рассмотрен случай неодноклассных бинарных квадратичных форм с числом классов $h = 2, 3, 4$, а так же — общий циклический случай. Если h — простое число, то группа классов бинарных квадратичных форм циклическая. Если же, например, $h = 4$, то необходимо разделять формы на циклические и нециклические. Результаты представленные в работе, получены с помощью операторов Гекке [4]. Здесь мы дадим краткий обзор основных арифметических свойств представлений натуральных чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами.

Авторы выражают глубокую благодарность за предоставленную возможность выступить с докладом организаторам Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского.

1. Двуклассные формы

Рассмотрим случай двуклассных бинарных квадратичных форм. Пусть $C_0 = \{f_0\}$ и $C_1 = \{f_1\}$ — различные классы форм дискриминанта D. Формы f_0 класса C_0 представляют 1. Обозначим через $r(f_i, m)$ $(i = 0, 1)$ число решений уравнения $f_i(x, y) = m$ в целых числах $x, y \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Для количества представлений $r(f_i, m)$ в случае $h = 2$ справедливы следующие равенства*

$$r(f_0, m) = (1 + \varkappa_1(m))\rho(m), \tag{3}$$

$$r(f_1, m) = (1 - \varkappa_1(m))\rho(m), \tag{4}$$

где $\varkappa_1(m)$ — вполне мультипликативная функция, для простых p с $\chi_1(p) = +1$ или 0 задаваемая равенствами

$$\varkappa_1(p) = \begin{cases} 1, \text{если } r(f_0, p) > 0, \\ -1, \text{если } r(f_1, p) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Если $h = 2$ и число m представимо хотя бы одной из форм f_0 или f_1, т.е. m не содержит простых делителей p с $\chi_1(p) = -1$ в нечетной степени, то данное число m представимо только одной из указанных форм.*

Например, для дискриминанта $D = -20$ существует два класса бинарных квадратичных форм $C_0 = \{f_0(x, y) = x^2 + 5y^2\}$ и $C_1 = \{f_1(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2\}$. Форма $f_0(x, y)$ представляет 1: $f_0(1, 0) = 1$. Согласно теореме 1, количество представлений натуральных чисел вида $m = 5^{\alpha} m'$ $(5 \nmid m')$ для форм данных классов вычисляется по формулам

$$r(f_0, m) = \Big(1 + \Big(\frac{m'}{5}\Big)\Big)\rho(m), \tag{6}$$

$$r(f_1, m) = \Big(1 - \Big(\frac{m'}{5}\Big)\Big)\rho(m), \tag{7}$$

где $\left(\frac{m'}{5}\right)$ — символ Лежандра. Поскольку $\left(\frac{m'}{5}\right) = \pm 1$, то из формул (6), (7) следует, что m представимо только одной из форм f_0 или f_1, при условии $\rho(m) \neq 0$.

2. Трехклассные формы

При $h = 3$ классы бинарных квадратичных форм удобно пронумеровать следующим образом: C_0, C_1, C_2, $C_i = \{f_i\}$ $(i = 0, 1, 2)$. Группа классов форм является циклической относительно операции гауссовой композиции форм:

$$C_i * C_j = C_{i+j \ (\mathrm{mod}\ 3)}. \tag{8}$$

Характеры этой группы имеют вид $\varkappa_i(C_j) = \varepsilon^{i+j}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ — примитивный корень третьей степени из 1.

Теорема 3. *В случае трехклассных бинарных квадратичных форм, имеют место следующие формулы для количества представлений* $r(f_i, m)$ *натуральных чисел* m*:*

$$r(f_0, m) = \frac{2}{3}(\widehat{\varkappa_0}(m) + 2\widehat{\varkappa_1}(m)), \tag{9}$$

$$r(f_1, m) = r(f_2, m) = \frac{2}{3}(\widehat{\varkappa_0}(m) - \widehat{\varkappa_1}(m)), \tag{10}$$

где $\widehat{\varkappa_i}(m)$ — *мультипликативные функции, определяемые формулами*

$$\widehat{\varkappa_0}(m) = \rho(m) = \sum_{\delta | m} \chi_1(\delta), \tag{11}$$

$$\widehat{\varkappa_1}(p^\alpha) = \rho(p^\alpha) \quad \text{для } \chi_1(p) = -1, 0 \ \text{ или } \chi_1(p) = +1 \ \text{ и } \varkappa_1(p) = +1, \tag{12}$$

$$\widehat{\varkappa_1}(p^\alpha) = \varepsilon(\alpha) \ \text{ для } \chi_1(p) = +1 \ \text{ и } \varkappa_1(p) \neq +1. \tag{13}$$

В этих формулах $\varepsilon(\alpha)$ *задается следующим образом*

$$\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3), \\ -1, & \text{если } \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 3), \\ 0, & \text{если } \alpha \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 3). \end{cases} \tag{14}$$

Используя теорему 3 можно доказать следующие арифметические свойства для представлений натуральных чисел трехклассными квадратичными формами.

