УДК 519.62

О КВАЗИОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СЕТКАХ ШИШКИНА

© 2007 И.А. Блатов[1], Н.В. Добробог[2]

Ввиду наличия у решений сингулярно возмущенных краевых задач зон пограничного слоя традиционные для проекционно-сеточных методов оценки погрешности в интегральных нормах не гарантируют поточечную аппроксимацию решений. Необходимы оценки погрешности в равномерной норме. Такие оценки на сетках Н.С. Бахвалова [1] были получены в [6, 4]. В последнее время широкое распространение получили сетки Г.И. Шишкина [2], схемы на которых отличаются алгоритмической простотой и универсальностью теоретического обоснования. В настоящей работе результаты, аналогичные [6, 4], получены для сеток Шишкина.

1. Обозначения

В этой работе будем использовать следующую терминологию. $[z]$ обозначает целую часть вещественного числа z. Пусть Δ: $-1 = t_{-p} < t_{-p+1} < ... < t_{p-1} < t_p = 1$ — некоторое разбиение отрезка $[-1, 1]$. Через $N_{1,i}(t)$ будем обозначать нормированные на единицу в $C[-1, 1]$ сплайны первой степени на разбиении Δ с носителем на интервале (t_i, t_{i+2}), а через $S(\Delta, 1, 1)$ — пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Δ. Всюду ε означает малый положительный параметр. Через C, C_1, C_2... будем обозначать положительные константы, не зависящие от ε и разбиения Δ. Будем писать $f(\varepsilon, \Delta) = O^*(g(\varepsilon, \Delta))$, если $C_1|f(\varepsilon, \Delta)| \leqslant g(\varepsilon, \Delta) \leqslant C_2|f(\varepsilon, \Delta)|$. $\|A\|_2$ обозначает спектральную норму квадратной матрицы A. Под $\|.\|$ будем понимать норму в $C[-1, 1]$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ сингулярно возмущенную краевую задачу

$$Lx \equiv -\varepsilon^2\ddot{x} + c(t)x = f(t),\ c(t) \geqslant c_0 > 0, \tag{2.1}$$

[1]Игорь Анатольевич Блатов (blatow@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Надежда Викторовна Добробог (larisaisaeva@yandex.ru), кафедра высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики, 443090, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 77.

$$x(-1) = x(1) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $x \in D$, где D — область определения оператора L, а функции $c(t)$ и $f(t)$ из класса $C^2[-1,1]$.

Эта задача имеет особенности типа пограничного слоя в окрестности точек 1 и -1, и справедливо [5] асимптотическое разложение

$$x(t) = \frac{f(t)}{c(t)} - C_1 e^{-\sqrt{c(-1)}\frac{t+1}{\varepsilon}} - C_2 e^{\sqrt{c(1)}\frac{t-1}{\varepsilon}} + O\Big(\varepsilon\Big).$$

3. Численный метод решения задачи (2.1)–(2.2) на сетке Шишкина

Определим на отрезке $[-1,1]$ кусочно-равномерную сетку узлов Δ, которая представляет собой комбинацию двух равномерных сеток: мелкой сетки в области погранслоев и крупной сетки — вне погранслоев, в соответствии с известной методикой Шишкина [2]:

$$t_i = \begin{cases} a\dfrac{i}{m}, & i = 0,1,...m \\ a + (1-a)\dfrac{i-m}{k^*-m}, & i = m+1, m+2, ...k^*, \quad t_{-i} = -t_i,\ i = 0,1,...k^*, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $k^* = m + \Big[\dfrac{2}{p_0} m |\ln m|\Big] + 1,\ a = 1 - \dfrac{2}{p_0}\varepsilon \ln m,\ m \in N,\ p_0 = c_0.$

Построенное разбиение будем называть сеткой Шишкина с параметром p_0.

Введем пространство

$$E = \{x_m = x_m(t) \in S(\Delta,1,1),\ x_m(-1) = x_m(1) = 0\},$$

где $S(\Delta,1,1)$ — пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Шишкина Δ, определяемой равенством (3.1). Размерность пространства E равна $2k^* - 1$.

Для нахождения приближенного решения задачи (2.1)–(2.2) будем использовать метод конечных элементов Галеркина, суть которого состоит в отыскании $x_m(t) \in E$, такой, что для любой функции $y(t) \in E$ имеет место

$$F_\varepsilon(x_m, y) \equiv \varepsilon(x_m', y') + (x_m, c(t)\,y) = (f, y), \tag{3.2}$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[-1,1]$.

Теорема 1. Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0,\ m_0 \in N,\ C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ m > m_0 :\ \varepsilon m \leqslant 1$ существует единственное решение $x_m(t)$ задачи (3.2), причем для решения $x_m(t)$ справедлива оценка:

$$\|x_m(t) - x(t)\| \leqslant \frac{C}{m^2}.$$

4. Галеркинский проектор

Определение 3. Оператор $P\colon E \to E$ называется *галеркинским проектором*, если $Px = x_m$, где x — точное решение задачи (2.1)–(2.2), x_m — решение задачи (3.2).

Как было показано в [3], галеркинский проектор P можно представить в виде

$$Px = \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F(\lambda_j, x) N_{1,j-1}(t), \tag{4.1}$$

где $F_\varepsilon(\lambda_j, x) = \varepsilon^2(\lambda_j', x') + (\lambda_j, c(t)x)$; $\{\lambda_j(t)\}$, $j = \overline{-k^*+1, k^*-1}$ — совокупность функций из $S(\Delta, 1, 1)$, образующих биортогональный к $\{N_{1,i}(t)\}$ базис в смысле формы F_ε, т.е.

$$F_\varepsilon(N_{1,i}, \lambda_j) = \delta_{i,j-1}. \tag{4.2}$$

Будем говорить, что галеркинский проектор обладает свойством квазиоптимальности на E и, соответственно, метод Галеркина будем называть квазиоптимальным, если для любых m и ε найдется константа $C > 0$ такая, что

$$\| P \| \leqslant C. \tag{4.3}$$

Для оценки погрешности приближенного решения принципиальной является оценка (4.3).

Основной конструкцией при доказательстве (4.3) служит биортогональный базис $\lambda_i(t)$. Представление галеркинского проектора (4.1) через базис из B-сплайнов и биортогональный к нему в $L_2[-1, 1]$ базис позволит доказать равномерную по ε и m ограниченность норм галеркинских проекторов и тем самым основной результат.

