

УДК 511.2 + 511.334

СУММЫ ШИМУРЫ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2007 Г.В. Воскресенская¹

В статье изучаются суммы Шимуры для арифметических функций. Получены некоторые точные формулы, исследованы связи между суммами Шимуры для различных арифметических функций, доказаны арифметические тождества.

Введение

В статье изучаются суммы Шимуры для арифметических функций. В ряде случаев получены точные формулы, исследовались связи между суммами Шимуры для различных функций, доказаны некоторые арифметические тождества.

Суммы Шимуры появились в формулах теории модулярных форм полуполого веса, но их можно изучать для арифметических функций любой природы.

1. Определение суммы Шимуры

Арифметическая функция — это комплекснозначная функция, определенная на множестве всех натуральных чисел.

Пусть $a(n)$ — арифметическая функция, доопределим эту функцию до функции на множестве неотрицательных рациональных чисел, считая, что значение функции равно нулю, если аргумент не является натуральным числом.

Определение.

Пусть $a(n)$ — функция, описанная выше, и c — целое положительное число.

¹Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Тогда для целого $m \geq 1$ сумма Шимуры $Sh(m, a, c)$ определяется формулой:

$$Sh(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

По определению положим $Sh(1, a, c) = 0$.

2. Явные вычисления некоторых сумм Шимуры

2.1. Сумма Шимуры для $a(n) = n$

Утверждение 1.

Пусть $a(n) = n$, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & Sh(m, a, 1) = \frac{4m^3 - 3m^2 - m}{6}; \\ 2) \quad & \sum_{m=1}^l Sh(m, a, 1) = \frac{l(l-1)(l+1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Числа, стоящие справа, являются целыми.

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=1}^{m-1} a(m^2 - j^2) = \sum_{j=1}^{m-1} m^2 - \sum_{j=1}^{m-1} j^2 = m^2(m-1) - \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} = \\ & = \frac{4m^3 - 3m^2 - m}{6}; \\ 2) \quad & \sum_{m=1}^l Sh(m, a, 1) = \frac{1}{6} \left(4 \sum_{m=1}^l m^3 - 3 \sum_{m=1}^l m^2 - \sum_{m=1}^l m \right) = \\ & \frac{1}{6} (l^2(l+1) - \frac{l(l+1)(2l+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2}) = \frac{l(l-1)(l+1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Получаем очевидное следствие.

Следствие.

- 1) Если $(m, 6) = 1$, то $m \mid Sh(m, a, 1)$;
- 2)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Sh(m, a, 1)}{m^3} = \frac{2}{3}.$$

2.2. Сумма Шимуры для $a(n) = (-1)^n$

Утверждение 2.

Пусть $a(n) = (-1)^n$, тогда

$$1) \quad Sh(m, a, 1) = \begin{cases} -1, & m \equiv 1(4), \quad m \equiv 2(4), \\ 1, & m \equiv 3(4), \quad m \equiv 0(4); \end{cases}$$

$$2) \quad \sum_{m=1}^l Sh(m, a, 1) = \begin{cases} -1, & m \equiv 1(4), \\ -2, & m \equiv 2(4), \\ -1, & m \equiv 3(4), \\ 0, & m \equiv 0(4). \end{cases}$$

Доказательство.

Доказательство следует из выражения

$$\sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{(m^2-j^2)} = (-1)^{m^2} (-1)^{\frac{m(m-1)(2m-1)}{6}}.$$

3. Суммы Шимурь как обобщение сумм Гаусса

Пусть p — простое число и $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Рассмотрим сумму Гаусса

$$g(\chi) = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j.$$

Здесь характер $\chi(t) = \left(\frac{t}{p}\right)$.

Утверждение 3.

Пусть $a(n) = \zeta_p^{-n}$, тогда

$$Sh(p, a, 1) = g(\chi) - 1.$$

Доказательство.

Сначала докажем вспомогательную формулу

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_p^{j^2}.$$

Среди чисел от 1 до $p-1$ половина чисел — квадратичные вычеты, а половина — невычеты. Кроме того, сумма

$$\sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^j + 1 = 0.$$

Имеем,

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j + 0 = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^j + 1 = 1 + 2 \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \zeta_p^{j^2} = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_p^{j^2}.$$

Тогда

$$Sh(m, a, 1) = \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^{-p^2+j^2} = \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^{j^2} = g(\chi) - 1.$$

Следствие.

$$Sh(p, a, 1) + 1 = \sqrt{p}, \quad p \equiv 1(4).$$

Доказательство.

