МАТЕМАТИКА

УДК 512.7

ВЫЧИСЛЕНИЯ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ[1]

© 2007 Н.А. Вавилов[2]

Дорогому Валентину Евгеньевичу
с неизменным восхищением
его талантом и мужеством

Работа представляет собой текст доклада автора на Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (Самара, 2007). Рассказано о вычислениях в группах Шевалле $G(\Phi, R)$ над коммутативным кольцом. Сформулированы недавние результаты А. Бака, Р. Хазрата и автора о нильпотентной структуре $K_1(\Phi, R)$, опирающиеся на метод *локализации-пополнения.* Детально описываются геометрические методы доказательства структурных теорем, как развитый в 1990 году А. Степановым, автором и Е. Плоткиным метод *разложения унипотентов*, так и предложенное совсем недавно автором, М. Гавриловичем и С. Николенко *доказательство из книги* $\approx$ A_2-доказательство. Кроме того, сформулированы некоторые близкие результаты, в частности, основная лемма A_3-доказательства, предложенного автором для атаки на центральность $K_2(\Phi, R)$ в случае исключительных групп; найденная автором и А. Лузгаревым характеризация расширенной группы Шевалле типа E_6 над произвольным коммутативным кольцом; доказанная А. Степановым и автором конечность ширины коммутаторов в элементарных образующих.

Я буду рассказывать главным образом о вычислениях с элементами больших исключительных групп типов E_6, E_7, E_8 как с матрицами размера 27×27, 56×56 и 248×248, соответственно. Основная мысль моего доклада состоит в том, что работая над общим коммутативным кольцом именно такие вычисления проще всего проводить. Группу F_4 также проще

[1]Настоящая работа была выполнена в рамках проектов РФФИ 03–01–00349 (ПОМИ РАН), INTAS 00–566 и INTAS 03-51-3251. Часть совместных исследований проведена автором в Uni. Bielefeld, Queen's Univ. Belfast (при поддержке LMS и SERC), Harbin Inst. of Technology и Paris XIII.

[2]Вавилов Николай Александрович (`nikolai-vavilov@yandex.ru`), кафедра высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.

всего рассматривать в 27-мерном представлении как скрученную группу типа E_6.

Группа G_2 не представляет большого интереса в этом контексте, так как, во-первых, она настолько тесно связана с группами типов B_3 и D_4, что ее следует рассматривать как классическую, во-вторых, большинство рассматриваемых нами вопросов для нее решаются прямыми матричными вычислениями в 7-мерном или 8-мерном представлении [35, 51] и, в-третьих, остальные интересующие нас результаты для нее просто не имеют места.

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней ранга $l \geqslant 2$, а R — коммутативное кольцо с 1. С парой (Φ, R) ассоциированы несколько тесно связанных между собой, но, вообще говоря, различных групп [2, 18, 19, 33, 37, 45, 52, 61, 66].

• **Группа Шевалле $G = G(\Phi, R)$.** В действительности с точностью до изоморфизма группа $G(\Phi, R)$ зависит еще от решетки весов P лежащей между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, иногда пишут $G = G_P(\Phi, R)$. Обычно мы рассматриваем односвязную группу $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$, но иногда нам приходится иметь дело с присоединенной группой $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$. По определению группа G является группой точек некоторой аффинной групповой схемы над $\mathbb{Z}$, так что $G(\Phi, R) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\mathrm{G}], \mathrm{R})$, где $\mathbb{Z}[G]$ — аффинная алгебра группы G. Иными словами, $G(\Phi, R)$ определяется уравнениями с целыми коэффициентами.

• **Элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$.** Эта группа порождена некоторыми унипотентными элементами $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$. Обычно корневые элементы $x_a(\xi)$ описываются как автоморфизмы модуля Вейля V над R. Стоит подчеркнуть, что во многих книгах, включая [19], группой Шевалле *ошибочно* называется группа $E(\Phi, R) \leqslant G(\Phi, R)$. Конечно, подобная терминология имеет некоторые основания, так как для *односвязных* групп над полулокальным кольцом R имеет место равенство $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R) = E_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$. В то же время, для групп, не являющихся односвязными, это равенство может нарушаться даже в случае поля.

• **Группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, \mathrm{R})$.** Группа Стейнберга определяется как абстрактная группа с образующими $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, про которые предполагается лишь, что они удовлетворяют первым двум соотношениям Стейнберга, а именно, требуется, чтобы $x_\alpha(\xi)$ были аддитивны по отношению к ξ, $x_\alpha(\xi+\zeta) = x_\alpha(\xi)x_\alpha(\zeta)$, и удовлетворяли *коммутационной формуле Шевалле*

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = \prod_{i\alpha+j\beta\in\Phi,\ \ i,j\in\mathbb{N}} x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\zeta^j),$$

для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Phi$ таких, что $\alpha + \beta \neq 0$, и любых $\xi, \zeta \in R$. По поводу структурных констант $N_{\alpha\beta ij}$ см. [19], [33] и дальнейшие ссылки в [66]. Положив дополнительно

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t), \qquad h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1},$$

легко получить копредставление группы $E_{sc}(\Phi, R)$, потребовав дополнительно, чтобы $h_\alpha(\xi)$ были мультипликативны по отношению к ε, $h_\alpha(\varepsilon\eta) = h_\alpha(\varepsilon)h_\alpha(\eta)$. Вычисления, в которых используются *только* соотношения Стейнберга, называются **элементарными**.