В дальнейшем нам удобно рассматривать $\lambda_i(t)$ как элементы сопряженного к Å пространства E^*, понимая, что $< u, \lambda_i > = F_\varepsilon(u, \lambda_i)$. Поэтому функции $\lambda_i(t) \in E$ будем называть функционалами над Å.

Для построения биортогональных функционалов $\lambda_i(t)$ сначала построим вспомогательные локальные функционалы $\mu_i^1(t)$ на $[-a, a]$ и $\mu_i^2(t)$ в погранслоях.

5. Построение биортогональных функционалов

5.1. Построение локальных функционалов на отрезке [–a,a]

Будем искать локальный функционал $\mu_i^1(t) \in S(\Delta, 1, 1)$, $t \in [-a, a]$, $-m \leqslant i \leqslant m$, такой, что

$$F_\varepsilon(N_{1,j}, \mu_i^1) = \delta_{i-1,j}, \qquad -m-1 \leqslant j \leqslant m-1, \tag{5.1}$$

где $F_\varepsilon(N_{1,j}, \mu_i^1) = \varepsilon^2(N_{1,j}', \mu_i^{1\prime}) + (N_{1,j}, c(t)\mu_i^1)$, в виде

$$\mu_i^1(t) = \sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k N_{1,k}(t).$$

Здесь $\{\gamma_k\}$, $k = \overline{-m-1, m-1}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, интегралы при вычислении $F_\varepsilon(u, v)$ берутся по $[t_{-m}, t_m]$.

Из условия биортогональности в смысле формы F_ε (5.1) имеем:

$$\sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k\, F_\varepsilon(N_{1,j}, N_{1,k}) = \delta_{i-1,j}, \quad -m-1 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{5.2}$$

(5.2) есть СЛАУ относительно $\gamma_{-m-1}, \gamma_{-m}, \ldots \gamma_{m-1}$. Матрица этой системы представляет собой матрицу Грама $A = \{a_{sl}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$ относительно скалярного произведения $[u, v] = F_\varepsilon(u, v)$. Тогда (5.2) можно записать в векторно-матричной форме

$$A\gamma = b, \tag{5.3}$$

где $\gamma = (\gamma_{-m-1}, \gamma_{-m}, \ldots \gamma_{m-1})^t$, $b = (b_{-m-1}, b_{-m}, \ldots b_{m-1})^t$, $A = \{a_{sl}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$.

Очевидно, что матрица A трехдиагональна, т.е. $a_{sl} = 0$ при $|s - l| > 1$, а вектор b имеет только одну, отличную от нуля, компоненту $b_{i-1} = 1$.

Лемма 1. Найдется такая константа $C_1 > 0$, не зависящая от i, m, что при $\varepsilon m \leqslant 1$ справедливы оценки

$$\| A^{-1} \|_2 \leqslant C_1 m. \tag{5.4}$$

Замечание. Нормировкой базисных функций на единицу в $L_2[-1,1]$ мы можем заменить оценку (5.4) на оценку

$$\| A^{-1} \|_2 \leqslant C_2. \tag{5.5}$$

Лемма 2. Для нормированных на единицу в $L_2[-1,1]$ функций $\tilde{N}_{1,i}(t)$ справедливы оценки:

$$|F(\tilde{N}_{1,i}, \tilde{N}_{1,j})| \leqslant C_3. \tag{5.6}$$

Теорема 2 (Демко, [6]). Для любой константы $C_4 > 0$ найдутся такие константы $C_5 > 0$, $q \in (0,1)$, что если трехдиагональная матрица A такова, что $\max\Big\{\| A \|_2, \| A^{-1} \|_2\Big\} \leqslant C_4$, тогда элементы матрицы $A^{-1} = \{a^{rev}_{s,l}\}^{m-1}_{s,l=-m-1}$ удовлетворяют оценкам

$$|a^{rev}_{s,l}| \leqslant C_5 q^{|s-l|}, \qquad s, l = \overline{-m-1, m-1}.$$

Из формул (5.5), (5.6) и теоремы Демко получаем:

$$|a^{rev}_{s,l}| \leqslant C_5 m q^{|s-l|}, \qquad s, l = \overline{-m-1, m-1}. \tag{5.7}$$

Используя оценки (5.7) для системы (5.2), имеем:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{-m-1} \\ \gamma_{-m} \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{pmatrix} = A^{-1} b = \begin{pmatrix} a^{rev}_{-m-1,i-1} \\ a^{rev}_{-m,i-1} \\ \vdots \\ a^{rev}_{m-1,i-1} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$|\gamma_k| = |a^{rev}_{k,i-1}| \leqslant C_6 m q^{|k-i+1|}, \qquad k = \overline{-m-1, m-1}.$$

Итак, доказана оценка

$$|\gamma_k| \leqslant C_6 m q^{|k-i+1|},\ k = \overline{-m-1, m-1}. \tag{5.8}$$

Из (5.8) вытекает оценка локального функционала $\mu^1_i(t)$ при $t \in [t_s, t_{s+1}]$:

$$|\mu^1_i(t)| = |\gamma_{s-1} N_{1,s-1}(t) + \gamma_s N_{1,s}(t)| \leqslant C_7 m q^{|s-i|}. \tag{5.9}$$

И, в частности, справедливо $\mu^1_m(a) = O(m)$, $\mu^1_m(-a) = O(mq^{2m})$.

