

УДК 512.7

О (p, n) -ПРОБЛЕМЕ© 2007 А.В. Гришин, Л.М. Цыбуля¹

В данной работе изучается строение унитарно замкнутого T -пространства W_n , порожденного всеми n -словами в относительно свободной алгебре $F^{(3)} = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle / I$, где k — бесконечное поле характеристики $p > 0$, а I — T -идеал, порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$. В W_n указана бесконечная неприводимая система порождающих. В связи с этим рассмотрены бесконечные серии бесконечно базисуемых T -подпространств в W_n . Выявлена особенность случая $p = 2$. Кроме того, исследуется мультипликативная структура T -пространства W_n .

Введение

Понятие T -пространства, введенное одним из авторов настоящей работы около 20 лет назад, уже прочно вошло в обиход современной комбинаторной алгебры и теории PI-колец. С его помощью был решен ряд достаточно долго остававшихся открытыми проблем. Это в первую очередь такие проблемы конечной базисуемости, как проблема Мальцева, проблема Шпехта в положительной характеристике и т.д. Интересно, что аппарат T -пространств оказался одинаково эффективным как при доказательстве положительных утверждений, так и при построении контрпримеров.

Для удобства читателя напомним основные определения.

Итак, пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра над полем k и T — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры F .

Эндоморфизм τ алгебры F , определяемый соответствием $x_i \mapsto g_i$, где $g_i \in F$, $i = 1, 2, \dots$, будем называть *подстановкой типа* $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i, \dots)$. В тех случаях, когда применяется подстановка типа $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g_i, x_{i+1}, \dots)$, мы будем писать для краткости $\tau: x_i \mapsto g_i$, $\tau \in T$. Через f^τ обозначим образ многочлена f из алгебры F относительно подстановки τ . В полугруппе T можно рассматривать подполугруппы подстановок различных типов: регулярные, симметрические и т.д. (см. [1,2]).

¹Гришин Александр Владимирович (alex@grishin.mcsme.ru), Цыбуля Лилия Михайловна, кафедра алгебры Московского педагогического государственного университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

Следуя [1] и [3], назовем векторное подпространство V алгебры F T -пространством, если V замкнуто относительно подстановок (т.е. из $f \in V$ и $\tau \in T$ следует, что $f^\tau \in V$). Обозначим через S^T T -пространство, порожденное подмножеством S некоторого T -пространства. Другими словами, S^T есть минимальное T -пространство, содержащее S . Назовем T -пространство *конечнопорожденным*, если для некоторого его конечного подмножества S оно совпадает с S^T .

По определению T -идеал алгебры F — это ее идеал, являющийся одновременно и T -пространством.

Хорошо известно взаимнооднозначное соответствие между многообразиями ассоциативных алгебр, T -идеалами алгебры F и относительно свободными алгебрами, т.е. факторалгебрами алгебры F по соответствующему T -идеалу.

Очевидным образом определяется правое действие полугруппы T на любой относительно свободной алгебре, на которой, следовательно, также можно ввести понятие T -пространства.

Если k — коммутативное кольцо с единицей, то аналогичным образом можно ввести понятие T -модуля (T -группы, если $k = \mathbb{Z}$).

Ясно, что любое T -пространство в относительно свободной алгебре естественным образом наделяется структурой унитарного правого kT -модуля (kT — полугрупповая k -алгебра). Это приводит к следующему определению, существенно обобщающему предыдущее определение T -пространства.

Назовем T -пространством (абстрактным) над полем k любой унитарный правый kT -модуль.

Соответственно, морфизмами T -пространств являются гомоморфизмы их как kT -модулей.

Как и выше через S^T обозначается T -пространство, порожденное подмножеством S в некотором T -пространстве.

Расширяя таким образом понятие T -пространства, мы освобождаемся от необходимости рассматривать только подпространства в относительно свободных алгебрах. Можно рассматривать еще и фактор- T -пространства, прямые суммы и т.д. Кроме того, имеется большой запас примеров T -пространств иной природы, связанных со следами, квазимногочленами и некоторыми другими специальными конструкциями (см. [1,2]).

Встречающиеся ниже T -пространства обладают, как правило, еще и мультипликативной структурой. В связи с этим введем следующие определения.

Назовем алгебру A над полем k T -алгеброй, если A — унитарный правый kT -модуль (т.е. T -пространство), на котором элементы полугруппы T действуют как эндоморфизмы алгебры A . Идеалы алгебры A , являющиеся T -алгебрами, будем называть T -идеалами.

Ясно, что данные определения обобщают классические понятия свободной алгебры и T -идеала.

Пусть I — произвольный T -идеал алгебры F (возможно, нулевой). Относительно свободная алгебра F/I является, очевидно, циклическим kT -модулем, порожденным любой из своих переменных. Согласно результатам одного из авторов (см. [1,2]), если k — поле нулевой характеристики, а идеал I содержит многочлен Капели

$$c_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \dots x_{\sigma(n)} y_n,$$

то этот циклический модуль нетеров. В качестве следствия получается конечная базированность любого T -идеала, содержащего многочлен Капели. Позже В.В. Щиголев доказал (см. [4]), что всякие условия на T -идеал I можно отбросить, т.е. $F = \{x_1\}^T$ — нетеров kT -модуль. Положительное решение проблемы Шпехта (см. [5]) является, как легко видеть, весьма частным случаем этого факта. Пусть $\mathfrak{C}$ — класс kT -модулей, порожденный циклическим модулем F и замкнутый относительно взятия подмодулей, фактормодулей и конечных прямых сумм. Назовем $\mathfrak{C}$ *классом комбинаторных модулей*. Будем называть *комбинаторными модулями* T -пространства из $\mathfrak{C}$. В частности, *комбинаторные T -алгебры* — это T -алгебры из класса $\mathfrak{C}$. Из сказанного выше следует, что в случае поля нулевой характеристики любой комбинаторный модуль нетеров. В характеристике $p > 0$ это не так. Первые контрпримеры, в частности, в характеристике 2 были приведены одним из авторов в [6,7]. Вслед за этим последовала целая серия конструкций в характеристике $p > 2$ (см. [8–10]). Построение общей теории комбинаторных модулей, как представляется, еще впереди. Наиболее полный обзор по теории T -пространств, ее результатам и открытым вопросам можно найти в работах [2,11].

В настоящей работе изучаются T -пространства в относительно свободной алгебре $F^{(3)} = F/I$, где I — T -идеал, порожденный «тройным коммутатором» $[[x_1, x_2], x_3]$ (так называемое тождество Грассмана). Образы свободных переменных алгебры F в относительно свободной алгебре $F^{(3)}$ будем обозначать также, как и сами переменные. Кроме того, часть переменных иногда для удобства обозначается буквами y_i, z_i . Всюду ниже k — *бесконечное* поле характеристики $p > 0$. В дальнейшем в основном рассматриваются *унитарно замкнутые* T -пространства в алгебре $F^{(3)}$, т.е. такие T -пространства, которые замкнуты относительно подстановки вместо переменной единицы с последующей проекцией на алгебру $F^{(3)}$ (отбрасывание свободного члена).

Приведем точные определения. Пусть $F\langle 1 \rangle = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — свободная счетнопорожденная ассоциативная k -алгебра с единицей. Она может быть естественным образом представлена в виде прямой суммы T -пространств

$$F\langle 1 \rangle = F \oplus k$$

с тривиальным действием полугруппы T на поле k (т.е. $\alpha^T = \alpha$, $\alpha \in k$). Расширим полугруппу операторов T , действующих на алгебре F , следующим образом. Пусть $\varepsilon: F \hookrightarrow F\langle 1 \rangle$ — вложение, $\pi: F\langle 1 \rangle \rightarrow F$ — проекция. Назовем

унитарным преобразованием алгебры F отображение $\varphi = \varepsilon\tau\iota: F \rightarrow F$, где τ — некоторый эндоморфизм алгебры $F\langle 1 \rangle$ (действие справа). Через T^e обозначим полугруппу, порожденную унитарными преобразованиями.

Легко видеть, что всякий эндоморфизм алгебры F является ее унитарным преобразованием. Обратное, вообще говоря, неверно. В самом деле, пусть τ — эндоморфизм алгебры $F\langle 1 \rangle$, задаваемый соответствием: $x_1 \mapsto f + 1$, $x_2 \mapsto g + 1$, где $f, g \in F$, на остальных переменных — тождественно. Тогда, если $\varphi = \varepsilon\tau\iota$, то $(x_1x_2)^\varphi = fg + f + g$, а $x_1^\varphi x_2^\varphi = fg$. Таким образом, имеют место строгие включения: $T \subset T^e$, $kT \subset kT^e$.