Теорема 4. *Для числа решений* $r(f_j, m^3)$ *диофантова уравнения* $f_j(x, y) = m^3$ $(j = 0, 1, 2)$*, где* m — *любое натуральное число, справедливо следующее свойство ассиметрии*

$$r(f_0, m^3) \geqslant r(f_i, m^3) \ \text{ для } i = 1, 2. \tag{15}$$

В следующей теореме приведено условие, при котором натуральное число m представляется только одной трехклассной формой.

Теорема 5. *Если m не делится ни на какое простое число p, представляемое квадратичной формой f_1, то*

$$\begin{cases} r(f_0, m) = 2\rho(m), \\ r(f_1, m) = r(f_2, m) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

С другой стороны, существуют натуральные числа m, для которых количества представлений трехклассными квадратичными формами равны.

Теорема 6. *1) Пусть p — простое число, $p \nmid D$, $f_1(x, y) = p$. Тогда для любого натурально m взаимно простого с p, и $\alpha = 3\alpha' + 2$ с $\alpha' = 0, 1, 2, ...$ справедливо равенство*

$$r(f_0, p^\alpha m) = r(f_i, p^\alpha m) = \frac{2}{3}\rho(m) \ \ (i = 1, 2) \tag{17}$$

2) Если m представляется формой f_0 и f_1, и в разложении m на степени простых чисел содержится $p^{3\alpha+2}$, где $\chi_1(p) = +1$ и p представимо формой f_1, то

$$r(f_0, m) = r(f_i, m) = \frac{2}{3}\tau_D(m') \ \ (i = 1, 2), \tag{18}$$

где $m'|m$ состоит из степеней p^α с $\chi_1(p) = +1$ и

$$\tau_D(m') = \sum_{\delta|m'(\delta,D)=1} 1. \tag{19}$$

Теорема 7. *Если $h = 3$, то дискриминант квадратичных форм*

$$D = -p, \ \ \text{где } p \text{ — простое число}, \ \ p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{20}$$

Данное простое число p представимо формой f_0.

3. Четырехклассные формы

Любая группа их четырех классов форм являетя циклической или прямой суммой двух циклических групп второго порядка. В соотвествии с этим будем разбивать четырехклассные бинарные квадратичные формы на два случая: циклический и нециклический.

Циклический случай. Пусть группа классов бинарных квадратичных форм четвертого порядка циклическая относительно операции гауссовой композиции:

$$\left\{C_0, C_1, C_2, C_3 : C_i * C_j = C_{i+j \ (\mathrm{mod}\ 4)}\right\}. \tag{21}$$

Введем новую функцию

$$a(p) = i, \ \text{если} \ \ f_i(x, y) = p. \tag{22}$$

Будем говорить, что m обладает свойством СВ.1, если найдется такое простое число p, что

$$\chi_1(p) = +1, \ \ a(p) = 1 \ \text{ и } \ p^\alpha \| m \ \text{ с } \ \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2). \tag{23}$$

Аналогично, число m обладает свойством CB.2, если

$$\chi_1(p) = +1,\ a(p) = 1 \text{ и } p^\alpha \| m \text{ с } \alpha \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \tag{24}$$

Далее, m удовлетворяет свойству CB.3, если из условия

$$p^\alpha \| m \text{ с } \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) \text{ следует } \chi_1(p) = 0 \text{ или } +1. \tag{25}$$

Используя вышеуказанные определения сформулируем следующие результаты, касающиеся четырехклассных циклических форм.

Теорема 8. *Для циклических четырехклассных бинарных квадратичных форм и натурального $m \in CB.3$ условие $m \in CB.1$ равносильно равенству*

$$r(f_0, m) = r(f_2, m). \tag{26}$$

При этом возможны 2 случая:

$$r(f_0, m) = r(f_2, m) = \rho(m) \text{ и } r(f_1, m) = r(f_3, m) = 0, \tag{27}$$

или

$$r(f_0, m) = r(f_2, m) = 0 \text{ и } r(f_1, m) = r(f_3, m) = \rho(m). \tag{28}$$

Теорема 9. *Для представлений m циклическими четырехклассными формами условие*

$$r(f_0, m) = 0 \text{ или } r(f_2, m) = 0 \tag{29}$$

выполняется тогда и только тогда, когда m не делится на простое p с $\chi_1(p) = +1$ и $a(p) = 1$, где $a(p)$ — функция (22).

Теорема 10. *В циклическом случае при $h = 4$ имеют место неравентва для $m \in CB.3$:*

$$r(f_i, m) \neq r(f_j, m) \text{ для } i \neq j = 0, 1, 2 \tag{30}$$

тогда и только тогда, когда $m \notin CB.1$ и $m \in CB.2$.