Оценки (5.9) позволяют доказать следующую лемму

Лемма 3. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от i, m, что справедливы оценки

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_i(t)|\, dt \leqslant C, \qquad -m \leqslant i \leqslant m. \tag{5.10}$$

5.2. Построение локальных функционалов в пограничных слоях

Для определенности рассмотрим построение локального биортогонального функционала в правом погранслое на отрезке $[a, 1]$ (на отрезке $[-1, -a]$ построение проводится аналогично). Пусть

$$G_\varepsilon(t, t_i) = \begin{cases} g^1_{\varepsilon,i}(t), & t \in [a, t_i] \\ g^2_{\varepsilon,i}(t), & t \in [t_i, 1] \end{cases}, \qquad i = \overline{m+1, k^* - 1} \tag{5.11}$$

функция Грина краевой задачи для уравнения (2.1) на отрезке $[a, 1]$ с условиями

$$x_m(a) = x_m(1) = 0.$$

Здесь $g^1_{\varepsilon,i}(t)$ и $g^2_{\varepsilon,i}(t)$ — соответственно левая и правая срезки функции Грина. Тогда функции $G_\varepsilon(t, t_i)$, $i = \overline{m+1, k^*-1}$ удовлетворяют однородным условиям на отрезке $[a, 1]$

$$G_\varepsilon(a, t_i) = G_\varepsilon(1, t_i) = 0.$$

Определим функционал

$$\nu_i(t) = \begin{cases} \tilde{g}^1_i(t), & t \in [a, t_i], \\ \tilde{g}^2_i(t), & t \in [t_i, 1], \end{cases}$$

как кусочно-линейный интерполянт функции Грина (5.11) при $i = \overline{m+1, k^*-1}$, где $\tilde{g}^1_i(t)$ и $\tilde{g}^2_i(t)$ — кусочно-линейные интерполянты функций $g^1_{\varepsilon,i}(t)$ и $g^2_{\varepsilon,i}(t)$. В случае $i = m$ соответствующий функционал $\nu_m(t)$ определим как кусочно-линейный интерполянт $\tilde{g}^2_m$, удовлетворяющего условию $\tilde{g}^2_m(1) = 0$. Заметим, что при этом выполняются следующие условия

$$\nu_i(a) = \nu_i(1) = 0, \qquad i = \overline{m+1, k^*-1},$$

$$\nu_m(a) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big), \qquad \nu_m(1) = 0.$$

и на $[a, 1]$ справедливы оценки

$$|\nu_m(t)| = O^*\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{-\dfrac{t-t_m}{\varepsilon}}\right), \quad |\nu_i(t)| = O^*\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{-\dfrac{|t-t_i|}{\varepsilon}}\right), \quad i = \overline{m+1, k^*-1}. \tag{5.12}$$

В случае $m + 1 \leqslant i \leqslant k^* - 1$ будем искать локальный функционал $\mu^2_i(t)$ в виде

$$\mu^2_i(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_{k,i}\nu_k(t), \quad t \in [t_m, 1],$$

причем $\mu^2_i(a) = \mu^2_i(1) = 0$ и коэффициенты $\{\alpha_{k,i}\}$, $k = m+1, ..., k^*-1$ определяются из выполнения условий биортогональности в смысле формы F_ε

$$F_\varepsilon\Big(N_{1,j},\, \mu^2_i(t)\Big) = \delta_{i-1,j}. \tag{5.13}$$

Интегралы при вычислении $F_\varepsilon(u, v)$ берутся по $[t_m, 1]$. Совокупность равенств (5.13) представляет собой СЛАУ порядка (k^*-m-2) относительно неизвестных $\{\alpha_{k,i}\}$, $k = m+1, ..., k^*-1$:

$$\sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k F_\varepsilon(N_{1,j}, \nu_k(t)) = \delta_{i-1,j}, \quad m \leqslant j \leqslant k^*-2, \quad m+1 \leqslant i \leqslant k^*-1. \tag{5.14}$$

Из оценки $t_{i+1} - t_i = O^*\Big(\dfrac{\varepsilon}{m}\Big)$ и оценок кусочно-линейной интерполяции можно получить

$$\Big|F_\varepsilon(N_{1,j}, \nu_k(t))\Big| = \begin{cases} O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big), & j < k-1, \\ 1 + O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big), & j = k-1, \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big), & j > k-1. \end{cases}$$

Тогда СЛАУ (5.14) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1+O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & 1+O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & 1+O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{m+1,i} \\ \alpha_{m+2,i} \\ \cdots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i-1\,. \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{5.15}$$

Таким образом, чтобы определить все функционалы $\mu_i^2(t)$, $\quad m+1 \leqslant i \leqslant k^*-1$ необходимо решить k^*-m-2 систем вида (5.15). Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{m+1,i} \\ \alpha_{m+2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \alpha_i, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_i,$$

$$\begin{pmatrix} O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) & \cdots & O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big) \end{pmatrix} = E_i, \qquad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

и систему (5.15) для определения функционала $\mu_i^2(t)$ перепишем в векторно-матричном виде $(I_i+E_i)\alpha_i = b_i$, $\quad i=\overline{m+1,k^*-1}$, где $\| E_i \|_\infty \leqslant \dfrac{C}{m^3}$. Оценим элементы вектора $\alpha_i = \{\alpha_{k,i}\}$, $k=\overline{m+1,k^*-1}$.

$$\alpha_i = (I_i+E_i)^{-1}b_i = \Big(I_i + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j E_i^j\Big)b_i.$$

Так как $\Big\|\sum\limits_{j=1}^{\infty} E_i^j\Big\| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \| E_i \|^j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}\Big(\dfrac{C}{m^3}\Big)^j = \dfrac{\dfrac{C}{m^3}}{1-\dfrac{C}{m^3}} = O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big)$, получаем, что

$$\alpha_{k,i} = \begin{cases} 1+O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big), & k=i, \\ O\Big(\dfrac{1}{m^3}\Big), & k \neq i. \end{cases} \tag{5.16}$$

Итак, локальные биортогональные функционалы в правом погранслое имеют вид

$$\mu_i^2(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k \nu_k(t) = \Big(1+O\Big(\frac{1}{m^3}\Big)\Big)\nu_i(t) + \sum_{k=m+1,\,k\neq i}^{k^*-1} \alpha_{k,i}\nu_k(t), \tag{5.17}$$
$$m+1 \leqslant i \leqslant k^*-1, \quad t \in [a,1],$$

где $\alpha_{k,i}$ удовлетворяют оценкам (5.16). В случае $i=m$ определим локальный функционал следующим образом

$$\mu_m^2(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k,m}\nu_k(t), \quad t \in [t_m, 1].$$

Для определенного таким образом функционала также справедлива оценка

$$\mu_m^2(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k,m}\nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)\nu_m(t) + \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_{k,i}\nu_k(t), \quad t \in [a,1].$$

Тогда с учетом условия (5.12) имеем

$$\mu_m^2(a) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{5.18}$$

Лемма 4. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от i, m, что справедливы оценки

$$\int_{t_m}^{1} |\mu_i^2(t)|\,dt \leqslant C, \qquad m \leqslant i \leqslant k^* - 1. \tag{5.19}$$