Назовем *унитарно замкнутым T -пространством* (T^e -пространством) любое векторное подпространство алгебры F , замкнутое относительно действия полугруппы T^e . Такие T -пространства естественно рассматривать, как kT^e -модули, что и будет делаться в дальнейшем.

Легко видеть, что в характеристике 2 T -пространство, порожденное x_1^2 , унитарно замкнуто, а T -пространство, порожденное x_1^{10} , не унитарно замкнуто (с помощью унитарных преобразований можно понизить степень).

Унитарно замкнутый T -идеал (T^e -идеал) — это идеал алгебры F , являющийся одновременно и T^e -пространством. Примером унитарно замкнутого T -идеала может служить T -идеал, порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$, а T -идеал, порожденный многочленом $x_1[x_2, x_3]$, таковым не является. Отметим еще, что если $\tau: x_1 \mapsto 1$ и $\varphi = \varepsilon\tau\iota$, то $x_1^\varphi = 0$.

Аналогично изложенному выше вводятся T^e -пространства, T^e -идеалы в относительно свободных алгебрах, соответствующих унитарно замкнутым T -идеалам, а также абстрактные T^e -пространства и T^e -алгебры.

Для подмножества S некоторого T^e -пространства обозначим через S^{T^e} порожденное этим подмножеством T^e -пространство. Унитарно замкнутое T -пространство V характеризуется равенством $V^{T^e} = V$.

При построении контрпримеров в характеристике p чрезвычайно важную роль (из бесконечно базлируемых T -пространств потом строятся бесконечно базлируемые T -идеалы) играет T -пространство, порожденное всеми n -словами. Под n -словом понимается любой одночлен алгебры F (и, соответственно, алгебры $F^{(3)}$), содержащий каждую из входящих в него переменных с кратностью n . Основным объектом для нас будет унитарно замкнутое T -пространство W_n , порожденное всеми n -словами в алгебре $F^{(3)}$. Все известные в настоящее время примеры бесконечно базлируемых T -пространств (и T -идеалов), лежащих в относительно свободных алгебрах, происходят из W_n .

Весьма актуальной представляется следующая задача ((p, n) -проблема (см. [11])): описать структуру T^e -пространства W_n , найти порождающие элементы. Впервые исследование структурных вопросов в данных T -пространствах было предпринято в работах [12, 13]. Если $(n, p) = 1$, то ответ очевиден: $W_n = F^{(3)} = \{x_1\}^{T^e}$ — циклический kT^e -модуль. В самом деле, достаточно к элементу x_1^n применить подстановку $x_1 \mapsto x_1 + 1$ и выделить линейную

часть. Если же n делится на p , то возникает достаточно содержательная теория, имеющая свою специфику в случае $p = 2$.

Ниже приводятся последние результаты по указанной проблеме.

1. Предварительные обозначения, определения и результаты

Отметим основные соотношения в алгебре $F^{(3)}$, применяемые при вычислениях в T^e -пространстве W_n (см. [8]).

I. Коммутаторные соотношения:

$$[x_1, x_2][x_1, x_3] = 0,$$

$$[x_1^p, x_2] = 0 \text{ в характеристике } p.$$

II. Соотношения Фробениуса:

$$(x_1 + \dots + x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} + \dots + x_r^{p^l}; (x_1 \dots x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} \dots x_r^{p^l}$$

в характеристике $p > 2$ для любого $l \in N$ или $p = 2$ при $l > 1$.

Напомним, что первое равенство из коммутаторных соотношений является, как нетрудно проверить, следствием тождества «тройного коммутатора», а второе получается прямыми вычислениями, использующими также указанное тождество и условие на характеристику поля.

Для удобства читателя приведем доказательства соотношений Фробениуса, из которых станет ясно, почему характеристика 2 имеет свои особенности.

Итак, рассмотрим первое равенство из соотношений II для случая $p > 2$, $l \in N$.

Достаточно доказать его справедливость для двух переменных при $l = 1$. В этом случае однородный многочлен $b = (x_1 + x_2)^p$ можно представить в виде суммы $b = \sum_{\sigma_m} b_{\sigma_m}$, где b_{σ_m} — полиоднородный многочлен типа $\sigma_m = (p - m, m)$, $m = \overline{0, p}$.

Докажем, что $b_{\sigma_m} = 0$ для любого $m = \overline{1, p-1}$. Для $m = 1$, как нетрудно проверить, при $p > 2$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} b_{\sigma_1} &= x_1^{p-1}x_2 + x_1^{p-2}x_2x_1 + \dots + x_1x_2x_1^{p-2} + x_2x_1^{p-1} = \\ &= px_1^{p-1}x_2 + \frac{p(p-1)}{2}x_1^{p-2}[x_2, x_1] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Линеаризуя соотношение $x_1^{p-1}x_2 + x_1^{p-2}x_2x_1 + \dots + x_1x_2x_1^{p-2} + x_2x_1^{p-1} = 0$, получаем:

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} = 0. \quad (2)$$

Осуществим в многочлен $\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$ ряд подстановок: $x_i \mapsto x_1$, $i = \overline{1, p-m}$, $x_j \mapsto x_2$, $j = \overline{p-m+1, p}$ (на $p-m$ мест, которые занимают первые $p-m$ переменных, ставится x_1 , на остальные m мест, которые занимают

следующие m переменных, ставится x_2). После такой замены, как легко видеть, получается многочлен $(p-m)!m!b_{\sigma_m}$. Т.к. $\overline{(m, p)} = 1$, то, используя (1) и (2), получаем, что $b_{\sigma_m} = 0$ для любого $m = \overline{1, p-1}$ при $p > 2$. Отсюда следует, что

$$(x_1 + x_2)^p = x_1^p + x_2^p.$$

Пусть теперь $p = 2$, $l > 1$. Нетрудно видеть, что при $l = 2$ имеет место равенство $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + x_2^4$. Далее, индукцией по l легко показать, что $(x_1 + x_2)^{2^l} = x_1^{2^l} + x_2^{2^l}$.

Рассмотрим второе равенство из соотношений II. Достаточно показать, что оно справедливо для двух переменных. Нетрудно проверить, что в алгебре $F^{(3)}$ имеет место следующее равенство:

$$x_1^n x_2^n = (x_1 x_2)^n + \frac{n(n-1)}{2} x_1^{n-1} x_2^{n-1} [x_1, x_2] \quad (3)$$

для любого $n \in N$. Из этого равенства при $n = p^l$ для любой характеристики p и любого натурального значения l , кроме случая $p = 2$, $l = 1$, получаем справедливость 2-го соотношения Фробениуса для двух переменных.

Замечание 1. В характеристике $p = 2$, $l = 1$ получим:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2]; (x_1 x_2)^2 = x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 [x_1, x_2],$$

т.е. соотношения Фробениуса места не имеют.

Приведенные выше рассуждения фактически и объясняют специфику случая характеристики 2.

Для исследования строения элементов T^e -пространства W_n воспользуемся соотношениями I. Как нетрудно проверить, любое n -слово в алгебре $F^{(3)}$ с помощью этих соотношений с точностью до переобозначения можно представить в виде линейной комбинации многочленов следующего вида:

$$g_{r,s}(n) = x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \dots x_r^{n-1} y_r^{n-1} [x_r, y_r] z_1^n \dots z_s^n,$$

где r и s — всевозможные целые неотрицательные числа, причем при $r = 0$ отсутствуют x_i, y_i (чисто степенные многочлены), а при $s = 0$ отсутствуют z_i ; $g_{0,0}(n) = 0$. Многочлены $g_{r,s}(n)$, у которых $r \geq 1$, будем называть *коммутаторными*. Кроме того, выделим так называемые *чисто коммутаторные* многочлены $c_r(n) = g_{r,0}(n)$ и чисто степенные, называемые еще *диагональными*, $d_s(n) = g_{0,s}(n)$. Отметим, что $c_1(1) = [x_1, y_1]$, $d_1(1) = x_1$.

Одночлены $d_s(n)$ диагональны в смысле следующих определений.