Так как элементарные корневые элементы $x_\alpha(\xi) \in E(\Phi, R)$ удовлетворяют соотношениям, определяющим группу Стейнберга, — и еще, быть может, каким-то соотношениям — эти группы связаны между собой следующим образом:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & K_2(\Phi, R) & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & \mathrm{St}(\Phi, R) & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & \longrightarrow & E_{sc}(\Phi, R) & \longrightarrow & G_{sc}(\Phi, R) & \longrightarrow & K_1(\Phi, R) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & &
\end{array}
$$

Группы $K_1(\Phi, R)$ и $K_2(\Phi, R)$ функториально зависят от Φ и от R. Тот факт, что $K_1(\Phi, R)$ действительно группа — или, иными словами, что $E(\Phi, R)$ нормальна в $G(\Phi, R)$ — совершенно нетривиален. Более того, для групп ранга 1 он и не имеет места. То, что это так для групп ранга $\geqslant 2$, составляет содержание знаменитой теоремы Суслина–Копейко–Таддеи [20, 59].

Теорема 1. *При* $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$ *подгруппа* $E(\Phi, R)$ *нормальна в* $G(\Phi, R)$.

Этот ключевой результат позволяет сводить многие вопросы о группе Шевалле $G(\Phi, R)$ к аналогичным вопросам для элементарной подгруппы $E(\Phi, R)$, в которой *некоторые из них* могут быть решены элементарными вычислениями.

Как только что отмечено, для полулокального кольца $K_1(\Phi, R) = 1$, и классическая теорема Стейнберга утверждает, что для поля группа $K_2(\Phi, R)$ порождается символами Стейнберга. Еще одна теорема Стейнберга утверждает, что для *конечного* поля $K_2(\Phi, K) = 1$. Таким образом, односвязную группу Шевалле над полем легко задать образующими и соотношениями, так что все вопросы в $G(\Phi, K)$ могут быть решены элементарными вычислениями. В действительности, для поля можно сказать гораздо больше. А именно, в этом случае разложение Брюа уточняется до канонической формы элементов группы Шевалле $G(\Phi, K)$, которая позволяет проводить в ней *эффективные* вычисления. Ничего похожего в группах Шевалле над кольцами в общем случае нет. Даже в тех случаях, когда группа $K_1(\Phi, R)$ тривиальна и группа Шевалле порождается $x_\alpha(\xi)$, в ней, вообще говоря, нет и *не может быть* [42] никаких канонических форм элементов в терминах элементарных образующих.

Естественно возникает вопрос, как мы можем доказывать результаты о группе $G(\Phi, R)$? В определении этой группы участвует два параметра, система корней Φ и коммутативное кольцо R. Все известные доказательства структурных результатов о группе $G(\Phi, R)$ основаны на индукции по размерности основного кольца R, индукции по рангу группы $l = \mathrm{rk}(\Phi)$, или комбинации того и другого.

• Мы называем доказательства, основанные на индукции по размерности $\dim(R)$, т.е. такие доказательства, которые зависят от природы основного кольца R, **арифметическими**. В конечном счете редукция в таких доказательствах происходит к кольцам размерности 0, скажем, к локальным или полулокальным, поэтому они часто называются также **локализационными**.

• Доказательства, основанные на индукции по рангу, функционируют исключительно в терминах геометрии модуля V, на котором действует группа, и поэтому называются **геометрическими**. В подобных доказательствах редукция для классических групп обычно происходит к группам ранга 1, 2 или 3, для которых все проверяется прямым матричным вычислением, а для исключительных групп — к подходящей классической подгруппе.

Локализационным методам посвящена *огромная* литература, поэтому ограничимся лишь несколькими замечаниями. Наиболее известным таким методом является предложенный в 1976 году Дэниэлом Квилленом и Андреем Суслиным метод **localisation and patching**, [20]. Заметим, что структурные теоремы в исключительных группах Шевалле, в частности, теорема Таддеи [59] и полученное Абе, Судзуки и Васерштейном [21–24], [60] описание нормальных подгрупп были впервые доказаны именно этим методом. Сформулируем окончательный результат, полученный Эйичи Абе [22, 23].

Пусть A — идеал в R. Обозначим через A_2 идеал, порожденный 2ξ и ξ^2 для всех $\xi \in A$. Пара (A, B) называется **допустимой парой** в R, если $A \trianglelefteq R$, а $A_2 \leqslant B \leqslant A$, причем при $\Phi \neq \mathrm{C}_l$ аддитивная подгруппа B является идеалом в R, а при $\Phi = \mathrm{C}_l$ требуется лишь, чтобы B выдерживала умножения на ξ^2, для всех $\xi \in R$. Аналогичное понятие можно ввести и для G_2, но при этом в определении допустимой пары нужно *всюду* заменить 2 на 3.