5.3. Продолжение локальных функционалов на [-1,1]

Определим для каждого локального функционала $\mu_i^2(t)$, $i = \overline{-k^*+1, -m}$, $\mu_i^2(t)$, $\overline{m, k^*-1}$ и $\mu_i^1(t)$, $i = \overline{-m, m}$ функционал $\mu_i(t)$, $i = -k^*+1, \ldots, k^*-1$ как его продолжение по непрерывности на $[-1,1]$. Положим

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \alpha_{-m}^i\,\mu_{-m}^2(t), & t \in [-1,-a], \\ \mu_i^1(t), & t \in [-a,a], \\ \alpha_m^i\,\mu_m^2(t), & t \in [a,1], \quad i = -m+1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

для локальных функционалов из погранслоев

$$\mu_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,a], \\ \mu_i^2(t), & t \in [a,1], \quad i = m+1, \ldots, k^*-1, \end{cases}$$

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \mu_i^2(t), & t \in [-1,-a], \\ 0, & t \in [-a,1], \quad i = -k^*+1, \ldots, -m-1. \end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha_{\pm m}^i$ обеспечивают непрерывность функций $\mu_i(t)$ в точках $t = \pm a$. Нетрудно видеть, что из оценок (5.9), (5.18) вытекает, что

$$\alpha_m^i = O(\varepsilon m q^{m-i}), \ \alpha_{-m}^i = O(\varepsilon m q^{m+i}) \tag{5.20}$$

В случае $i = \pm m$ сначала определим два вспомогательных функционала

$$\overline{\mu}_m(t) = \begin{cases} \alpha_{-m}\,\mu_{-m}^2(t), & t \in [-1,-a], \\ \mu_m^1(t), & t \in [-a,a], \\ \alpha_m\,\mu_m^2(t), & t \in [a,1], \end{cases} \tag{5.21}$$

$$\overline{\mu}_{-m}(t) = \begin{cases} \beta_{-m}\,\mu_{-m}^2(t), & t \in [-1,-a], \\ \mu_{-m}^1(t), & t \in [-a,a], \\ \beta_m\,\mu_m^2(t), & t \in [a,1]. \end{cases}$$

Множители $\alpha_{\pm m}$ и $\beta_{\pm m}$ выбираем так, чтобы функции (5.21), (5.22) были непрерывными при $t = \pm a$. Рассмотрим построение функционала $\mu_m(t)$.

Из оценок предыдущих пунктов имеем

$$\mu_m^1(a) = O(m), \qquad \mu_m^1(-a) = O(mq^{2m}), \qquad \mu_m^2(a) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

и, следовательно,
$$\alpha_m = O(\varepsilon m), \qquad \alpha_{-m} = O(\varepsilon m q^{2m}). \tag{5.22}$$

Из условий (5.21), (5.22) вытекает, что
$$F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \overline{\mu}_m) = 1 + O(\varepsilon m). \tag{5.23}$$

Положим теперь
$$\mu_m(t) = \Delta_1 \overline{\mu}_m(t),$$
где нормирующий множитель Δ_1 подбирается из условия
$$F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_m) = 1,$$

согласно (5.23), имеем
$$\Delta_1 = 1 + O(\varepsilon m).$$

Аналогично определяется функционал $\mu_{-m}(t)$.

Имеем
$$F_\varepsilon(N_{1,k}, \mu_m) = \begin{cases} 1, & k = m-1, \\ 0, & k \neq -m-1, m-1, \\ O(\varepsilon m q^{2m}), & k = -m-1, \end{cases} \tag{5.24}$$
$$F_\varepsilon(N_{1,k}, \mu_{-m}) = \begin{cases} 1, & k = -m-1, \\ 0, & k \neq -m-1, m-1, \\ O(\varepsilon m q^{2m}), & k = m-1. \end{cases} \tag{5.25}$$

Непосредственно из построения функционалов $\mu_i(t)$, $i = \overline{-m+1, m-1}$ и (5.20) следует, что
$$\begin{gathered} F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i) = F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i^1) + \alpha_m^i F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_m^2) = \alpha_m^i = O(\varepsilon m q^{m-i}), \\ F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_i) = F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_i^1) + \alpha_{-m}^i F_\varepsilon(N_{1,-m+1}, \mu_{-m}^2) = \alpha_{-m}^i = O(\varepsilon m q^{m+i}). \end{gathered} \tag{5.26}$$

5.4. Обеспечение выполнения условия биортогональности

Заметим, что для построенных в предыдущем пункте функционалов μ_i, $i = -k^* + 1, ..., k^* - 1$ нарушаются условия биортогональности в смысле формы F_ε
$$F_\varepsilon\Big(N_{1,j},\ \mu_i(t)\Big) = \delta_{i-1,j} \tag{5.27}$$
на базисных функциях $N_{1,-m-1}(t)$ и $N_{1,m-1}(t)$. Теперь наша задача скорректировать эти функционалы μ_i, $i = -k^* + 1, ..., k^* - 1$ так, чтобы условия (5.27) выполнялись для всех $j = -k^*, ..., k^* - 2$.

Идея состоит в следующем: сначала определим биортогональные функционалы $\lambda_m(t)$ и $\lambda_{-m}(t)$ удовлетворяющие условиям (4.2), а затем с их помощью скорректируем остальные функционалы.

Определим $\lambda_m(t)$ и $\lambda_{-m}(t)$ по формулам
$$\lambda_m(t) = \alpha_m \mu_m(t) + \alpha_{-m}\mu_{-m}(t), \quad \lambda_{-m}(t) = \beta_m \mu_m(t) + \beta_{-m}(t)\mu_{-m}(t), \tag{5.28}$$
где константы $\alpha_{\pm m}, \beta_{\pm m}$ определяются из условия (4.2) при $i = \pm m$.