Пусть w — произвольное n -слово от m переменных в свободной алгебре F . Назовем j -й координатой переменной x_i , $i = \overline{1, m}$, число переменных в n -слове, отличных от x_i и стоящих до j -го вхождения переменной x_i . n -слово w по переменной x_i определяется набором из n j -ых координат $(a_1, \dots, a_n)$, $a_1, \dots, a_n \in Z_+$, переменных x_i , стоящих на j -ых местах слова w . Числа $a_1, \dots, a_n$ будем называть *координатами n -слова w по переменной x_i* или будем говорить, что n -слово w имеет координаты $(a_1, \dots, a_n)$ по переменной x_i и обозначать $w_{x_i} = (a_1, \dots, a_n)_{x_i}$. Например, если $w = x_1^2 x_2 x_3 x_2 x_3$ —

2-слово, то $w_{x_1} = (0, 0)_{x_1}$, $w_{x_2} = (2, 3)_{x_2}$, $w_{x_3} = (3, 4)_{x_3}$. Слова, которые имеют равные между собой координаты по каждой из входящих в него переменных x_i , мы называем *диагональными*. Ясно, что n -слово w является диагональным тогда и только тогда, когда имеет следующий вид: $w = x_1^n \dots x_m^n$.

Таким образом, введенные в этом пункте определения поясняют дальнейший выбор обозначений.

Итак, рассмотрим следующие унитарно замкнутые T -подпространства в W_n .

$C_n = \{c_1(n), \dots, c_i(n), \dots\}^{T^e}$ — чисто коммутаторная компонента;

$D_n = \{d_1(n), \dots, d_i(n), \dots\}^{T^e}$ — диагональная компонента;

$CD_n = \{g_{r,s}(n) \mid r \geq 1\}^{T^e}$ — коммутаторная компонента.

Тогда $C_1 = \{c_1(1)\}^{T^e}$ — T^e -пространство, $CD_1 = C = (c_1(1))^{T^e}$ — T^e -идеал (коммутант алгебры $F^{(3)}$), порожденные одним коммутатором.

Аналогичные T -пространства $C_n^* = \{c_1(n), \dots, c_i(n), \dots\}^T$, $D_n^* = \{d_1(n), \dots, d_i(n), \dots\}^T$, $CD_n^* = \{g_{r,s}(n) \mid r \geq 1\}^T$, вообще говоря, меньше и несколько более сложно устроены. Исключение: $D_{p^l} = D_{p^l}^*$.

В следующих пунктах настоящей работы мы исследуем структуру T^e -пространства W_n , используя введенные выше компоненты этого пространства.

Начнем с некоторых вспомогательных фактов, которые потребуются в дальнейшем. Справедливы следующие утверждения (см. [8]).

Лемма 1. Многочлен $x^{p^s-1}y^{p^s-1}[x, y] \notin \{x^{p^t-1}y^{p^t-1}[x, y] \mid t = \overline{1, s-1}\}^{T^e}$.

Лемма 2. Если $f_1, f_2, f_3, f_4 \in F^{(3)}$ — произвольные многочлены, зависящие только от двух переменных, то

$$[f_1, f_2][f_3, f_4] = 0.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Для любого простого числа p в алгебре $F^{(3)}$ $[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_i, y_i] \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Рассмотрим 2 случая.

1) $p > 2$. В алгебре Грассмана $G = k\langle e_1, \dots, e_n, \dots \rangle / \{e_i e_j + e_j e_i \mid i, j \in N\}$, как известно, выполнено тождество $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. С другой стороны, в алгебре G выполняется $[e_1, e_2][e_3, e_4] \dots [e_{n-1}, e_n] = 2^{n/2} e_1 \dots e_n \neq 0$, что показывает справедливость утверждения леммы для данного случая.

2) $p = 2$. В этом случае рассматривается алгебра Φ_2 , на которой также выполнено тождество $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, и которая является аналогом алгебры Грассмана в характеристике 2 (см. [12]). Алгебра Φ_2 строится следующим образом. Пусть $A = k[\dots \alpha_{ij} \dots]$ — коммутативная k -алгебра, порожденная элементами α_{ij} , где $i, j \in N, i \neq j, \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, (1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{il}) = 0, (1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{mn}) = (1 + \alpha_{im})(1 + \alpha_{jn})$. Алгебра $\Phi_2 = A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle / J$, где J — идеал свободной A -алгебры $A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, порожденный элементами $x_i x_j + \alpha_{ij} x_j x_i$. Алгебра F естественным образом вложена в алгебру $A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, а алгебра $F^{(3)}$ — в алгебру Φ_2 .

Положим $\theta_{ij} = 1 + \alpha_{ij}$. Идеал J в таком случае порождается элементами $\theta_{ij}x_jx_i + [x_i, x_j]$. Таким образом, из определения идеала J следует, что $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2i-1}, x_{2i}] = \theta_{12} \cdots \theta_{(2i-1)(2i)} x_2 x_1 \cdots x_{2i} x_{2i-1} \neq 0$. Отсюда получаем справедливость утверждения леммы 3 при $y_j = x_{2j}$ для всех $j = 1, 2, \dots, i$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Для любого $i \geq 2$ многочлен $c_i(p^l)$ не лежит в T^e -пространстве $\{c_1(p^l), \dots, c_{i-1}(p^l)\}^{T^e} + (x^m)^T$, где $(x^m)^T$ — T -идеал, порожденный x^m , $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$.

Доказательство. Предположим сначала, что $p > 2$, $l \geq 1$ или $p = 2$, $l > 1$. Допустим, что

$$c_i(p^l) = (c_1(p^l))^{\tau_1} + \dots + (c_{i-1}(p^l))^{\tau_{i-1}} + f, \quad (4)$$

где $f \in (x^m)^T$, $\tau_s \in kT^e$, $s \leq i-1$. Учитывая, что коммутатор $[u, v]$ любых двух многочленов в $F^{(3)}$ можно расписать как линейную комбинацию коммутаторов от переменных, умноженных на одночлены, каждый из многочленов $(c_s(p^l))^{\tau_s}$, где $s \leq i-1$, является линейной комбинацией произведений s коммутаторов вида $[x_i, x_j]$ и одночлена. Т.к. кратность вхождения всех переменных в левую часть равенства (4) равна p^l , то во всех многочленах $(c_s(p^l))^{\tau_s}$ имеется сомножитель вида x_r^m (хотя бы одна буква не попадает в коммутатор). Следовательно, $c_i(p^l) \in (x^m)^T$ в $F^{(3)}$.

Применяя подстановку $x \mapsto x + 1$ к каждой из входящих в $c_i(p^l)$ переменных и линеаризуя, получим из многочлена $c_i(p^l)$ произведение коммутаторов $[x_1, y_1] \cdots [x_i, y_i]$. С другой стороны, аналогичные подстановки и линеаризации многочлена из $(x^m)^T$ в силу соотношений Фробениуса дают нуль. Таким образом, $[x_1, y_1] \cdots [x_i, y_i] = 0$ в $F^{(3)}$, что противоречит лемме 3.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$, $l = 1$. Покажем, что для любого $r > 1$ многочлен $c_r(2)$ нельзя получить никакими подстановками и k -линейными действиями из предыдущих многочленов $c_1(2), \dots, c_{r-1}(2)$. Допустим противное. Заметим, что многочлен $c_r(2)$ является произведением r многочленов вида $xy[x, y]$:

$$c_r(2) = x_1 y_1 [x_1, y_1] x_2 y_2 [x_2, y_2] \cdots x_r y_r [x_r, y_r].$$

Тогда, с одной стороны, прямые вычисления с применением равенства

$$xy[x, y] = (xy)^2 - x^2 y^2 \quad (5)$$

к многочлену $c_r(2)$ показывают, что $c_r(2)$ есть линейная комбинация многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения меньшего, чем $2r$, числа квадратов переменных, и одночлена, являющегося произведением $2r$ квадратов переменных. С другой стороны, сделанное выше предположение и применение равенства (5) к элементам $c_1(2), \dots, c_{r-1}(2)$ позволяет представить многочлен $c_r(2)$ в виде линейной комбинации многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения $2r-1$ и меньшего числа квадратов переменных. Отсюда получаем, что произведение $2r$ квадратов переменных можно

получить некоторыми подстановками и k -линейными действиями из произведений меньшего, чем $2r$, числа квадратов переменных, что невозможно в силу результатов работы [6]. Следовательно, $c_r(2) \notin \{c_1(2), \dots, c_{r-1}(2)\}^{T^e}$. Добавление T -идеала $(x^4)^T$ по существу ничего не меняет из очевидных соображений степеней. Теорема 1 доказана.