Теорема 2. *Предположим, что* $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$, *причем если* $\Phi = \mathrm{B}_2$ *или* G_2, *у кольца* R *нет поля вычетов* $\mathbb{F}_2$ *из двух элементов. Тогда для любой подгруппы* H *в группе Шевалле* $G(\Phi, R)$ *нормализуемой элементарной группой* $E(\Phi, R)$ *существует единственная допустимая пара* (A, B) *в* R *такая, что*

$$E(\Phi, R, A, B) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, A, B).$$

Здесь $E(\Phi, R, A, B)$ — нормальная подгруппа в $E(\Phi, R)$, порожденная элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(\xi)$, где $\xi \in A$ для короткого корня α, и $\xi \in B$ для длинного корня α. В свою очередь, *полная* конгруэнц-подгруппа $C(\Phi, R, A, B)$ определяется как транспортер $\mathrm{Tran}(E(\Phi, R), E(\Phi, R, A, B))$. В научно-популярных текстах эти понятия обычно встречаются только в случае $A = B$, что автоматически имеет место при различных упрощающих предположениях, например, если все корни имеют одинаковую длину или если $2 \in R^*$. Группа $E(\Phi, R, A, A)$ обычно обозначается просто $E(\Phi, R, A)$, через $G(\Phi, R, A)$ обозначается *главная* конгруэнц-подгруппа, т.е. ядро гомоморфизма редукции $G(\Phi, R) \to G(\Phi, R/A)$.

Мы не будем обсуждать, что происходит для типов B_2 и G_2 при наличии поля вычетов $\mathbb{F}_2$, в этих случаях полный ответ также известен [34, 35], но он далек от стандартного и формулируется чрезвычайно сложно. Отметим важное дополнение к этой теореме, которое также можно доказать локализационными методами. Для случая $A = B$ следующий результат легко вытекает из теоремы 1 при помощи релятивизации, но для $A \neq B$ нужен чуть более тонкий анализ. Для классических групп следующий результат доказан в [29, 30], а для группы типа F_4 — в [12, 58].

Теорема 3. *Предположим, что* $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$*, причем* $\Phi \neq \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$*. Тогда подгруппа* $E(\Phi, R, A, B)$ *нормальна в* $G(\Phi, R)$*, а* $C(\Phi, R, A, B)$ *совпадает с транспортером* $\mathrm{Tran}(G(\Phi, R), E(\Phi, R, A, B))$.

Для доказательства более трудных результатов, связанных с кратным коммутированием, удобнее пользоваться другим вариантом локализации, а именно, предложенным в 1991 году Баком [27] методом **localisation-completion**. Чтобы продемонстрировать мощь этого метода, сформулируем два результата, полученных недавно в статьях Энтони Бака, Рузби Хазрата и автора [31, 38, 39]. В работах [13, 39, 40, 57] можно найти *доступное* изложение основных идей этого метода и дальнейшие приложения.

Вильберд ван дер Каллен [43] и Энтони Бак [27] привели примеры, показывающие, что группа $\mathrm{K}_1(\Phi, R)$ не обязана быть абелевой. Естественно возникает вопрос, насколько далеко она может отклоняться от абелевости? Так как результаты, полученные в только что упомянутых работах, носят достаточно технический характер, ограничимся двумя их простыми следствиями. В следующей теореме через $\delta(R)$ обозначена размерность Басса—Серра кольца R. Тот, кто не знает, что это такое, может без большого ущерба для общности считать, что $\delta(R)$ обозначает размерность Джекобсона $\dim(\mathrm{Max}(R))$.

Теорема 4. *Предположим, что* $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$*, а* $\delta(R) < \infty$*. Тогда группа* $\mathrm{K}_1(\Phi, R)$ *нильпотентна.*

В действительности в [31] доказано, что нильпотентны даже относительные группы

$$\mathrm{K}_1(\Phi, R, A) = G(\Phi, R, A)/E(\Phi, R, A).$$

Теорема 5. *Предположим, что* $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$*, причем если* $\Phi = \mathrm{B}_2$ *или* G_2*, у кольца* R *нет поля вычетов* $\mathbb{F}_2$ *из двух элементов. Тогда группа* $E(\Phi, R)$ *может быть охарактеризована как наибольшая совершенная подгруппа в* $G(\Phi, R)$.

Заметим, что отсюда сразу вытекает не только то, что элементарная подгруппа $E(\Phi, R)$ нормальна в группе Шевалле, но и то, что она вполне характеристична там, что, *в частности*, усиливает результат Васерштейна [60] — и при этом не ссылается на описание нормальных подгрупп в $G(\Phi, R)$!

Перейдем теперь к основной теме настоящего доклада, вычислениям с группами Шевалле в минимальных представлениях. Обычно для приложений в структурной теории для каждого типа достаточно хорошо понять какое-то одно представление. По причинам технического характера удобнее всего работать с базисными представлениями, для которых все ненулевые веса образуют одну вейлевскую орбиту. Пусть π — представление группы Шевалле $G = G(\Phi, R)$ на модуле Вейля $V = V(\varpi_i)$ со старшим весом $\omega = \varpi_i$, a $n = \dim(V)$. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается множество весов модуля V с кратностями. Для микровесового представления $\Lambda = W(\mathrm{E}_6)\omega$, а для присоединенного представления системы с простыми связями, кроме того, появляется нулевой вес кратности равной рангу.