Из (5.24), (5.25) имеем
$$\alpha_m = 1 + O\Big(\varepsilon^2 m^2 q^{4m}\Big),\ \alpha_{-m} = O\Big(\varepsilon m q^{2m}\Big), \beta_m = O\Big(\varepsilon m q^{2m}\Big),\ \beta_{-m} = 1 + O\Big(\varepsilon^2 m^2 q^{4m}\Big). \tag{5.29}$$

Остальные функционалы $\lambda_i(t)$ определим формулами

$$\lambda_i(t) = \mu_i(t) + \delta_1\lambda_{-m}(t) + \delta_2\lambda_m(t), \qquad i = \overline{-k^* + 1, k^* - 1},\ i \neq \pm m,$$

где коэффициенты δ_1, δ_2 подбираем такими, чтобы выполнялось

$$F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \lambda_i) = 0, \quad F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \lambda_i) = 0.$$

Имеем

$$F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \lambda_i) = 0 \Rightarrow F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_i) + \delta_1 F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \lambda_{-m}) + \delta_2 F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \lambda_m) =$$
$$= F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_i) + \delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_1 = -F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_i),$$

$$F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \lambda_i) = 0 \Rightarrow F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i) + \delta_1 F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \lambda_{-m}) + \delta_2 F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \lambda_m) =$$
$$= F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i) + \delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_2 = -F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i).$$

Итак, биортогональный базис $\lambda_i(t)$, $i = \overline{-k^* + 1, k^* - 1}$, $i \neq \pm m$, построен

$$\lambda_i(t) = \mu_i(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_i)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i)\lambda_m(t).$$

Из (5.28), (5.29), (5.21), (5.22) вытекает, что для $\lambda_m(t)$ справедливы оценки

$$|\lambda_m(t)| \leqslant |\alpha_m| \cdot |\mu_m(t)| + |\alpha_{-m}| \cdot |\mu_{-m}(t)| \leqslant C_1|\mu_m(t)| + C_2|\mu_{-m}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} C_{11}|\mu^2_{-m}(t)|, & t \in [-1, t_{-m}], \\ C_{12}|\mu^1_m(t)| + C_{13}|\mu^1_{-m}(t)|, & t \in [t_{-m}, t_m], \\ C_{14}|\mu^2_m(t)|, & t \in [t_m, 1]. \end{cases} \tag{5.30}$$

Аналогично, для $\lambda_{-m}(t)$:

$$|\lambda_{-m}(t)| \leqslant \begin{cases} C_{21}|\mu^2_{-m}(t)|, & t \in [-1, t_{-m}], \\ C_{22}|\mu^1_m(t)| + C_{23}|\mu^1_{-m}(t)|, & t \in [t_{-m}, t_m], \\ C_{24}|\mu^2_m(t)|, & t \in [t_m, 1]. \end{cases}$$

6. Доказательства и вспомогательные результаты

6.1. Квазиоптимальность галеркинского проектора

Как было показано в [3], галеркинский проектор можно представить в виде (4.1). Имеет место теорема о квазиоптимальности галеркинского проектора.

Теорема 3. Найдется положительная константа C, не зависящая от ε, m, такая, что справедлива оценка

$$\| P \| \leqslant C. \tag{6.1}$$

Доказательство:

Имеет место оценка

$$\| Px \| = \left\| \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) N_{1,j-1}(t) \right\|_{C[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t_{-k^*} \leqslant t \leqslant t_{-k^*+1}} \left| F_\varepsilon(\lambda_{-k^*+1}(t), x(t)) \right| +$$
$$+ \max_{-k^*+1 \leqslant j \leqslant k^*-2} \ \max_{t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}} \left(\left| F_\varepsilon(\lambda_j(t), x(t)) \right| + \left| F_\varepsilon(\lambda_{j+1}(t), x(t)) \right| \right) +$$
$$+ \max_{t_{k^*-1} \leqslant t \leqslant t_{k^*}} \left| F_\varepsilon(\lambda_{k^*-1}(t), x(t)) \right|.$$

Если мы докажем, что

$$\max_{t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}}\left(\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x(t))\right|+\left|F(\lambda_{j+1}(t),x(t))\right|\right)\leqslant$$
$$\leqslant C\cdot\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\,x(t)\,|=C\parallel x\parallel,\qquad j=\overline{-k^*+1,k^*-2},$$

тогда будет справедлива оценка

$$\parallel Px(t)\parallel\leqslant C\parallel x(t)\parallel,$$

или

$$\parallel P\parallel\leqslant C. \tag{6.2}$$

Оценка (6.2) является обоснованием квазиоптимальности галеркинского проектора (4.1). Для доказательства (6.2) достаточно установить оценку

$$\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x(t))\right|\leqslant C\parallel x(t)\parallel. \tag{6.3}$$

Прибавим и отнимем в левой части (6.3) от функции $x(t)$ кусочно-линейный интерполянт

$$x_I(t)=\sum_{i=-k^*}^{k^*-2}\varphi_i N_{1,i}(t).$$

Получим

$$\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x(t))\right|=\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x-x_I)+F_\varepsilon(\lambda_j(t),x_I)\right|=$$
$$=\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x-x_I)+x(t_j)\right|\leqslant\left|F_\varepsilon(\lambda_j(t),x-x_I)\right|+C_1\parallel x\parallel_\alpha,$$

так как

$$F_\varepsilon(\lambda_j(t),x_I)=F_\varepsilon\left(\lambda_j(t),\sum_{i=-k^*}^{k^*-2}\varphi_i N_{1,i}(t)\right)=\sum_{i=-k^*}^{k^*-2}\varphi_i\overbrace{F_\varepsilon(\lambda_j,N_{1,i}(t))}^{\delta_{i,j-1}}=$$
$$=\varphi_{j-1}F_\varepsilon(\lambda_j,N_{1,j-1})=\varphi_{j-1}=x_I(t_j)=x(t_j).$$

Тогда вместо (6.3) достаточно доказать

$$\left|F_\varepsilon(\lambda_j,x-x_I)\right|\leqslant C\parallel x\parallel. \tag{6.4}$$

Имеем

$$\left|F_\varepsilon(\lambda_j,x-x_I)\right|\leqslant\left|\varepsilon^2(\lambda_j',(x-x_I)')+(\lambda_j,c(t)(x-x_I))\right|=\left|(\lambda_j,c(t)(x-x_I))\right|, \tag{6.5}$$

так как

$$(\lambda_j',x-x_I')=\int_{-1}^{1}\lambda_j'\cdot(x-x_I)'\,dt=\sum_{i=-k^*}^{k^*-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\lambda_j'\cdot(x-x_I)'\,dt \tag{$*$}$$