Теорема 11. *Не существует натурального числа m, представимого всеми четырехклассными циклическими квадратичными формами данного дискриминанта:*

$$r(f_i, m) > 0 \text{ для любого } i = 0, 1, 2, 3. \tag{31}$$

Теорема 12. *Для четырехклассных циклических квадратичных форм справедливо утверждение: если p — простое число с $\chi_1(p) = +1$, $a(p) = 1$, то*

$$r(f_0, p^2) = 2\ ,\ r(f_2, p^2) = 4, \tag{32}$$
$$r(f_1, p^2) = r(f_3, p^2) = 0.$$

Нециклический случай. Пусть группа классов бинарных квадратичных форм четвертого порядка нециклическая. Тогда удобно использовать следующую нумерацию: $\{C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}\}, C_{i,j} = \{f_{i,j}\}$. В этих обозначениях гауссова композиция записывается в виде

$$C_{i,j} * C_{k,l} = C_{i+k, j+l \ (\mathrm{mod}\ 2)}.$$

Теорема 13. *Натуральное число m, удовлетворяющее CB.3, представляется одной и только одной нециклической четырехклассной бинарной квадратичной формой $f_{i,j}(x, y)$ и число представлений равно*

$$r(f_{i,j}, m) = 2\rho(m). \tag{33}$$

4. Циклические формы

Пусть группа классов бинарных квадратичных форм циклическая порядка h:

$$\{C_0, C_1, ..., C_{h-1} : C_i * C_j = C_{i+j \pmod h}\}.$$

Фиксируем для натурального m разложение на множители

$$m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_- \tag{34}$$

с взаимнопростыми m_0, m_+, m_- вида

$$m_0 = r_1^{\gamma_1} \cdots r_e^{\gamma_e} \quad \text{с} \quad \chi_1(r_i) = 0, \tag{35}$$

$$m_+ = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad \text{с} \quad \chi_1(p_i) = +1, \tag{36}$$

$$m_- = q_1^{\delta_1} \cdots q_f^{\delta_f} \quad \text{с} \quad \chi_1(q_i) = -1. \tag{37}$$

Далее, пусть

$$\delta_1 \equiv \cdots \equiv \delta_f \equiv 0 \pmod 2. \tag{38}$$

На множестве простых p с условием $\chi_1(p) = 0$ или $+1$ введем функцию

$$a(p) = i, \quad \text{если} \quad r(f_i, p) > 0 \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant h/2. \tag{39}$$

Теорема 14. *Для циклических форм нечетного порядка h количество представлений $r(f_i, m)$ числа $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ (34) с условием, что m_- удовлетворяет сравнениям (38), не зависит от множителей m_0, m_-.*

Теорема 15. *Предположим, что группа классов форм циклическая, h нечетное и для $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ в множитель m_+ (36) входит степень $p_i^{\alpha_i}$ с Н.О.Д.$(a(p_i), h)$=1 и $\alpha_i \equiv h - 1 \pmod h$. При этих условиях выполняются равенства*

$$r(f_0, m) = r(f_1, m) = ... = r(f_{h-1}, m). \tag{40}$$

Если m_- дополнительно удовлетворяет условию (38), то

$$r(f_i, m) = \frac{e(D_1)}{h}(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_n + 1) \ \text{для} \ 0 \leqslant i \leqslant h - 1. \tag{41}$$

Если $h = p$ — нечетное простое число, то достаточно потребовать существование степени $p_i^{\alpha_i} | m_+$ с $a(p_i) \neq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

Литература

[1] Dickson, L.E. History of the theory of numbers. Quadratic and higher forms / L.E. Dickson. – N.Y., 1992. – V. 3. – 313 p.

[2] Боревич, З.И. Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1984. – 504 с.

[3] Buel, D.A. Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations / D.A. Buel. – N.Y., 1989. – 247 p.

[4] Журавлев, В.Г. Элементарная теория Гекке / В.Г. Журавлев. – Владимир: ВГПИ, 1988. – 28 с.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 17/*IX*/2007.

ARITHMETIC PROPERTIES OF NATURAL NUMBER' REPRESENTATIONS BY BINARY QUADRATIC FORMS

© 2007 V.G. Zhuravlev, Yu.Yu. Evseeva[2]

In the paper a review of the arithmetical properties of representations of natural numbers by binary positive defined quadratic forms is given. The cases of two-, three-, and four-class forms are considered. The forms with a cyclic class group are also discussed.

Paper received 17/*IX*/2007.
Paper accepted 17/*IX*/2007.

[2]Zhuravlev Vladimir Georgievich (vzhuravlev@mail.ru), Evseeva Yuliya Yurievna (ula_79@rambler.ru), Dept. of Algebra and Number Theory, Vladimir State Pedagogical University, Vladimir, 600024, Russia.