В дальнейшем мы фиксируем допустимый базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Обычно для практических вычислений удобно накладывать на этот базис какие-то дополнительные требования положительности, например, брать кристаллический базис в микровесовом случае и положительный базис Шевалле в присоединенном представлении. При этом элемент $g \in G(\Phi, R)$ обычно отождествляется со своим образом в представлении π и изображается $(n \times n)$-матрицей $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ. Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов gv^μ, $\mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: μ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\mu}$, а λ-я строка — через $g_{\lambda*}$. Обратная к g матрица обозначается $g^{-1} = (g'_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$.

В работах Хидейя Мацумото [45] и Майкла Штейна [53] была развита техника вычислений с отдельными столбцами и строками матриц из G. По причинам исторического характера в [16, 61, 66] такие вычисления называются **стабильными**. В стабильных вычислениях достаточно пользоваться *квадратичными* уравнениями на столбцы матриц из G, причем часто лишь уравнениями на часть столбцов — обычно просто уравнениями на орбиту старшего веса [44] — и даже лишь *частью* этих уравнений [6, 7, 63]. Основным инструментом при проведении таких вычислений являются **весовые диаграммы**, которые позволяют визуализировать происходящее и с успехом заменяют матрицы больших степеней. Мы отсылаем читателя к статье [48], где собраны весовые диаграммы всех базисных и присоединенных представлений, а также к [4, 61, 63], где можно найти детальную библиографию.

В работе автора, Евгения Плоткина и Алексея Степанова [16] было замечено, что основные структурные теоремы — теоремы 1 и 2, а также многое другое — легко вытекают из следующего результата. Этот результат кажется техническим, но в действительности его смысл состоит в том, что он *полностью* сводит вычисления, нужные для доказательства структурных теорем, к элементарным и стабильным вычислениям. Хотя, конечно, чтобы понять это, необходимо разобрать его доказательство хотя бы в каких-то случаях и посмотреть, как он применяется в конкретных ситуациях для доказательства теорем 1 и 2. Проще всего сделать это по работам Алексея Степанова и автора [55, 61], где детально рассмотрены классические случаи. В [16] этот метод был назван **разложением унипотентов**.

Напомним, что наряду с корневыми элементами $gx_\alpha(\xi)g^{-1}$, где $g \in G$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, можно рассматривать элементы *корневого типа*, которые удовлетворяют *тем же уравнениям*, что корневые элементы [61, 63]. Над полем класс элементов корневого типа совпадает с классом корневых элементов. Однако, над кольцом это, вообще говоря, совершенно не так — например, не каждая трансвекция в $\mathrm{SL}(n, K)$ сопряжена с элементарной трансвекцией.

Теорема 6. *Пусть* π *— какое-то базисное представление группы Шевалле* $G = G(\Phi, R)$ *ранга* $\geqslant 2$. *Тогда для любого* $g \in \pi(G)$ *группа* $E(\Phi, R)$ *порождается элементами корневого типа* $z \in E(\Phi, R)$ *такими, что* $zg_{*\mu} = g_{*\mu}$ *для некоторого столбца матрицы* g.

Иными словами, для микровесового представления π утверждается, что $E(\Phi, R)$ порождается такими элементами z корневого типа, что как z, так и gzg^{-1} лежат в собственных параболических подгруппах, причем gzg^{-1} лежит в подгруппах вида P_i^w, где ϖ_i — старший вес представления π, а $w \in W(\Phi)$. В действительности во многих случаях — например, для систем с простыми связями — разложение унипотентов можно сформулировать *гораздо* точнее, как явные полиномиальные формулы, выражающие $gx_\alpha(\xi)g^{-1}$ как произведение элементов корневого типа, лежащих в собственных параболических подгруппах.

Для классических групп в векторных представлениях реализация этой программы не представила значительных трудностей, притом даже в гораздо более общих ситуациях [15, 30, 55]. Однако, получение аналогичных результатов для исключительных групп оказалось совсем не таким простым делом, как это нам первоначально представлялось.

• Прежде всего, в этом доказательстве приходится самым существенным образом использовать *явное* знание структурных констант действия и уравнений на орбиту старшего веса. Первоначально мы опирались на компьютерные вычисления для проверки согласованности знаков. Побочным продуктом этой деятельности являются работы [11, 64, 66], содержащие явные вычисления структурных констант, корневых элементов, уравнений и т.д. Лишь гораздо позже для случаев (E_6, ϖ_1), (E_7, ϖ_7) и (E_6, ϖ_2) удалось записать такие доказательства, которые могут быть проведены и, может быть, даже проверены без участия компьютера, см., в частности, [4, 6, 7, 63].