Следует из того, что в этом случае $g(\chi) = \sqrt{p}$.

4. Суммы Шимуры и представления чисел суммами квадратов

В этом разделе мы покажем, что суммы Шимуры для подходящих функций могут отражать тонкие арифметические свойства.

Рассмотрим функцию $a(n)$, равную нулю, если число n не является квадратом, и равную 1, если число n является квадратом. Эта функция мультипликативна.

Тогда значение $Sh(m, a(n), 1)$ равно количеству представлений числа m^2 в виде суммы двух ненулевых квадратов.

$$Sh(m, a(n), 1) = \sum_{d|m^2} \chi(d) - 1,$$

где

$$\chi(d) = \begin{cases} 1, & d \equiv 1(4), \\ -1, & d \equiv 3(4), \\ 0, & 2|d. \end{cases}$$

Мы видим, что если p распадается в поле $\mathbf{Q}(i)$, то $Sh(p, a(n), 1) = 2$, если p инертно в поле $\mathbf{Q}(i)$, то $Sh(p, a(n), 1) = 0$.

Далее пусть $d \equiv 1(4)$, рассмотрим функцию $a(n)$, равную нулю, если число $n \neq dt^2, t \in \mathbf{N}$, и равную 1, если число $n = dt^2, t \in \mathbf{N}$.

Если p распадается в поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, то $Sh(p, a(n), 1) = 1$, если p инертно в поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, то $Sh(p, a(n), 1) = 0$.

5. Суммы Шимуры и мультипликативные η -произведения

Здесь мы рассмотрим суммы Шимуры от мультипликативных функций, являющихся коэффициентами некоторых модулярных форм. Эти модулярные формы являются произведениями η -функций Дедекинда от различных аргументов, соответствующих разбиениям числа 24, с мультипликативными коэффициентами. Они были открыты Д. Даммитом, Х. Кисилевски и Дж. Мак-Кеем в 1985 г. [1]. Этих функций 30. Из них 28 имеют целый вес, а две — полуцелый вес. Мы будем называть их мультипликативными η -произведениями.

Мультипликативные η -произведения целого веса также могут быть описаны следующими условиями:

- 1) они являются параболическими формами целого веса с характеристиками;

2) они имеют нули только в параболических вершинах, кратность каждого нуля равна 1.

То условие, что кратность нуля равна 1, является существенным. Фактически все эти формы оказываются собственными функциями относительно всех операторов Гекке. Приведем их полный список с указанием весов и уровней.

Таблица

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

Обозначим через $S_k(N, \chi)$ линейное пространство параболических форм веса k , уровня N с характером χ . В статье [10] изучались суммы Шимурь для этих модулярных форм. В частности, там было доказана теорема 1.

Теорема 1.

Если мультипликативное произведение

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(N, \chi)$$

такое, что

$$h(z) = f^2\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_{2k}(N)$$

— также является мультипликативным η -произведением, тогда

- 1) $c(p) = 2Sh(p, a, 1) + a^2(p)$;
- 2) $c(p^2) = 2Sh(p^2, a, 1) + 2\chi(p)p^{k-1}Sh(p, a, 1) + a^2(p^2)$;
- 3) $p^{2k-1} = (2Sh(p, a, 1) + a^2(p))^2 - 2Sh(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2\chi(p)p^{k-1}Sh(p, a, 1) =$
 $= (2Sh(p, a, 1) + a^2(p))^2 - 2Sh(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2(a^2(p) - a(p^2))Sh(p, a, 1).$

Из этой теоремы были получены тождества, связанные с арифметикой квадратичных полей. Например, доказана теорема 2 и несколько аналогичных.

Теорема 2. Пусть

$$f(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(128, \chi).$$

- 1) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 14Sh(p, a, 1) - 5.$$

- 2) Если p инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, то

$$p = -2Sh(p^2, a, 1) - 1.$$

- 3) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и p инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 2Sh(p, a, 1) - 1.$$

Теперь мы рассмотрим соотношения между суммами Шимур для различных мультипликативных η -произведений.