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. T^e -пространство $C_{p^l} + (x^m)^T$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, является бесконечно базлируемым.

Имеет место также следующее утверждение.

Следствие 2. T^e -пространство $CD_{p^l} + (x^m)^T$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, является бесконечно базлируемым.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p > 2$, $l \geq 1$ или $p = 2$, $l > 1$. В силу второго соотношения Фробениуса достаточно рассмотреть в качестве порождающих элементов T^e -пространства CD_{p^l} многочлены $g_{r,1}(p^l) = x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1, y_1] \cdots x_r^{p^l-1}y_r^{p^l-1}[x_r, y_r]z_1^{p^l}$, $r > 0$. Допустим, что для некоторого $r > 1$ многочлен $g_{r,1}(p^l)$ лежит в T^e -пространстве $\{g_{i,1}(p^l) \mid i = \overline{1, r-1}\}^{T^e} + (x^m)^T$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$. Положив в многочлене $g_{r,1}(p^l)$ $z_1 = 1$, получим по нашему предположению, что

$$c_r(p^l) = (g_{1,1}(p^l))^{\tau_1} + \dots + (g_{r-1,1}(p^l))^{\tau_{i-1}} + f, \quad (6)$$

где $f \in (x^m)^T$, $\tau_t \in kT^e$, $t \leq i-1$. Заметим, что в общем случае вместо переменной z_1 каждого слагаемого $g_{t,1}(p^l)$ подставляется многочлен вида $u_1 + \dots + u_s + \alpha$, где $u_1, \dots, u_s \in F^{(3)}$ — некоторые многочлены без свободного члена, $\alpha \in k$. Поэтому, в силу соотношений Фробениуса каждый многочлен $(g_{t,1}(p^l))^{\tau_t}$, $t \leq i-1$, распадается на два слагаемых, одно из которых лежит в $(x^m)^T$, а другое лежит в $\{c_t(p^l)\}^{T^e}$. Тогда согласно (6) $c_r(p^l) \in \{c_1(p^l), \dots, c_{r-1}(p^l)\}^{T^e} + (x^m)^T$, что противоречит теореме 1.

Пусть теперь $p = 2$, $l = 1$. Доказательство бесконечной базлируемости CD_2 почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в теореме 1 в случае $p = 2$, $l = 1$. Добавление T -идеала $(x^4)^T$, как и выше, ничего не меняет. Следствие доказано.

Несложно показать, что справедливо

Следствие 3. T^e -пространство $(C_{p^l} + (x^m)^T)/(x^m)^T$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, является бесконечно базлируемым.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 4.

Для любого простого числа p и любого $l \in \mathbb{N}$ $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1, y_1] \notin C_{p^l}$.

Доказательство. Заметим, что многочлен $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1, y_1]$ зависит от двух переменных. Поэтому, если предположить, что $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1, y_1]$ принадлежит T^e -пространству

$$C_{p^l} = \{c_r(p^l) = x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1, y_1] \dots x_r^{p^l-1}y_r^{p^l-1}[x_r, y_r] \mid r \geq 1\}^{T^e},$$

то те слагаемые линейной комбинации, которые получаются некоторыми подстановками из многочленов $c_r(p^l)$ при $r \geq 2$, становятся равными нулю в силу леммы 2. Значит многочлен $x_1^{p^{l+1}-1} y_1^{p^{l+1}-1} [x_1, y_1] \in \{x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1]\}^{T^e}$, что противоречит лемме 1, и лемма доказана.

Для T^e -пространств C_{p^l} и CD_{p^l} имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого простого числа p и любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено

$$C_{p^l} \subsetneq CD_{p^l}, \text{ где } C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}.$$

Доказательство. Непосредственно из леммы 4 следует, что $C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}$. Далее, подставляя 1 вместо всех переменных z_i , $i = \overline{1, s}$, порождающих элементов $g_{r,s}(p^l)$ коммутаторной компоненты CD_{p^l} , получаем очевидное включение $C_{p^l} \subset CD_{p^l}$. Для доказательства строгости этого включения достаточно указать элемент из T^e -пространства CD_{p^l} , не принадлежащий в тоже время T^e -пространству C_{p^l} . В качестве такого элемента рассмотрим многочлен $x_1^{p^{l+1}-1} y_1^{p^{l+1}-1} [x_1, y_1]$. Действительно, его можно получить из многочлена $z_1^{p^l} x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \in CD_{p^l}$ следующей подстановкой $\tau: z_1 \mapsto x_1^{p-1} y_1^{p-1}$. Тогда из леммы 4 вытекает строгость включения, и предложение доказано.

2. Разложение T^e -пространства W_n на диагональную и коммутаторную составляющие

Как уже отмечалось, при $(n, p) = 1$ имеет место равенство $W_n = F^{(3)}$. Если $n = p^l n_1$, где $l \geq 1$, $(n_1, p) = 1$, то, как будет ясно из дальнейшего, $W_n = W_{p^l}$. Имеет место следующая

Теорема 2.

1. Во всех случаях, кроме $p = 2$, $l = 1$, kT^e -модуль W_{p^l} раскладывается в прямую сумму:

$$W_{p^l} = CD_{p^l} \oplus D_{p^l}. \quad (7)$$

2. При $p = 2$, $l = 1$ имеет место равенство $W_2 = D_2$, причем $C_2 \subsetneq CD_2 \subsetneq D_2$, и все указанные T^e -пространства бесконечно базиремы.

Доказательство.

1. Из соотношений I следует, что $W_{p^l} = CD_{p^l} + D_{p^l}$. Покажем, что

$$CD_{p^l} \cap D_{p^l} = \{0\}.$$

Пусть $f \in D_{p^l}$, тогда из соотношений Фробениуса и перестановочности p -ой степени переменной с любым элементом алгебры $F^{(3)}$ следует, что:

$$f = \alpha x_1^{p^l m_1} x_2^{p^l m_2} \dots x_t^{p^l m_t}, \quad (8)$$

где $\alpha \in k$, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, t}$.

Если $\alpha = 0$, то $f = 0$, и все доказано.

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда, подставляя 1 вместо всех переменных, с одной стороны, согласно (8) получаем $f(1, \dots, 1) = \alpha$, с другой стороны, $f(1, \dots, 1) = 0$, т.к. $f \in CD_{p^l}$, — противоречие. Следовательно, имеет место (7).

2. Согласно предложению 1 $C_2 \subsetneq CD_2$. Теперь покажем, что $CD_2 \subsetneq D_2$.

Применяя соотношение (5) к каждому сомножителю вида $xu[x, y]$ в многочлене $g_{r,s}(2) = x_1 y_1 [x_1, y_1] x_2 y_2 [x_2, y_2] \dots x_r y_r [x_r, y_r] z_1^2 z_2^2 \dots z_s^2$, мы получим, что любой элемент $g_{r,s}(2) \in CD_2$ представляет собой линейную комбинацию многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения некоторого числа квадратов переменных, т.е. из элементов T^e -пространства D_2 . Таким образом, справедливо включение $CD_2 \subset D_2$. Строгость включения устанавливается с помощью факторизации по тождеству коммутативности.

Из равенства $W_2 = CD_2 + D_2$, справедливого в силу соотношений I, и доказанного выше утверждения, что CD_2 — собственный подмодуль в D_2 , имеем $W_2 = D_2$. Таким образом, из результатов работы [6] следует, что W_2 — бесконечно базисуемое T^e -пространство. Бесконечная базисуемость T^e -пространств C_2 и CD_2 показана в доказательстве теоремы 1 и доказательстве следствия 2 соответственно. Теорема 2 доказана.

Отметим, что компоненты указанного в теореме 2 прямого разложения (7) имеют прямо противоположные свойства с точки зрения вопроса о конечной базисуемости. Это будет видно из приводимых ниже теорем 3 и 4.

3. Структура диагональной компоненты D_n

Отметим еще раз, что если $(n, p) = 1$, то ответ тривиален: $D_n = F^{(3)} = D_1$. Интерес представляет случай: $n = p^l n_1$, $l \geq 1$, $(n_1, p) = 1$.

Теорема 3.

1. $D_n = D_{p^l}$.

2. $D_{p^l} = \{d_1(p^l)\}^{T^e}$ при любом $p > 2$, $l \in N$ и при $p = 2$, $l > 1$.

3. $D_{p^m} \subsetneq D_{p^l}$ при $l < m$.