Заметим, что функционал $\lambda_j(t)$ представляет собой кусочно-линейную функцию, поэтому на каждом частичном отрезке (t_i,t_{i+1}) $\lambda_j(t)$ — линейная функция и, следовательно, ее производная $\lambda_j'(t)$ - некоторая константа C_i. Вместе с тем, x_I — интерполянт решения $x(t)$, а значит выполняются условия интерполирования $x_I(t_i)=$ $=x(t_i)$. Получаем, продолжая равенства (*)

$$(\lambda_j',x-x_I')=\sum_{i=-k^*}^{k^*-1}C_i\int_{t_i}^{t_{+1}}(x-x_I)'\,dt=\sum_{i=-k^*}^{k^*-1}C_i\,(x-x_I)\Big|_{t_i}^{t_{+1}}=0.$$

Продолжаем далее оценку для (6.5)

$$\left|(\lambda_j, c(t)(x-x_I))\right| = \left|\int_{-1}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt + \int_{-1}^{t_{-m}} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt + \int_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| \leqslant$$

разбиваем интеграл на сумму трех: интеграл по центральной зоне и интегралы по погранслоям. Каждое слагаемое будем оценивать поотдельности.

$$\leqslant \left|\int_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| + \left|\int_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| +$$

$$+\left|\int_{-1}^{t_{-m}} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| = I_1 + I_2 + I_3. \tag{6.6}$$

Необходимо рассмотреть случаи $t_j \in [t_{-m}, t_m]$ и $t_j \in [-1, t_{-m}] \cup [t_m, 1]$.

Пусть $t_j \in [t_{-m}, t_m]$.

Оценим последовательно все слагаемые из (6.6), начнем с интеграла I_1:

$$I_1 = \left|\int_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x-x_I)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{-m}}^{t_m} |c(t)|\cdot|\lambda_j(t)|\cdot|x-x_I|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt.$$

По построению функционалов $\lambda_j(t)$ с учетом (5.26), (5.30) и леммы 3 последний интеграл

$$\int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt = \int_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)| \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m+j}) \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m-j}) \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + C_2 \int_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_{-m}(t)|\,dt + C_3 \int_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_m(t)|\,dt \leqslant C_1 + \bar{C_2} + \bar{C_3} = C_4.$$

Получим неравенство

$$\int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt \leqslant C_4.$$

Тогда для интеграла I_1 имеем

$$I_1 \leqslant C \parallel x(t) \parallel \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt \leqslant CC_4 \parallel x(t) \parallel \leqslant C_5 \parallel x(t) \parallel .$$

Рассмотрим интеграл I_2

$$I_2 = \Bigl|\int_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\,dt\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_m}^{1} |c(t)|\cdot|\lambda_j(t)|\cdot|x - x_I|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt$$

Имеем оценки

$$\int_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt = \int_{t_m}^{1} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_m}^{1} |\mu_j(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \int_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)| \int_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \int_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m+j}) \int_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + O(\varepsilon m q^{m-j}) \int_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_7 + C_8 \int_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt + C_9 \int_{t_m}^{1} |\mu_m^2(t)|\,dt \leqslant C_7 + \bar{C}_{10} + \bar{C}_{11} = C_{12}.$$

Отсюда находим

$$I_2 \leqslant C \parallel x(t) \parallel \int_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt \ \leqslant\ CC_{12} \parallel x(t) \parallel \leqslant\ C_{13} \parallel x(t) \parallel\ .$$

Аналогично, доказывается, что $I_3 \leqslant C_{14} \parallel x(t) \parallel$.

Таким образом, показано, что в случае $t_j \in [t_{-m}, t_m]$ имеет место оценка (6.4).

Пусть теперь t_j принадлежит пограничному слою, для определенности пусть $t_j \in [t_m, 1]$. Справедливы оценки

$$I_1 = \Bigl|\int_{t_{-m}}^{t_m} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\,dt\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{-m}}^{t_m} |c(t)|\cdot|\lambda_j(t)|\cdot|x - x_I|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt.$$

Имеем также

$$
\begin{gathered}
|F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)| = |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j^2)| \leqslant \\
\sum_{k=m+1}^{k^*-1} |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\nu_k)| \leqslant C_1 \sum_{k=m+1}^{k^*-1} O\Big(\frac{1}{m^3}\Big) \leqslant \\
\leqslant \frac{C_2(k^*-m-2)}{m^3} \leqslant \frac{C_3 m\ln(m)}{m^3} = \frac{C_3\ln(m)}{m^2} \leqslant C_4, \\
|F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Тогда приходим к

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt = \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j)\lambda_m(t)|\,dt \leqslant \\
\leqslant |F_\varepsilon(N_{1,-m-1},\mu_j)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_{-m}(t)|\,dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1},\mu_j^2)| \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant \\
\leqslant C_4 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_m(t)|\,dt \leqslant C_5 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_{-m}(t)|\,dt + C_6 \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\mu^1_m(t)|\,dt \leqslant \bar{C}_5 + \bar{C}_6 = C_7.
\end{gathered}
$$

В итоге получим

$$
\int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt \leqslant C_7.
$$

Тогда для интеграла I_1 имеем

$$
I_1 \leqslant C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_{-m}}^{t_m} |\lambda_j(t)|\,dt \leqslant C \;\; C_7 \parallel x(t) \parallel \leqslant C_8 \parallel x(t) \parallel .
$$

Рассмотрим интеграл I_2

$$
\begin{gathered}
I_2 = \Big| \int\limits_{t_m}^{1} c(t)\lambda_j(t)(x - x_I)\,dt \Big| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{t_m}^{1} |c(t)| \cdot |\lambda_j(t)| \cdot |x - x_I|\,dt \leqslant \\
\leqslant C\cdot \parallel x(t) \parallel_{C[-1,1]} \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\,dt.
\end{gathered}
$$

Имеем оценки

$$\int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\, dt = \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t) - F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)\lambda_{-m}(t) - F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_i)\lambda_m(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_m}^{1} |\mu_j(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,-m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_{-m}(t)|\, dt + |F_\varepsilon(N_{1,m-1}, \mu_j)| \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_9 + C_4 \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_m^2(t)|\, dt \leqslant C_9 + C_4 C_{10} \leqslant C_{11}.$$

Откуда

$$I_2 \leqslant C \parallel x(t) \parallel \int\limits_{t_m}^{1} |\lambda_j(t)|\, dt \leqslant CC_{11} \parallel x(t) \parallel \leqslant C_{12} \parallel x(t) \parallel .$$

Для интеграла I_3 аналогичные рассуждения приводят к оценке $I_3 \leqslant C_{12} \parallel x(t) \parallel$.