Теорема 3.

Если

$$f(z) = \eta(21z)\eta(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(63, \chi),$$

$$g(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(128, \tilde{\chi}),$$

$$h(z) = \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(14),$$

то

$$1) \quad d(n) = \sum_{\substack{2j+l=3n \\ j>0, l>0}} a(j)a(l) = \sum_{\substack{7j+l=8n \\ j>0, l>0}} c(j)c(l),$$

$$2) \quad d(p) = Sh(3p, a, 8) + \chi(p) = Sh(4p, c, 7) + \tilde{\chi}(p).$$

Замечание. Из таблицы $\chi(p) = \left(\frac{-7}{p}\right)$, $\tilde{\chi}(p) = \left(\frac{-2}{p}\right)$, $\tilde{\chi}(2) = 0$.

В частности, если $\left(\frac{-7}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right)$, $p > 2$, то

$$Sh(3p, a, 8) = Sh(4p, c, 7).$$

Доказательство.

1) Рассмотрим

$$f(2z)f(z) = \eta(42z)\eta(6z)\eta(21z)\eta(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)q^n.$$

Имеем

$$u(3n) = d(n); \quad u(3n) = \sum_{2j+l=3n} a(j)a(l).$$

Для $p = 2$ вычисляем $Sh(6, a, 8) = 0$, $Sh(8, c, 7) = -1$, $d(2) = -1$, и $d(p) = Sh(3p, a, 8) + \chi(p) = Sh(4p, c, 7) + \tilde{\chi}(p)$.

Пусть $p > 2$.

$$\begin{aligned} Sh(3p, a, 8) &= \sum_{t=1, (t,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p)^2 - t^2}{8}\right) + a(p^2) = [t = 3p - 2l] = \\ &= \sum_{l=1, (l,p)=1}^{\frac{3p-1}{2}} a\left(\frac{(6p-l)(2l)}{8}\right) + a(p^2) = \\ &= \sum_{l=1, (l,p)=1}^{\frac{3p-1}{2}} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + a(p^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1, (l,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1, (l,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1, (l,p)=1, (2,l)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + \left(\sum_{l=1, (l,p)=1, 2|l}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1, (l,p)=1, (2,l)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)}{2}\right) a(l) + \sum_{l=1, (l,p)=1, 2|l}^{3p-1} a(3p-l) a\left(\frac{l}{2}\right) + 2a(p^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (d(p) - a^2(p) + d(p) - a^2(p) + 2a(p^2)) = d(p) - \chi(p). \end{aligned}$$

Получаем $d(p) = Sh(3p, a, 8) + \chi(p)$.

2) Теперь рассмотрим

$$g(7z)g(z) = \eta(112z)\eta(56z)\eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n)q^n.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 v(8n) &= d(n), \quad v(8n) = \sum_{7j+l=8n} c(j)c(l), \\
 Sh(8p, c, 7) &= \sum_{t=1, (t,p)=1}^{4p-1} c\left(\frac{(4p)^2 - t^2}{7}\right) + c(p^2) = [t = 4p - l] = \\
 &= \sum_{l=1, (l,p)=1}^{4p-1} c\left(\frac{(8p-l)l}{8}\right) + c(p^2) = \\
 \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1, (l,7p)=1}^{8p-1} c\left(\frac{(8p-l)}{7}\right) c(l) + \sum_{l=1, (l,p)=1, 7 \nmid l}^{8p-1} c(8p-l) c\left(\frac{l}{7}\right) + 2c(p^2) \right) &= \\
 &= \frac{1}{2} (d(p) - c^2(p) + d(p) - c^2(p) + 2c(p^2)) = d(p) - \tilde{\chi}(p).
 \end{aligned}$$

Получим $d(p) = Sh(8p, c, 7) + \tilde{\chi}(p)$.

В доказательстве мы используем мультипликативность коэффициентов $a(n)$ и $c(n)$ и свойства: $a(n) = 0$, кроме случая $n \equiv 1(3)$, $c(n) = 0$, кроме случая $n \equiv 1(8)$.

Пример.