4. Если $p = 2$, то D_2 имеет бесконечную неприводимую систему порождающих $\{d_i(2) \mid i \in N\}$ (см. [6]).

5. При любом $p > 2$, $l \in N$ и при $p = 2$, $l > 1$ D_{p^l} изоморфно T^e -алгебре коммутативных многочленов с естественной T^e -структурой, и, следовательно, является нетеровым kT^e -модулем.

Доказательство.

1. При заданных условиях на n и p чтобы показать справедливость включения $D_n \subset D_{p^l}$, т.е. $\{x_1^n, \dots, x_1^n \cdots x_i^n, \dots\}^{T^e} \subset \{x_1^{p^l}, \dots, x_1^{p^l} \cdots x_i^{p^l}, \dots\}^{T^e}$, в каждом p^l -слове $x_1^{p^l} \cdots x_i^{p^l} \in D_{p^l}$, $i = 1, 2, \dots$, к переменным x_j , $j = 1, \dots, i$, достаточно применить подстановки: $x_j \mapsto x_j^{n_1}$.

Покажем справедливость включения $D_{p^l} \subset D_n$. Сначала укажем способ, как из x_1^n можно получить $x_1^{p^l}$. К одночлену x_1^n применим подстановку $x_1 \mapsto x_1 + 1$. Выделим из одночлена x_1^n однородную компоненту степени p^l , получим одночлен $\binom{n}{p^l} x_1^{p^l}$. Если $n = p^l n_1$, то биномиальный коэффициент $\binom{n}{p^l}$ расписывается следующим образом:

$$\binom{n}{p^l} = \binom{p^l n_1}{p^l} = \frac{p^l n_1}{p^l} \cdot \frac{p^l n_1 - 1}{p^l - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p^l n_1 - (p^l - 1)}{p^l - (p^l - 1)}.$$

Этот коэффициент содержит как дроби, числитель и знаменатель которых не делятся ни на какую степень числа p , так и дроби с противоположным свойством. Рассмотрим последние. Легко видеть, что такие дроби имеют вид $\frac{p^l n_1 - p^s a}{p^l - p^s a}$, где $p^l > p^s a$, $(a, p) = 1$, т.е. содержат в числителе и знаменателе одну и ту же степень числа p , равную p^s , тогда биномиальный коэффициент $\binom{n}{p^l}$ при $x_1^{p^l}$ не делится на p . В силу бесконечности поля k получим $x_1^{p^l} \in D_n$. Применяя к одночлену $x_1^n \dots x_i^n$, $i = 1, 2, \dots$, указанный выше способ понижения степени, получим справедливость включения, и утверждение (1) теоремы доказано.

2. Из второго соотношения Фробениуса следует, что произвольный порождающий элемент $x_1^{p^l} \dots x_s^{p^l}$, $s = 1, 2, \dots$, T^e -пространства D_{p^l} , получается подстановкой одночлена $x_1 \dots x_s$ вместо переменной x_1 в одночлен $x_1^{p^l}$, т.е. D_{p^l} — циклический kT^e -модуль.

3. Рассмотрим сначала случай $p > 2$, $l \geq 1$ или $p = 2$, $l > 1$. Согласно только что доказанному $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^{T^e}$, поэтому достаточно показать, что из $x_1^{p^l}$ можно получить $x_1^{p^m}$ при $l < m$. Для этого к одночлену $x_1^{p^l}$ нужно применить подстановку $x_1 \mapsto x_1^{p^{m-l}}$. Отсюда, $D_{p^m} \subset D_{p^l}$. Строгость включения вытекает из соотношений Фробениуса.

В случае $p = 2$, $l = 1$ включение также имеет место. Для этого нужно применить к одночленам $x_1^2 \dots x_i^2$, $i = 1, 2, \dots$, указанный выше способ повышения степени. Строгость очевидна в силу бесконечной базирюемости T^e -пространства D_2 (см. работу [6]) и доказанной конечной порожденности D_{2^m} при $m > 1$ (см. пункт (2) данной теоремы).

5. Нетеровость kT^e -модуля D_{p^l} в случае $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ и $p = 2$, $l > 1$ устанавливается с помощью его изоморфизма с T^e -алгеброй коммутативных многочленов с естественной T^e -структурой и применением результата работы [14]:

$$k[y_1, \dots, y_i, \dots] \cong D_{p^l}, \quad (9)$$

где $k[y_1, \dots, y_i, \dots]$ — нетеров kT^e -модуль.

Ясно, что $D_{p^l} = k[x_1^{p^l}, \dots, x_i^{p^l}, \dots]$, тогда изоморфизм (9) устанавливается очевидным взаимно однозначным соответствием $y_i \mapsto x_i^{p^l}$. Построенное

соответствие является изоморфизмом как kT^e -модулей в силу соотношений Фробениуса. Отметим, что при этом изоморфизме $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$ переходит в $D_{p^{l+1}}$. Теорема 3 доказана.

Пусть теперь D_n^* — не унитарно замкнутое T -пространство, порожденное той же системой одночленов, что и D_n . В следующем предложении показано, что структура D_n^* в некоторой степени отличается от структуры D_n (нет спуска от n к p^l).

Предложение 2. Во всех случаях, кроме $p = 2$, $n = 2n_1$, n_1 — нечетное, T -пространство D_n^* порождается одночленом x_1^n . Если $p = 2$, $n = 2n_1$, $(n_1, 2) = 1$, то D_n^* — бесконечно базлируемое T -пространство.

Доказательство. Покажем, что во всех случаях, кроме $p = 2$, $n = 2n_1$, n_1 — нечетное, $D_n^* = \{x_1^n\}^T$. Достаточно показать справедливость утверждения для n -слова от 2-х переменных. Рассмотрим формулу (3), о которой говорилось в пункте 1 нашей работы. Если $n = p^l n_1$, где $l \geq 1$, $(n_1, p) = 1$, кроме случая $p = 2$ и $l = 1$, то из соотношения (3) в характеристике p следует, что $x_1^n x_2^n = (x_1 x_2)^n$. Если $(n, p) = 1$, то многочлен $x_1^{n-1} x_2^{n-1} [x_1, x_2]$ можно получить из x_1^n некоторыми подстановками и k -линейными действиями. Действительно, используя формулу бинома Ньютона, раскроем выражение $(x_1 x_2 + [x_1, x_2])^n$:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 + [x_1, x_2])^n &= (x_1 x_2)^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} (x_1 x_2)^{n-1} [x_1, x_2] + \\ &+ \frac{n!}{2!(n-2)!} (x_1 x_2)^{n-2} [x_1, x_2]^2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!1!} x_1 x_2 [x_1, x_2]^{n-1} + [x_1, x_2]^n. \end{aligned}$$

Применяя первое равенство из коммутаторных соотношений при $x_2 = x_3$ к правой части выражения, получим:

$$(x_1 x_2 + [x_1, x_2])^n = (x_1 x_2)^n + n(x_1 x_2)^{n-1} [x_1, x_2].$$

Из того же равенства

$$(x_1 x_2)^{n-1} [x_1, x_2] = x_1^{n-1} x_2^{n-1} [x_1, x_2].$$

Тогда

$$x_1^{n-1} x_2^{n-1} [x_1, x_2] = \frac{(x_1 x_2 + [x_1, x_2])^n}{n} - \frac{(x_1 x_2)^n}{n}.$$

Остается подставить правую часть последнего равенства в формулу (3). Таким образом, первое утверждение предложения доказано.

В случае $p = 2$, $n = 2n_1$, где $(n_1, 2) = 1$, T -пространство $D_{2n_1}^*$, бесконечно базлируемо. Действительно, предположив противное, получим, что тогда и унитарно замкнутое T -пространство $D_{2n_1} = D_2$ конечно порождено, что противоречит результатам работы [6]. Таким образом, все утверждения предложения 2 доказаны.

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным для случая $(n, p) = 1$ в предыдущем доказательстве, нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 3. В случае поля нулевой характеристики $D_n^* = \{x_1^n\}^T$ для любого n .

Замечание 2. Легко видеть, что D_2 бесконечно базисуемо даже по модулю тождества $x^4 = 0$.

4. Структура коммутаторной компоненты CD_n

Легко видеть, что $C_n \subset CD_n$ для любого $n \in N$. Возникает вопрос о строгости этого включения. Если $n = p^l$, p — любое простое число, $l \in N$, то, как было показано в предложении 1, это включение строгое. Общий случай рассмотрен в следующей теореме, проясняющей также в некоторой степени структуру коммутаторной компоненты.