Таким образом, показано, что и в случае $t_j \in [t_m, 1]$ имеет место оценка (6.4). В случае $t_j \in [-1, t_{-m}]$ рассуждения проводятся по той же схеме.

Таким образом, установлена оценка (6.4) и, тем самым, теорема доказана.

6.2. Вспомогательные результаты

Доказательство леммы 1. Поскольку система $\{N_{1,k}\}$ линейно независима, то матрица A есть симметричная положительно определенная матрица. Действительно, рассмотрим квадратичную форму этой матрицы

$$\begin{aligned}(A\gamma, \gamma) &= \sum_{s=-m-1}^{m-1} \left(\sum_{k=-m-1}^{m-1} a_{sk}\gamma_k \right) \gamma_s = \\ &= \sum_{s=-m-1}^{m-1} \sum_{k=-m-1}^{m-1} F_\varepsilon(N_{1,s}, N_{1,k})\gamma_k\gamma_s = \\ &= F_\varepsilon\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k N_{1,k} \right) = \\ &= F_\varepsilon\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{s=-m-1}^{m-1} \gamma_s N_{1,s} \right) = \left[\sum_{s=-m-1}^{m-1} \gamma_s N_{1,s} \right]^2,\end{aligned}$$

где $[u]^2 = F_\varepsilon(u, u)$.

Докажем, что

$$\left[\sum_{s=-m-1}^{m-1} \gamma_s N_{1,s} \right]^2 \geqslant \frac{C_1}{m} \sum_{s=-m-1}^{m-1} |\gamma_s|^2, \tag{6.7}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от i, m, γ.

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right]^2 = \varepsilon^2\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N'_{1,s},\ \sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N'_{1,s}\right)+\\
&\qquad+\left(c(t)\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\ \sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)\geqslant\\
&\qquad\qquad\left(c(t)\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s},\ \sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)=\\
&=\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} c(t)\left(\sum_{s=-m-1}^{m-1}\gamma_s N_{1,s}\right)^2 dt=\\
&\qquad=\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} c(t)(\gamma_{\nu-1}N_{1,\nu-1}+\gamma_\nu N_{1,\nu})^2 dt\geqslant\\
&\qquad\qquad\geqslant\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} c(t)(\gamma_{\nu-1}^2 N_{1,\nu-1}^2(t)+\gamma_\nu^2 N_{1,\nu}^2(t))dt\geqslant\\
&\geqslant\frac{h}{3}\sum_{\nu=i}^{m-1}\min_{t_\nu\leqslant t\leqslant t_{\nu+1}} c(t)(\gamma_{\nu-1}^2+\gamma_\nu^2)\geqslant\\
&\qquad\qquad\geqslant\frac{2h}{3}\min_{t_i\leqslant t\leqslant t_m} c(t)\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2=\frac{C_1}{m}\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2,
\end{aligned}
$$

где константа C_1 ни от чего не зависит. Оценка (6.7), следовательно, доказана.

Получили, что

$$
|(A\gamma,\gamma)|\geqslant\frac{C_1}{m}\sum_{\nu=-m-1}^{m-1}|\gamma_\nu|^2.
$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство

$$
\| A^{-1}\|_2\leqslant C_2 m.
$$

Полагая $C=C_2$, получаем утверждение леммы.

Доказательство леммы 2. Нормированные на единицу в $L_2[-1,1]$ базисные функции $N_{1,i}(t)$ имеют вид:

$$
N_{1,i}(t)=O^*\left(\sqrt{m}\right)\begin{cases}\dfrac{t-t_i}{h}, & t\in[t_i,t_{i+1}),\\[2mm] \dfrac{t_{i+2}-t}{h}, & t\in[t_{i+1},t_{i+2}),\\[2mm] 0, & t\notin[t_i,t_{i+2});\end{cases}
$$

$$
N'_{1,i}(t)=O^*\left(\sqrt{m}\right)\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & t\in[t_i,t_{i+1}),\\[2mm] -\dfrac{1}{h}, & t\in[t_{i+1},t_{i+2}),\\[2mm] 0, & t\notin[t_i,t_{i+2}).\end{cases}
$$

Тогда

$$|F_\varepsilon(N_{1,i},N_{1,j})| = |\varepsilon^2(N'_{1,i},N'_{1,j}) + (c(t)N_{1,i},N_{1,j})| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \parallel N'_{1,i} \|_2 \| N'_{1,j} \|_2 + \max_{t\in supp\, N_{1,i}\bigcap supp\, N_{1,j}} c(t) =$$
$$= \sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,i},N'_{1,i})}\sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,j},N'_{1,j})} + \max_{t\in supp\, N_{1,i}\bigcap supp\, N_{1,j}} c(t).$$

Поскольку

$$\varepsilon^2(N'_{1,i},N'_{1,i}) = \varepsilon^2 O^*(m)\int\limits_{t_i}^{t_{i+2}}\frac{dt}{h^2} = O^*\Big(\varepsilon^2 m^2\Big),$$
$$\max_{t\in supp\, N_{1,i}\bigcap supp\, N_{1,j}} c(t) = O(1),$$

то оценка (6.8) примет вид

$$|F_\varepsilon(N_{1,i},N_{1,j})| = O^*\Big(\varepsilon^2 m^2\Big) + O(1) = O(1)$$

в силу условия $\varepsilon m \leqslant 1$.

Доказательство Леммы 3.