• Кроме того, эти доказательства зависят от существования *огромных* классических подгрупп в исключительных группах, таких, скажем, как $A_5 \leqslant E_6$ и $A_7 \leqslant E_7$ для микровесовых представлений или, соответственно, $D_5 \leqslant E_6$, $D_6 \leqslant E_7$ и $D_8 \leqslant E_8$ для присоединенных. Таким образом, никакие дополнительные усилия не позволят нам стабилизировать этим методом одновременно два столбца матрицы g, с тем, чтобы попасть в субмаксимальную параболическую подгруппу. В дипломной работе моего (тогда) студента Михаила Гавриловича [8] предложен новый геометрический подход к доказательству структурных теорем для групп типов E_6, E_7, который мы назвали **доказательством из Книги**. За счет совсем простых теоретико-групповых соображений в этом доказательстве нам удалось полностью избежать ссылок на знаки структурных констант. Что еще более замечательно, в этом доказательстве вообще не используются какие-либо неочевидные уравнения на элементы матриц $g = (g_{\lambda\mu}) \in \pi(G)$, даже квадратичные уравнения на столбцы! Единственное, на что мы при этом ссылаемся, это *линейные* уравнения на элементы алгебр Ли. Как заметил ван дер Каллен, было бы подозрительно, если бы в подобном доказательстве удалось использовать *меньше* информации о группе!

В дальнейшем в дипломной работе Сергея Николенко [12] аналогичное доказательство было получено для случая F_4. Здесь доказательство уже *значительно* сложнее, так как теперь мы можем пользоваться только *длинными* корнями, которых в F_4 в три раза меньше, чем в E_6. К сожалению, для случая E_8 нам пока не удалось полностью преодолеть технические трудности, связанные с тем, что $e_\alpha^2 \neq 0$. Основной вычислительный трюк работы [8] можно сформулировать следующим образом. Ограничимся для простоты случаями $\Phi = E_6, E_7$, все детали для F_4 можно найти в [9, 12].

Теорема 7. *Пусть* $z \in G(\Phi, R)$, $\Phi = E_6, E_7$, *причем* $g = [z, x_\delta(1)]$ *нецентрален. Тогда существует элемент корневого типа* $x = x_{\beta_1}(\xi)x_{\beta_2}(\zeta)$ *такой, что* $(xg)_{*\mu} = g_{*\mu}$ *для некоторого веса* μ *и* $[x, g] \neq e$.

Тот факт, что в доказательстве предыдущей теоремы используются только вложения $A_2 \leqslant E_6, E_7$, оставляет нам большую свободу. Например, одной из центральных открытых проблем этой теории является вопрос о центральности K_2. Полное опубликованное доказательство имеется *только* в случае $\Phi = A_l$, оно было получено около 30 лет назад Вильбердом ван дер Калленом [41] и Маратом Туленбаевым. В 1998 году Бак и Танг объявили доказательство для $\Phi = C_l, D_l$, но детали вычислений до сих пор не опубликованы. Используя вложения $A_3 \leqslant E_6, E_7$, можно доказать такой вариант теоремы 7, см. [65].

Теорема 8. *Пусть* $z \in G(\Phi, R)$, $\Phi = E_6, E_7$, *причем* $g = [z, x_\delta(1)]$ *нецентрален. Тогда существует элемент корневого типа* $x = x_{\beta_1}(\xi)x_{\beta_2}(\zeta)x_{\beta_3}(\eta)$

такой, что $(xg)_{*\lambda} = g_{*\lambda}$, $(xg)_{*\mu} = g_{*\mu}$ *для некоторых весов* λ, μ *на расстоянии* 1 *и* $[x, g] \neq e$.

Эта теорема позволяет строить такие модели групп Стейнберга $\widetilde{\mathrm{St}}(\Phi, R)$, $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$, для которых ядро проекции на элементарную группу $E(\Phi, R)$ центрально. Разумеется, это только самое начало работы по обобщению [41], так как теперь для завершения доказательства центральности K_2 остается сделать самое главное, а именно, доказать изоморфизм этих моделей с обычными группами Стейнберга соответствующих типов! Заметим, что для $\Phi = \mathrm{F}_4$ доказательство из [12] не может быть усилено подобным образом, так что никакой надежды доказать центральность K_2 для этого случая таким методом нет. Совершенно другой подход к доказательству этого результата, который, *возможно*, работает и для F_4, был анонсирован в 2005 году Виктором Петровым, но детальное доказательство также еще не появилось.

Выше я пытался объяснить, как проводить вычисления в группе Шевалле G пользуясь минимумом информации об уравнениях, задающих группу. С другой стороны, сами уравнения, определяющие принадлежность индивидуальной матрицы образу $\pi(G)$ группы G в минимальном представлении, не являются секретом. Например, в недавней работе автора и Александра Лузгарева [10] явно строится идеал I в кольце целочисленных многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{27}]$, порожденный 27 квадратичными формами $f_1, \ldots, f_{27}$, обладающий следующим свойством. Обозначим через $\mathrm{Fix}_{\mathrm{R}}(\mathrm{I})$ множество R-линейных преобразований, сохраняющих идеал I, см. [67] или [10] по поводу точных определений.