Теорема 4.

1. Если $(n, p) = 1$, то выполнены следующие равенства: $C_n = C_1 = \{[x_1, y_1]\}^{T^e}$, $CD_n = CD_1 = C = ([x_1, y_1])^{T^e}$.
2. Если $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \geq 1$, то $C_n = C_{p^l}$, $CD_n = CD_{p^l}$ — бесконечно базисуемые T^e -пространства.
3. Если $l < m$, то $C_{p^l} \subsetneq C_{p^m}$ и $CD_{p^m} \subsetneq CD_{p^l}$.
4. Для любого p и любых натуральных чисел l и m выполнены строгие включения $C_1 \subset C_{p^l} \subset CD_{p^m} \subset C$.

Доказательство.

1. Напомним, что T^e -пространство C_n порождается многочленами вида

$$c_r(n) = x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \cdots x_r^{n-1} y_r^{n-1} [x_r, y_r], \quad (10)$$

где $r = 1, 2, \dots$.

Покажем сначала, что $C_1 \subset C_n$ для любого $n \in N$. Действительно, осуществляя подстановку $x \mapsto x+1$ в каждую переменную многочлена $c_1(n) \in C_n$ и линеаризуя, получим коммутатор $c_1(1) = [x_1, y_1]$, который лежит в C_n , и включение доказано.

Включение $C_n \subset C_1$ также имеет место. Действительно, сначала из одного коммутатора $[x_1, y_1]$ получаем произведение произвольного числа r коммутаторов, для этого в коммутаторе $[x_1, y_1]$ нужно осуществить подстановку $y_1 \mapsto y_1[x_2, y_2] \cdots [x_r, y_r]$. Затем к получившемуся многочлену $[x_1, y_1] \cdots [x_r, y_r] \in C_1$ применяем подстановки: $x_j \mapsto x_j^n$, $y_j \mapsto y_j^n$, $j = \overline{1, r}$. В итоге, используя следующее соотношение

$$[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y], \quad (11)$$

справедливость которого несложно установить прямым вычислением, получаем многочлен $n^{2r} c_r(n)$. Из условия $(n, p) = 1$ имеем $c_r(n) \in C_1$ для любого $r \in N$, значит $C_n \subset C_1$. Из доказанных включений следует, что $C_n = C_1 = \{c_1(1)\}^{T^e} = \{[x_1, y_1]\}^{T^e}$.

Итак, в случае $(n, p) = 1$ справедливы равенства $D_n = D_1$ (см. пункт 3 данной работы) и $C_n = C_1$. Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что $CD_n = CD_1 = C = ([x_1, y_1])^{T^e}$.

2. Докажем, что $C_n \subset C_{p^l}$. Применим к многочлену (10) при $n = p^l$ серию подстановок: $x_i \mapsto x_i^{n_1}, y_i \mapsto y_i^{n_1}, i = 1, 2, \dots, r, r \in N$. После указанной замены и применения равенства (11) получим многочлен $n_1^{2r} c_r(n)$. По условию $(n_1, p) = 1$, значит $c_r(n) \in C_{p^l}$ для любого $r \in N$, и включение доказано.

Наконец, $C_{p^l} \subset C_n$. Действительно, применим подстановку $x \mapsto x + 1$ к каждой из входящих в многочлен $c_r(n) \in C_n, r \in N$, переменной и выделим полиоднородный многочлен степени p^l по всем переменным, получим многочлен, равный $B^{2r} c_r(p^l)$, где

$$B = \binom{n-1}{p^l-1} = \binom{p^l n_1 - 1}{p^l - 1} = \frac{p^l n_1 - 1}{p^l - 1} \cdot \frac{p^l n_1 - 2}{p^l - 2} \cdot \dots \cdot \frac{p^l n_1 - 1 - (p^l - 2)}{p^l - 1 - (p^l - 2)}.$$

Отсюда легко видеть, что B не делится на p в силу рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве утверждения (1) теоремы 3. Следовательно, $c_r(p^l) \in C_n$ для любого $r \in N$. Это означает, что верно указанное выше включение, значит имеет место первое равенство.

Из того, что $D_n = D_{p^l}$ (см. утверждение (1) теоремы 3) и $C_n = C_{p^l}$, как нетрудно видеть, следует $CD_n = CD_{p^l}$.

Из следствий 1 и 2 вытекает, что T^e -пространства C_{p^l} и CD_{p^l} бесконечно базиремы.

3. Если $l < m$, то $C_{p^l} \subsetneq C_{p^m}$. В самом деле, применим подстановку $x \mapsto x + 1$ к каждой из входящих в многочлен $c_r(p^m) \in C_{p^m}, r \in N$, переменной и выделим полиоднородный многочлен степени p^l по всем переменным, получим многочлен, равный $B^{2r} c_r(p^l)$, где

$$B = \binom{p^m - 1}{p^l - 1} = \frac{p^m - 1}{p^l - 1} \cdot \frac{p^m - 2}{p^l - 2} \cdot \dots \cdot \frac{p^m - 1 - (p^l - 2)}{p^l - 1 - (p^l - 2)}.$$

Отсюда легко видеть, что B не делится на p в силу рассуждений, аналогичных приведенным в доказательстве утверждения (1) теоремы 3. Следовательно, $c_r(p^l) \in C_{p^m}$ для любого $r \in N$, и включение доказано.

Согласно предложению 1 для любого $l \in N$ $C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}$, откуда следует строгость включения при $l < m$.

Докажем, что $CD_{p^m} \subsetneq CD_{p^l}$ при $l < m$. В силу $D_{p^m} = \{x_1^{p^m}\}^{T^e}$ достаточно рассматривать порождающие $g_{r,1}(p^m), r > 0$, коммутаторной компоненты CD_{p^m} . Покажем сначала справедливость включения. Для этого к многочлену $g_{r,1}(p^l), r > 0$, применим подстановку $z_1 \mapsto z_1^{p^{m-l}} x_1^{p^{m-l}-1} y_1^{p^{m-l}-1} \dots x_r^{p^{m-l}-1} y_r^{p^{m-l}-1}$. После этой замены и использования коммутаторных соотношений получим многочлен $g_{r,1}(p^m), r > 0$. Отсюда, $CD_{p^m} \subset CD_{p^l}$ при $l < m$.

Рассмотрим вопрос о строгости включения. Достаточно показать, что $CD_{p^l} \neq CD_{p^{l+1}}$ для любого $l \in N$. Для этого рассмотрим многочлен $f = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z_1^{p^l} \in CD_{p^l}$. Предположим, что f принадлежит T^e -пространству $CD_{p^{l+1}}$, порожденному множеством многочленов вида

$$\{x_1^{p^{l+1}-1} y_1^{p^{l+1}-1} [x_1, y_1] \dots x_i^{p^{l+1}-1} y_i^{p^{l+1}-1} [x_i, y_i] z_1^{p^{l+1}} \mid i = 1, 2, \dots\}. \quad (12)$$

Какими тогда могут быть подстановки? Проследим за диагональной частью $z_1^{p^{l+1}}$ многочленов (12). Согласно соотношениям Фробениуса достаточно рассмотреть либо только мономимальные подстановки, либо только подстановки элементов поля k вместо переменной z_1 многочленов (12). Если вместо переменной z_1 подставить некоторый одночлен $u \in F^{(3)}$, то это даст не менее p^{l+1} вхождения каждой из входящих в одночлен u переменных. С другой стороны, в многочлен f каждая его переменная входит с кратностью p^l . Поэтому остаются только подстановки некоторых элементов поля k вместо переменной z_1 многочленов (12). Тогда

$$f \in \{x_1^{p^{l+1}-1} y_1^{p^{l+1}-1} [x_1, y_1] \dots x_i^{p^{l+1}-1} y_i^{p^{l+1}-1} [x_i, y_i] \mid i \geq 1\}^{T^e} = C_{p^{l+1}},$$

Т.к. подстановкой $z_1 \mapsto x_1^{p^2-1} y_1^{p^2-1}$ из многочлена f получается многочлен $g = x_1^{p^{l+2}-1} y_1^{p^{l+2}-1} [x_1, y_1]$, то, в частности, $g \in C_{p^{l+1}}$, что противоречит лемме 4.