$p = 5$.

$$\chi(5) = -1, \quad \tilde{\chi}(5) = -1, \quad d(5) = 0,$$

$$Sh(15, a, 8) = a(7) + a(25) + a(28) = -1 + 1 + 1 = 1, \quad Sh(20, c, 7) = c(25) = 1.$$

$$d(5) = 0 = 1 - 1.$$

Аналогично мы доказываем следующие теоремы:

Теорема 4. Если

$$f(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(108, \chi),$$

$$g(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(128, \tilde{\chi}),$$

$$h(z) = \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(12),$$

то

$$1) \quad d(n) = \sum_{2j+l=3n} a(j)a(l) = \sum_{3j+l=4n} c(j)c(l),$$

$$2) \quad d(p) = Sh(3p, a, 8) + \chi(p) = Sh(2p, c, 3) + \tilde{\chi}(p).$$

В этих суммах $j > 1$, $l > 1$, p — простое.

$$\chi(p) = \left(\frac{-3}{p}\right), \quad \tilde{\chi}(p) = \left(\frac{-2}{p}\right) \text{ для } p > 2; \quad \chi(2) = \tilde{\chi}(2) = 0.$$

В частности, если $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right)$, $p > 2$, то

$$Sh(3p, a, 8) = Sh(2p, c, 3).$$

Теорема 5.

Если

$$f(z) = \eta(20z)\eta(4z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(80, \chi),$$

$$g(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(108, \tilde{\chi}),$$

$$h(z) = \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(15),$$

то

$$1) \quad d(n) = \sum_{3j+l=4n} a(j)a(l) = \sum_{5j+l=6n} c(j)c(l),$$

$$2) \quad d(p) = Sh(2p, a, 3) + \chi(p) = Sh(3p, c, 5) + \tilde{\chi}(p).$$

В этих суммах $j > 1$, $l > 1$, p — простое,

$$\chi(p) = \left(\frac{-5}{p}\right), \quad \tilde{\chi}(p) = \left(\frac{-3}{p}\right), \quad p > 2; \quad \chi(2) = \tilde{\chi}(2) = 0.$$

В частности, если $\left(\frac{-5}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)$, $p > 2$, то

$$Sh(2p, a, 3) = Sh(3p, c, 5).$$

Статья написана при финансовой поддержке гранта РФФИ 05-01-00313.

Литература

- [1] Dummit, D. Multiplicative products of η -functions / D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay // Contemp. Math. — 1985. — V.45. — P. 89–98.
- [2] Kondo, T. Examples of multiplicative η -products / T. Kondo // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. — Tokyo, 1986. — V.35. — P. 133–149.
- [3] Gordon, B. Multiplicative properties of η -products / B. Gordon, S. Sinor // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. — 1989. — V.1395. — P. 173–200.
- [4] Ono, K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series / K. Ono. — 2004. — 216 p.
- [5] Ono, K. Shimura sums related to imaginary quadratic fields / K. Ono // Proc. Japan Acad. — 1994. — 70(A). — P. 146–151.
- [6] Shimura, G. On modular forms of half-integral weight / G. Shimura // Ann. of Math. — 19739. — №7. — P. 440–481.
- [7] Айерлэнд, К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен // М.: Мир, 1987. — 416 с.
- [8] Voskresenskaya, G.V. One special class of modular forms and group representations / G.V. Voskresenskaya // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. — 1999. — V.11. — P. 247–262.

- [9] Voskresenskaya, G.V. Multiplicative Dedekind η -function and representations of finite groups / G.V. Voskresenskaya // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. – 2005. – V. 17. – P. 359–380.
- [10] Voskresenskaya, G.V. Modular forms, Shimura sums and arithmetic of quadratic fields / G.V. Voskresenskaya // MPI-preprint. – 2006. – № 95. – 15 pp.

Поступила в редакцию 17/IX/2007;
в окончательном варианте — 17/IX/2007.

THE SHIMURA SUMS FOR ARITHMETIC FUNCTIONS²

© 2007 G.V. Voskresenskaya³

In the paper the Shimura sums for arithmetic functions are studied. Several exact formulas are obtained and relations between the Shimura sums for various arithmetic functions are analyzed. Also a number of arithmetic identities are proved.

Paper received 17/IX/2007.

Paper accepted 17/IX/2007.

²Communicated by Dr. Sci (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

³Voskresenskaya Galina Valentinovna (vosk@ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.