Теорема 9. *Пусть* R *— любое коммутативное кольцо. Тогда*

$$N(E(\mathrm{E}_6, R)) = N(G(\mathrm{E}_6, R)) = \mathrm{Tran}(E(\mathrm{E}_6, R), G(\mathrm{E}_6, R)) = \overline{G}(\mathrm{E}_6, R) = \mathrm{Fix}_R(I).$$

Все нормализаторы и транспортеры здесь берутся в $\mathrm{GL}(27, \mathrm{R})$, а $\overline{G}(\mathrm{E}_6, R)$ обозначает расширенную группу Шевалле типа E_6, см. [3, 5, 32]. Разумеется, для полей характеристики 0 этот результат классически известен, 27 квадратичных форм — это в точности первые частные производные инвариантной кубической формы. План доказательства в общем случае следует Уильяму Уотерхаузу [67]. Основные технические сложности при переходе к произвольным коммутативным кольцам, это борьба с характеристиками 2 и 3 — что было проделано Майклом Ашбахером [25, 26] — и проверка гладкости схемы $R \mapsto \mathrm{Fix}_R(I)$. К сожалению, для E_7 нам пока удается получить аналогичный результат *только* при дополнительном предположении $2 \in R^*$, серьезные проблемы здесь возникают уже для полей характеристики 2, см. [26, 36].

В заключение сформулируем основной результат работы Алексея Степанова и автора [56], в доказательстве которого приходится использовать как локализационные, так и геометрические методы. Линейный случай был ранее рассмотрен в [50].

Теорема 10. *Пусть $G = G(\Phi, R)$ — группа Шевалле ранга $\geqslant 2$, а кольцо R конечномерно, $d = \dim(\mathrm{Max}(R)) < \infty$. Тогда существует натуральное число r, зависящее только от Φ и d такое, что каждый коммутатор $[g, h]$ элементов $g \in \mathrm{G}(\Phi, R)$ и $h \in \mathrm{E}(\Phi, R)$ является произведением не более, чем r элементарных трансвекций.*

К сожалению, в рамках доклада невозможно упомянуть все полученные в этой области результаты. В частности, мы вообще не затронули вопросы стабилизации K-функторов (см. [28, 49, 47, 53]), различные вопросы описания подгрупп и надгрупп (см. ссылки в [13, 14, 17, 46, 54, 57, 62]), комбинаторной геометрии унипотентных подгрупп и торов, автоморфизмы [1], эффективные задания образующими и соотношениями, геометрию разложений типа Брюа, формы исключительных групп и многое другое. Во всех этих направлениях петербургскими математиками в последние 4–5 лет были получены важные, в некоторых случаях решающие, продвижения.

Литература

[1] Абе, Э. Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами / Э. Абе // Алгебра и Анализ. – 1993. – Т. 5. – № 2. – С. 74–90.

[2] Борель, А. Свойства и линейные представления групп Шевалле / А. Борель // Семинар по алгебраическим группам. – М.: Мир, 1973. – С. 9–59.

[3] Вавилов, Н.А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор / Н.А. Вавилов // Труды Ленингр. Мат. Об-ва. – 1990. – Т. 1. – С. 64–109

[4] Вавилов, Н.А. Как увидеть знаки структурных констант? / Н.А. Вавилов // Алгебра и Анализ. – 2007. – Т. 19. – № 4. – С. 34–68.

[5] Вавилов, Н.А. Весовые элементы групп Шевалле / Н.А. Вавилов // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т. 20. – № 1. – С. 34–85.

[6] Вавилов, Н.А. Нумерология квадратных уравнений / Н.А. Вавилов // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т. 20. – № 3.

[7] Вавилов, Н.А. Разложение унипотентов в присоединенном представлении группы Шевалле типа E_6 / Н.А. Вавилов // Алгебра и Анализ (появится).

[8] Вавилов, Н.А. A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 / Н.А. Вавилов, М.Р. Гаврилович // Алгебра и Анализ. – 2004. – Т. 16. – № 4. – С. 54–87.

[9] Вавилов, Н.А. Строение групп Шевалле: док-во из кн. / Н.А. Вавилов, М.Р. Гаврилович, С.И. Николенко // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2006. – Т. 330. – С. 36–76.

[10] Вавилов, Н.А., А.Ю. Лузгарев Нормализатор группы Шевалле типа E_6 / Н.А. Вавилов, А.Ю. Лузгарев // Алгебра и Анализ. – 2007. – Т. 19. – № 5. – С. 35–62.

[11] Вавилов, Н.А. Группа Шевалле типа F_4 в 27-мерном представлении / Н.А. Вавилов, А.Ю. Лузгарев, И.М. Певзнер // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2008. – Т. 20. – № 2. – С. 5–68.

[12] Вавилов, Н.А. A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов F_4 / Н.А. Вавилов, С.И. Николенко // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т. 20. – № 2.

[13] Вавилов, Н.А. О надгруппах $Ep(2l, R)$ / Н.А. Вавилов, В.А. Петров // Алгебра и Анализ. – 2003. – Т. 15. – № 3. – С. 72–114.

[14] Вавилов, Н.А. О надгруппах $EO(n, R)$ / Н.А. Вавилов, В.А. Петров // Алгебра и Анализ. – 2007. – Т. 19. – № 2. – С. 10–51.

[15] Вавилов, Н.А. Поливекторное представление GL_n / Н.А. Вавилов, Е.Я. Перельман // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2006. – Т. 338. – С. 69–97.