4. Из утверждения (3) данной теоремы и $C_{p^l} \subset CD_{p^l}$ (см. предложение 1) вытекает следующая диаграмма строгих включений:

$$\begin{array}{ccccccc} C_p & \subset & C_{p^2} & \subset & \dots & \subset & C_{p^l} \subset \dots \\ \cap & & \cap & & \dots & & \cap \\ CD_p & \supset & CD_{p^2} & \supset & \dots & \supset & CD_{p^l} \supset \dots \end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что для любых l и m имеют место строгие включения $C_{p^l} \subset CD_{p^m}$.

Выше уже отмечалось, что $C_1 \subset C_{p^l}$. Включение $CD_{p^m} \subset C$ очевидно, т.к. T^e -идеал C содержит многочлен $[x, y]z$. Строгость этих включений следует из конечной порожденности T^e -пространств C_1 и C и бесконечной базисуемости T^e -пространств C_{p^l} и CD_{p^m} . Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Из соотношений I следует, что $W_n = CD_n + D_n$. В случае $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in N$, было показано, что $D_n = D_{p^l}$, $CD_n = CD_{p^l}$ (см. утверждение (1) теоремы 3 и утверждение (2) теоремы 4). Тогда из утверждения (1) теоремы 2 о разложении kT^e -модуля W_{p^l} в прямую сумму $W_{p^l} = CD_{p^l} \oplus D_{p^l}$ следует равенство $W_n = W_{p^l}$ для любого простого числа p и любого $l \in N$, кроме $p = 2$, $l = 1$.

Таким образом, частичный ответ на (p, n) -проблему, о которой говорилось во введении, следующий.

1) Если $(n, p) = 1$, то $W_n = F^{(3)}$.

2) Если $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in N$, кроме случая $p = 2$, $l = 1$, то T^e -пространство $W_n = W_{p^l}$ имеет следующую бесконечную неприводимую систему порождающих:

$$\{x_1^{p^l}, z_1^{p^l} x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1], \dots, z_1^{p^l} x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \dots x_i^{p^l-1} y_i^{p^l-1} [x_i, y_i], \dots\}.$$

3) Если $p = 2$, $l = 1$, то $W_n = W_2 = D_2 = \{x_1^2, \dots, x_1^2 \dots x_i^2, \dots\}^{T^e}$.

Остается более детально изучить kT^e -модульное строение пространства W_{p^l} .

5. Диаграммы включений, факторпространства

Резюмируя все выше сказанное, можно построить следующие диаграммы строгих включений.

I. Пусть p — любое простое число.

Если $(n, p) = 1$, то

$$D_n = F^{(3)} \supset CD_n = CD_1 = ([x, y])^T = C \supset C_n = C_1 = \{[x, y]\}^T.$$

Для степеней p имеем:

$$D_p \supset \dots \supset D_{p^l} \supset \dots; \cap D_{p^l} = 0; C \cap D_{p^l} = 0 \text{ при любом } l > 1;$$

$$C_1 \subset C_p \subset \dots \subset C_{p^l} \subset \dots \subset \dots \subset CD_{p^l} \subset \dots \subset CD_p \subset C.$$

II. Если $p > 2$, то $C \cap D_{p^l} = 0$ при любом $l \in \mathbb{N}$.

III. Если $p = 2$, то

$$C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{2^l} \subset \dots \subset \dots \subset CD_{2^l} \subset \dots \subset CD_2 \subset \\ \subset D_2 \supset \dots \supset D_{2^l} \supset \dots$$

IV. $W_p \supset W_{p^2} \supset \dots \supset W_{p^l} \supset \dots$

В I и II пунктах диаграмм равенство $C \cap D_{p^l} = 0$ при указанных ограничениях на p и l следует из рассуждений, приведенных в доказательстве утверждения (1) теоремы 2. Последняя строка пункта I показывает, что разница между T -пространством и T -идеалом, порожденных одним и тем же элементом, весьма велика.

Случай $p = 2$, $l = 1$, специфичен во многом из-за того, что здесь перестают работать соотношения Фробениуса. В отличие от пунктов I и II здесь $C \cap D_2$ отлично от нуля, т.к. содержит CD_2 . Вопрос: верно ли, что $CD_2 = C \cap D_2$?

В связи с построенными бесконечно возрастающими и бесконечно убывающими цепочками kT^e -модулей, возникают вопросы о строении фактор- T^e -пространств: $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$, $C_{p^{l+1}}/C_{p^l}$, $CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$, $W_{p^l}/W_{p^{l+1}}$ и некоторых других.

Для фактор- T^e -пространства $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ имеет место

Предложение 4. В бесконечной строго убывающей цепочке kT^e -модулей

$$D_p \supset \dots \supset D_{p^l} \supset \dots$$

для любого p и любого натурального числа l , кроме $p = 2$, $l = 1$, все фактор- T^e -пространства $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ являются простыми и изоморфными фактор- T^e -пространству $k[y_1, \dots, y_i, \dots]/k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$. В случае $p = 2$, $l = 1$ T^e -пространство D_2/D_4 является бесконечно базлируемым kT^e -модулем.

Доказательство. Пусть $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$. Тогда из доказательства утверждения (5) теоремы 3 следует, что $D_{p^l} \cong k[y_1, \dots, y_i, \dots]$ и $D_{p^{l+1}} \cong k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$ как kT^e -модули. Отсюда, изоморфны как kT^e -модули следующие фактор- T^e -пространства: $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ и $k[y_1, \dots, y_i, \dots]/k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$.

Докажем, что kT^e -модуль $k[y_1, \dots, y_i, \dots]/k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$ прост. Для этого достаточно показать, что $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$ — максимальный собственный kT^e -подмодуль. Очевидно, что $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots] \subsetneq k[y_1, \dots, y_i, \dots]$. Допустим, что kT^e -модуль $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$ не является максимальным, т.е. существует подмодуль U такой, что $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots] \subsetneq U \subsetneq k[y_1, \dots, y_i, \dots]$. Отсюда, существует многочлен $f \in U$, не принадлежащий в то же время T^e -пространству $k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$. В силу бесконечности поля k можно считать, что $f \in k[y_1, \dots, y_i, \dots]$ — полиоднородный многочлен и, следовательно, есть одночлен вида:

$$\alpha y_1^{m_1} \cdots y_s^{m_s}, \quad (13)$$

где $\alpha \in k$, а числа $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяют свойству: существует хотя бы один номер j среди чисел $1, \dots, s$ такой, что $(m_j, p) = 1$, например, $j = 1$. В противном случае, т.е. если $(m_j, p) \neq 1$ для любого $j = \overline{1, s}$, то $f \in k[y_1^p, \dots, y_i^p, \dots]$, что невозможно. Тогда $f \in U$ порождает все T^e -пространство $k[y_1, \dots, y_i, \dots]$. Действительно, осуществляя в одночлен (13) подстановки: $y_1 \mapsto y_1 + 1$, $y_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$, и линеаризуя, получим, что $y_1 \in U$. Отсюда, $k[y_1, \dots, y_i, \dots] \subset U$, и, следовательно, $U = k[y_1, \dots, y_i, \dots]$, но по условию $U \subsetneq k[y_1, \dots, y_i, \dots]$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение предложения.

Согласно утверждению (4) теоремы 3 и замечанию 2 в случае $p = 2$, $l = 1$ D_2/D_4 является бесконечно базлируемым kT^e -модулем. Предложение доказано.

6. Мультипликативная структура

В настоящем пункте мы рассмотрим мультипликативную структуру T^e -пространства W_n . Покажем, что W_n замкнуто относительно умножения в алгебре $F^{(3)}$. Рассмотрим произвольные n -слова u, v . Если u и v зависят от непересекающихся множеств переменных, то, очевидно, $uv \in W_n$. Если множества переменных u и v пересекаются по некоторому множеству переменных, то одночлен uv также будет принадлежать W_n . Действительно, можно заменить v на n -слово v' , которое получается из v подстановкой вместо переменных, совпадающих с переменными одночлена u , других переменных, несовпадающих со всеми переменными u . Тогда $uv' \in W_n$. Отсюда, т.к. W_n — T^e -пространство, подходящей подстановкой в v' получаем $uv \in W_n$. Таким образом, можно говорить о T^e -подалгебре W_n n -слов.

Интересен вопрос о структуре T^e -пространства n -слов как T^e -подалгебры в $F^{(3)}$, а также о строении алгебры $F^{(3)}$ как W_n -модуля. Мы уже отмечали, что если $(n, p) = 1$, то $W_n = F^{(3)} = D_1$. Если же $n = p^l n_1$, где $l \geq 1$, $(n_1, p) = 1$, то $W_n = W_{p^l}$.