При $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$ имеем:

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m}|\mu_i^1(t)|\,dt = C\sum_{k=-m}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\mu_i^1(t)|\,dt \leqslant C\sum_{k=-m}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} mq^{|k-i|}\,dt =$$
$$= C_1\sum_{k=-m}^{i-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} mq^{i-k} + C_2\sum_{k=i}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} mq^{k-i}\,dt \leqslant \Big[h = \frac{a}{m}\Big]$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=-m}^{i-1} q^{i-k} + C_2\sum_{k=i}^{m-1} q^{k-i} \leqslant \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = C_3.$$

При $i = m$ имеем:

$$\int\limits_{t_{-m}}^{t_m}|\mu_m^1(t)|\,dt \leqslant= C\sum_{k=-m}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\mu_m^1(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{k=-m}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} mq^{m-k}\,dt = C_1\sum_{k=-m}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} mq^{m-k} \leqslant \Big[h = \frac{a}{m}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \bar{C}_1\sum_{k=-m}^{m-1} q^{m-k} \leqslant C_2.$$

Для $i = -m$ оценки проводятся аналогично. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.

При $m \leqslant i \leqslant k^*-1$ (5.17) имеем:

$$\mu_i^2(t) = \sum_{k=m+1}^{k^*-1}\alpha_k\nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)\nu_i(t) + \sum_{k=m,\,k\neq i}^{k^*-1}\alpha_{k,i}\nu_k(t), \quad t\in[a,1],$$

где

$$\sum_{k=m+1\,k\neq i}^{k^*-1}|\alpha_k| = \sum_{k=m+1,\,k\neq i}^{k^*-1}\frac{C}{m^3} = \frac{C(k^*-m-3)}{m^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C(k^*-m)}{m^3} \leqslant \frac{Cm\ln m}{m^3} \leqslant \frac{C_1\ln m}{m^2}.$$

Тогда

$$|\mu_i^2(t)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{k^*-1} \alpha_k |\nu_k(t)| \leqslant \alpha_i |\nu_i(t)| + \sum_{k=m+1,\, k\neq i}^{k^*-1} \alpha_k |\nu_k(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{C_2}{m^3}\right)|\nu_i(t)| + \sum_{k=m+1,\, k\neq i}^{k^*-1} |\alpha_k| \max_{t\in[a,1]} |\nu_k(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \frac{C_4}{\varepsilon} \sum_{k=m+1,\, k\neq i}^{k^*-1} |\alpha_k| \leqslant \frac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \frac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2}.$$

Имеем оценки

$$\int_a^1 |\mu_i^2(t)|\, dt \leqslant \int_a^1 \Big(\frac{C_3}{\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_i|}{\varepsilon}} + \frac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2}\Big) dt =$$

$$= \frac{C_3}{\varepsilon} \int_a^{t_i} e^{\dfrac{t-t_i}{\varepsilon}}\, dt + \frac{C_3}{\varepsilon} \int_{t_i}^1 e^{-\dfrac{t-t_i}{\varepsilon}}\, dt + \frac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2} \int_a^1 dt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \left[e^{\dfrac{t-t_i}{\varepsilon}} \Big|_a^{t_i} - e^{-\dfrac{t-t_i}{\varepsilon}} \Big|_{t_i}^1 \right] + \frac{C_4 \ln m}{\varepsilon m^2}(1-a) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \left[1 - e^{\dfrac{a-t_i}{\varepsilon}} - e^{-\dfrac{1-t_i}{\varepsilon}} + 1 \right] + \frac{C_5 \ln m}{\varepsilon m^2}\, \varepsilon \ln m \leqslant$$

$$\leqslant C_3\, C_6 + C_5 \left(\frac{\ln m}{m}\right)^2 \leqslant C_7.$$

Лемма, таким образом, доказана.

7. Численный эксперимент

Метод Галеркина был реализован на модельной сингулярно возмущенной задаче (2.1)–(2.2) при $c(t) \equiv 1$, $f(t) \equiv 1$ и дал следующие результаты.

	ε=0.001	ε=0.0001	ε=0.00001	ε=0.000001
m=4	$sh = 2.0400584$	$sh = 2.0039873$	$sh = 2.0003990$	$sh = 2.0000404$
m=8	$sh = 2.0804690$	$sh = 2.0080045$	$sh = 2.0008004$	$sh = 2.0000805$
m=16	$sh = 2.1607201$	$sh = 2.0160095$	$sh = 2.0016003$	$sh = 2.0001605$
m=32	$sh = 2.3184185$	$sh = 2.0320148$	$sh = 2.0031996$	$sh = 2.0003204$
m=64	$sh = 2.6124593$	$sh = 2.0640065$	$sh = 2.0063984$	$sh = 2.0006402$
m=128	$sh = 2.8893273$	$sh = 2.1278079$	$sh = 2.0127959$	$sh = 2.0012799$
m=256	$sh = 2.8118161$	$sh = 2.2539155$	$sh = 2.0255897$	$sh = 2.0025594$

Здесь контроль сходимости проводится по величине $sh = \log_2\left(\dfrac{\|x_m(t) - x(t)\|}{\|x_{2m}(t) - x(t)\|}\right)$.

Литература

[1] Бахвалов, Н.С. К оптимизации методов решения задач при наличии пограничного слоя / Н.С. Бахвалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9. – №4. – С. 841–859.

[2] Шишкин, Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений / Г.И. Шишкин. – Екатеринбург: УрОРАН, 1992.

[3] Блатов, И.А. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем / И.А. Блатов, В.В. Стрыгин. – Воронеж: ВГУ, 1997.

[4] Блатов, И.А. О методе конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных параболических начально-краевых задач. I / И.А. Блатов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32. – №5. – С. 661–669.

[5] Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973.

[6] Demko, S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projection / S. Demko // SIAM J. Numer. Anal. – 1977. – 14. – No. 4. – P. 616–619.

[7] Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В.И. Лебедев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

Поступила в редакцию 11/*VII*/2007;
в окончательном варианте — 11/*VII*/2007.

ON QUASIOPTIMALITY OF THE FINITE ELEMENT GALERKIN METHOD FOR SINGULAR PERTURBATION BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON THE SHISHKIN MESH

© 2007 I.A. Blatov,[3] N.V. Dobrobog[4]

The finite element Galerkin method for singular perturbation boundary value problems is considered. The accuracy estimates of the second order in the C-norm are given.

Paper received 11/*VII*/2007.
Paper accepted 11/*VII*/2007.

[3]Blatov Igor Anatolievich (`blatow@mail.ru`), Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

[4]Dobrobog Nadezhda Vicktorovna (`larisaisaeva@yandex.ru`), Dept. of Higher Mathematics, Povolzhskaja State Akademy of Informatics and Telecommunications, Samara, 443011, Russia.