[16] Вавилов, Н.А. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами / Н.А. Вавилов, Е.Б. Плоткин, А.В. Степанов // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 40. – № 1. – С. 145–147.

[17] Лузгарев, А.Ю. О надгруппах $E(E_6, R)$ и $E(E_7, R)$ в минимальных представлениях / А.Ю. Лузгарев // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2004. – Т. 319. – С. 216–243.

[18] Спрингер, Т.А. Линейные алгебраические группы / Т.А. Спрингер // Итоги науки и техн., Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1989. – Т. 55. – С. 5–136.

[19] Стейнберг, Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 262 с.

[20] Суслин, А.А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов / А.А. Суслин // Изв. АН СССР, Сер. Мат. – 1977. – Т. 141. – № 2. – С. 235–253.

[21] Abe, E. Chevalley groups over local rings / E. Abe // Tôhoku Math. J. – 1969. – V. 21. – № 3. – P. 474–494.

[22] Abe, E. Chevalley groups over commutative rings / E. Abe // Proc. Conf. Radical Theory, Sendai. – 1988. – P. 1–23.

[23] Abe, E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings / E. Abe // Contemp. Math. – 1989. – V. 83. – P. 1–17.

[24] Abe, E. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings / E. Abe, K. Suzuki // Tôhoku Math. J. – 1976. – V. 28. – № 1. – P. 185–198.

[25] Aschbacher, M. The 27-dimensional module for E_6. I–IV / M. Aschbacher // Invent. Math. – 1987. – V. 89. – № 1. – P. 159–195; J. London Math. Soc. – 1988. – V. 37. – P. 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – V. 321. – P. 45–84; J. Algebra. – 1991. – V. 191. – P. 23–39.

[26] Aschbacher, M. Some multilinear forms with large isometry groups / M. Aschbacher // Geom. dedic. – 1988. – V. 25. – № 1–3. – P. 417–465

[27] Bak, A. Non-abelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability / A. Bak // K-Theory. – 1991. – V. 4. – P. 363–397.

[28] Bak, A. Stability for quadratic K_1 / A. Bak, V. Petrov, Gouping Tang // K-Theory. – 2003. – V. 30. – № 1. – P. 1–11.

[29] Bak, A. Normality of the elementary subgroup functors / A. Bak, N. Vavilov // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1995. – V. 118. – № 1. – P. 35–47.

[30] Bak, A. Structure of hyperbolic unitary groups I. Elementary subgroups / A. Bak, N. Vavilov // Algebra Colloquium. – 2000. – V. 7. – № 2. – P. 159–196.

[31] Bak, A. Localisation-completion: application to classical-like groups / A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov // J. Pure Appl. Algebra (to appear).

[32] Berman, S. Extensions of Chevalley groups / S. Berman, R.V. Moody // Israel J. Math. – 1975. – V. 22. – № 1. – P. 42–51.

[33] Carter, R.W. Simple groups of Lie type / R.W. Carter. – London: Wiley, 1972. – 331 p.

[34] Costa, D.L. Radix redux: normal subgroups of symplectic groups / D.L. Costa, G.E. Keller // J. Reine Angew. Math. – 1991. – V. 427. – № 1. – P. 51–105.

[35] Costa, D.L. On the normal subgroups of $G_2(A)$ / D.L. Costa, G.E. Keller // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 351. – № 12. – P. 5051–5088.

[36] Cooperstein, B.N. The fifty-six-dimensional module for E_7. I. A four form for E_7 / B.N. Cooperstein // J. Algebra. – 1995. – V. 173. – P. 361–389.

[37] Hahn, A. The classical groups and K-theory / A. Hahn, O.T. O'Meara Springer–Verlag. – N.Y. et al. – 1989. – 576 p.

[38] Hazrat, R. Dimension theory and non-stable K_1 of quadratic module / R. Hazrat // K-Theory. – 2002. – V. 27. – P. 293–327.

[39] Hazrat, R. K_1 of Chevalley groups are nilpotent / R. Hazrat, N. Vavilov // J. Pure Appl. Algebra. – 2003. – V. 179. – P. 99–116.

[40] Hazrat, R. Bak's work on lower K-theory of rings / R. Hazrat, N. Vavilov // (to appear).

[41] van der Kallen, W. Another presentation for Steinberg groups / W. van der Kallen // Indag. Math. – 1977. – V. 39. – № 4. – P. 304–312.

[42] van der Kallen, W. $SL_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length / W. van der Kallen // Springer Lecture Notes Math. – 1982. – V. 966. – P. 357–361.

[43] van der Kallen, W. A module structure on certain orbit sets of unimodular rows / W. van der Kallen // J. Pure Appl. Algebra. – 1989 – V. 57. – № 3. – P. 281–316.

[44] Lichtenstein, W. A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector / W. Lichtenstein // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 84. – № 4. – P. 605–608.

[45] Matsumoto, H. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés / H. Matsumoto // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). – 1969. – V. 2. – P. 1–62.

[46] Petrov, V.A. Overgroups of unitary groups / V.A. Petrov // K-Theory. – 2003. – V. 29. – P. 147–174.