Структуру T^e -алгебры W_{p^l} проясняет следующая

Теорема 5. Алгебра W_{p^l} коммутативна, причем во всех случаях, кроме $p = 2$, $l = 1$, она раскладывается в прямую сумму T^e -пространств:

$W_{p^l} = CD_{p^l} \oplus D_{p^l}$, где T^e -алгебра D_{p^l} изоморфна T^e -алгебре коммутативных многочленов с естественной T^e -структурой и, следовательно, является нетеровым T^e -пространством, а CD_{p^l} — радикал алгебры W_{p^l} , являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса p , бесконечно базлируемой, как T^e -пространство.

Доказательство. Из коммутаторных соотношений следует, что алгебра W_{p^l} коммутативна для любых значений p и l .

Согласно утверждению (1) теоремы 2 для T^e -алгебры W_{p^l} имеет место разложение в прямую сумму указанных T^e -подпространств во всех случаях, кроме $p = 2, l = 1$.

Используя те же соображения, что и в доказательстве замкнутости W_n , нетрудно проверить, что D_{p^l} — T^e -подалгебра алгебры $F^{(3)}$, а CD_{p^l} есть T^e -идеал алгебры W_{p^l} . Из утверждения (5) теоремы 3 следует, что во всех случаях, кроме $p = 2, l = 1$, T^e -алгебра D_{p^l} изоморфна T^e -алгебре коммутативных многочленов с естественным действием полугруппы T^e , и, следовательно, является нетеровым T^e -пространством.

Рассмотрим T^e -алгебру CD_{p^l} . Из первого коммутаторного соотношения следует, что $(g_{r,s}(p^l))^2 = 0$, при $r > 0, s \geq 0$. Следовательно, если $f_1, f_2, \dots, f_m$ — многочлены, получающиеся из системы $\{g_{r,s}(p^l) \mid r > 0\}$ с помощью подстановок и k -линейных действий, то в силу соотношений Фробениуса для любых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in k$ имеют место равенства:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m)^p = \lambda_1^p f_1^p + \lambda_2^p f_2^p + \dots + \lambda_m^p f_m^p = 0,$$

т.е. T^e -алгебра CD_{p^l} является ниль-алгеброй индекса p .

Т.к. согласно лемме 3 $[x_1, x_2] \dots [x_{i-1}, x_i] \neq 0$ в алгебре $F^{(3)}$, и все коммутаторы $[x_{j-1}, x_j]$ (в силу включения $C_1 \subset CD_n$ для любого $n \in N$) лежат в CD_{p^l} , то ниль-алгебра CD_{p^l} не нильпотентна.

Нетрудно видеть, что коммутативная ниль-алгебра CD_{p^l} есть нильидеал алгебры W_{p^l} , причем факторалгебра W_{p^l}/CD_{p^l} совпадает с точностью до изоморфизма с алгеброй коммутативных многочленов. Таким образом, CD_{p^l} — радикал алгебры W_{p^l} .

В теореме 4 было установлено, что CD_{p^l} является бесконечно базлируемым T^e -пространством. Теорема 5 доказана.

В случае $p = 2, l = 1$ о строении коммутативной алгебры W_2 как T^e -пространстве сказано в утверждении (2) теоремы 2.

Как k -алгебра T^e -пространство $W_2 = k[x_1^2, \dots, x_i^2, \dots]$, очевидно, изоморфно алгебре коммутативных многочленов $k[y_1, \dots, y_i, \dots]$. Однако действие алгебры kT^e на W_2 не индуцировано естественными подстановками на алгебре многочленов, как это имеет место на алгебрах $W_{2^l}, l = 2, 3, \dots, W_{p^l}, p > 2, l = 1, 2, \dots$ (что, как мы уже отмечали, объясняется соотношениями Фробениуса).

Интересно, что в характеристике 2 алгебра коммутативных многочленов $k[y_1, \dots, y_i, \dots]$ может быть наделена структурой T^e -алгебры двумя принци-

пимально различными способами, один из которых (естественный) приводит к нетеровости (см. [14]), а другой (через изоморфизм с D_2) — к бесконечной базисуемости (см. [6]).

Как нетрудно проверить, пользуясь коммутаторными соотношениями, T^e -пространство W_p лежит в центре $ZF^{(3)}$ алгебры $F^{(3)}$. Возникает вопрос: совпадают ли W_p и $ZF^{(3)}$?

Этим и другим вопросам, связанным со структурой T^e -алгебры W_n , авторы планируют посвятить свои дальнейшие исследования.

Литература

- [1] Гришин, А.В. О конечной базисуемости абстрактных T -пространств / А.В. Гришин. // Фундам. прикл. матем. — 1995. — Т. 1. — № 3. — С. 669–700.
- [2] Grishin, A.V. On T -spaces and their applications / A.V. Grishin, V.V. Shchigolev // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — V. 134. — № 1. — P. 1799–1878.
- [3] Гришин, А.В. О конечной базисуемости систем обобщенных многочленов / А.В. Гришин // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. — Т. 54. — № 5. — С. 899–927.
- [4] Щиголев, В.В. Конечная базисуемость T -пространств над полями нулевой характеристики / В.В. Щиголев // Известия РАН. Сер. матем. 2001. — Вып. 65. — № 5. — С. 191–224.
- [5] Кемер, А.Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр / А.Р. Кемер // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 5. — С. 597–641.
- [6] Гришин, А.В. Примеры не конечной базисуемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2 / А.В. Гришин // Фундам. прикл. матем. — 1999. — Т. 5. — С. 101–118.
- [7] Grishin, A.V. On non-spechtiannes of associative rings which satisfy the identity $x^{32} = 0$ / A.V. Grishin // Electron. Res. Announ. Amer. Math. Soc. — 6.
- [8] Щиголев, В.В. Примеры бесконечно базисуемых T -пространств / В.В. Щиголев // Матем. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 143–160.
- [9] Щиголев, В.В. Примеры бесконечно базисуемых T -идеалов / В.В. Щиголев // Фундам. прикл. матем. — 1999. — Т. 5. — № 1. — С. 307–312.
- [10] Белов, А.Я. О нешпехтовых многообразиях / А.Я. Белов // Фундам. прикл. матем. — 1999. — Т. 5. — № 1. — С. 47–66.
- [11] Аладова, Е.В. T -пространства. История вопроса, приложения и последние результаты / Е.В. Аладова, А.В. Гришин, Е.А. Киреева // Чебышевский сб. — 2004. — Т. 5. — Вып. 4(12). — С. 39–57.
- [12] Гришин, А.В. О коразмерностях в пространствах 2-слов над полем характеристики 2 и свойствах экстремальности / А.В. Гришин, С.В. Урбаханов // Чебышевский сб. — 2002. — Т. 3. — Вып. 2(4). — С. 34–42.

- [13] Гришин, А.В. Структурные и алгоритмические вопросы в T -пространствах над полем характеристики $p > 0$ / А.В. Гришин // УМН. – 2005. – Т. 60. – № 3. – С. 175–176.
- [14] Grishin, A.V. On the finite basis property of T -spaces over a field of finite characteristic / Proc. of Moscow–Tainan algebraic workshop. – 1994. – P. 225–227.
- [15] Щиголев, В.В. Бесконечно базируемые T -пространства и T -идеалы: дис. канд. ... физ.-мат. наук / В.В. Щиголев. – М.: МГУ, 2002.

Поступила в редакцию 17/IX/2007;
в окончательном варианте — 17/IX/2007.

ON THE (p, n) -PROBLEM

© 2007 A.V. Grishin, L.M. Tsybulya²

In the paper the structure of the unitary closed T -space W_n generated by n -words in the relatively free algebra $F^{(3)} = F/I$ where k is an infinite field of characteristic $p > 0$ and I is the T -ideal generated by the polynomial $[[x_1, x_2], x_3]$ is studied. An infinite irreducible system of generators is found in W_n . In this connection infinite chains of the infinitely based T -subspaces in W_n are considered. The specific character of the case $p = 2$ is shown. Finally the multiplicative structure of the T -space W_n is studied.

Paper received 17/IX/2007.

Paper accepted 17/IX/2007.

²Grishin Alexandr Vladimirovich (alex@grishin.mccme.ru), Tsybulya Liliya Mikhaylovna, Dept. of Algebra, Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russia.