[47] Plotkin, E. On the stability of K_1-functor for Chevalley groups of type E_7 / E. Plotkin // J. Algebra. – 1998. – V. 210. – P. 67–85.

[48] Plotkin, E. Visual basic representations: an atlas / E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov // Internat J. Algebra Comput. – 1998. – V. 8. – № 1. – P. 61–95.

[49] Plotkin, E.B. Stability of K-functors modeled on Chevalley groups, revisited / E.B. Plotkin, M.R. Stein, N.A. Vavilov. – (to appear).

[50] Sivatsky, A. On the word length of commutators in $\mathrm{GL}_n(\mathrm{R})$ / A. Sivatsky, A. Stepanov // K-Theory. – 1999. – V. 17. – P. 295–302.

[51] Springer, T.A. Octonions, Jordan algebras and exceptional groups / T.A. Springer, F.D. Veldkamp. – Berlin, 2000. – 208 p.

[52] Stein, M.R. Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings / M.R. Stein // Amer. J. Math. – 1971. – V. 93. – № 4. – P. 965–1004.

[53] Stein, M.R. Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups / M.R. Stein // Japan J. Math. – 1978. – V. 4. – № 1. – P. 77–108.

[54] Stepanov, A. Nonstandard subgroups between $E_n(R)$ and $\mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$ / A. Stepanov // Algebra Colloquium. – 2004. – V. 10. – № 3. – P. 321–334.

[55] Stepanov, A. Decomposition of transvections: a theme with variations / A. Stepanov, N. Vavilov // K-Theory. – 2000. – V. 19. – P. 109–153.

[56] Stepanov, A. On the length of commutators in Chevalley groups / A. Stepanov, N. Vavilov (to appear).

[57] Stepanov A. Overgroups of semi-simple subgroups via localisation-completion / A. Stepanov, N. Vavilov, Hong You (to appear).

[58] Suzuki, K. Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings / K. Suzuki // J. Algebra. – 1995. – V. 175. – № 3. – P. 526–536.

[59] Taddei, G. Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau / G. Taddei // Contemp. Math. – 1986. – V. 55. – Part II. – P. 693–710.

[60] Vaserstein, L.N. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings / L.N. Vaserstein // Tôhoku Math. J. – 1986. – V. 36. – № 5. – P. 219–230.

[61] Vavilov, N.A. Structure of Chevalley groups over commutative rings / N.A. Vavilov // Proc. Conf. Nonassociative algebras and related topics. Hiroshima, 1990. – London: World Scientific, 1991. – P. 219–335.

[62] Vavilov, N.A. Intermediate subgroups in Chevalley groups / N.A. Vavilov // Groups of Lie Type and their Geometries (Como, 1993). – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – P. 233–280.

[63] Vavilov, N.A. A third look at weight diagrams / N.A. Vavilov // Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova. – 2000. – V. 204. – P. 1–45.

[64] Vavilov, N.A. Do it yourself structure constants for Lie algebras of type E_l / N.A. Vavilov // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2001. – V. 281. – P. 60–104.

[65] Vavilov, N.A. An A_3-proof of structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7 / N.A. Vavilov // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – V. 17. – № 5–6. – P. 1283–1298.

[66] Vavilov, N.A. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations / N.A. Vavilov, E. Plotkin // Acta Applicandae Math. – 1996. – V. 45. – No 1. – P. 73–113.

[67] Waterhouse, W.C. Automorphisms of $\det(X_{ij})$: the group scheme approach / W.C. Waterhouse // Adv. Math. – 1987. – V. 65. – No 2. – P. 171–203.

Поступила в редакцию 17/*IX*/2007;
в окончательном варианте – 17/*IX*/2007.

CALCULATIONS IN EXCEPTIONAL GROUPS

© 2007 N.A. Vavilov[3]

This is the text of a talk at the International Conference in Algebra and Number Theory, dedicated to the 80-th anniversary of Prof. V.E. Voskresenskii (Samara, 2007). We describe calculations in Chevalley groups $G(\Phi, R)$ over a commutative ring. We formulate recent results by A. Bak, R. Hazrat and the author on the nilpotent structure of $K_1(\Phi, R)$, based on the method of *localisation-completion*. We thoroughly discuss geometric approaches to proof of main structure theorems, both the *decomposition of unipotents* developed by A. Stepanov, the author and E. Plotkin since 1990, and the *proof from the book* $\approx$ A_2-proof, discovered recently by the author, M. Gavrilovich and S. Nikolenko. We give also closely related results, such as the main lemma of the A_3-proof, proposed by the author to assault centrality of $K_2(\Phi, R)$ for exceptional groups; a characterisation of the extended Chevalley group of type E_6 over an arbitrary commutative ring, found recently by the author and A. Luzgarev; and finiteness of commutators in elementary generators, established by A. Stepanov and the author.

Paper received 17/*IX*/2007. Paper accepted 17/*IX*/2007.

[3]Vavilov Nikolaш Alexandrovich (nikolai-vavilov@yandex.ru), Dept. of Higher Algebra and Number Theory, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Petrodvotets, Russia.