

ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СЖАТИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2007 С.А. Пантелеев¹

В статье рассматривается задача об устойчивости при одноосном сжатии нелинейно-упругого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда (блока). В качестве критерия устойчивости/неустойчивости использован энергетический критерий. Целью работы являлось определение достаточных условий неустойчивости равновесного состояния блока при сжатии. Метод исследования основан на использовании кинематических гипотез, то есть на сужении класса кинематически допустимых полей смещений. В результате использования этого метода получаются оценки сверху для критического значения параметра нагружения, в качестве которого в рассматриваемой задаче выступает коэффициент осевого сжатия блока. Используются следующие два суженных класса полей: 1) класс, соответствующий гипотезе ортогональных плоских сечений; 2) класс, образованный экстремальными соответствующей модифицированной задачи Корна. Оценки критических значений коэффициента сжатия для двух рассмотренных классов получены в аналитической форме и зависят от соотношения между геометрическими размерами блока. Проведен сравнительный анализ оценок, соответствующих двум упомянутым классам. Выяснено, что оценка, соответствующая второму классу, при любой рассматриваемой геометрии оказывается ниже (то есть лучше), однако для тонкого блока разница между оценками мала, а чем толще блок, тем эта разница больше. Для каждого из классов существует свой диапазон толщин, за пределами которого неустойчивость не обнаруживается, но для второго класса он существенно шире и включает в себя блоки большей толщины.

Введение

Изучение устойчивости и неустойчивости упругих тел при сжатии является одним из традиционных направлений в механике деформируемого твердого тела (в силу очевидного прикладного значения таких исследований). Что касается методических основ упомянутых исследований, то они в большинстве случаев также являются традиционными: это методы сопротивления материалов в их изначальном или почти изначальном виде. Как правило, они опираются на очень существенные и ограничительные предположения о геометрии тел и об их упругих свойствах: тела считаются тонкими, а упругое определяющее соотношение задается законом Гука. Тонкость тел считается очевидным основанием для применения так называемого "балочного приближения" (гипотезы ортогональных плоских

¹Пантелеев Сергей Александрович (panteleyev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

сечений), и, как это ни парадоксально, соответствующие решения задач об устойчивости/неустойчивости (скажем, энергетическим методом) зачастую называются точными. При выводе соотношений энергетического (или какого-либо другого) метода допускаются совершенно некорректные действия (например, смешиваются свойства материала в деформированном и недеформированном состояниях). Заметим, что такие действия могут повлечь за собой более чем существенные ошибки анализа (вплоть до полной утраты смысла). Многие интересные для приложений случаи совершенно не вписываются в рамки предположений, оправдывающих использование традиционных методов анализа устойчивости: тела могут быть не тонкими, а деформации и напряжения до возникновения неустойчивости могут быть большими, и, следовательно, материал может проявлять упругие свойства, имеющие очень мало общего с традиционной линейной упругостью. Таким образом во многих практически интересных и важных случаях возможность непосредственного использования традиционных методов анализа устойчивости по меньшей мере сомнительна, и возникает потребность их переосмысления и существенной модификации (с сохранением всего того содержательного, что в них, безусловно, имеется).

В современной нелинейной теории упругости (см. например [1, 2]) разработаны соответствующие модификации энергетического метода исследования устойчивости. Они опираются на корректно линеаризованные корректные соотношения нелинейной упругости с использованием отсчетного описания; заметим, что упомянутые модификации остаются достоянием теории, мало известны широкому кругу механиков и совершенно не используются при решении задач прикладного характера. В данной работе рассмотрение вопросов устойчивости основывается именно на такой корректной трактовке энергетического метода в равной мере применимой к любым нелинейно-упругим телам при любых начальных деформациях.

Заметим, что практически всегда постановка задачи об устойчивости деформируемых тел подразумевает рассмотрение однопараметрического семейства состояний равновесия с монотонно возрастающим параметром, называемым "параметром нагружения" (последний может быть и деформационной величиной). При меньших значениях параметра нагружения состояния тела являются устойчивыми, затем, начиная с некоторого "критического" значения — неустойчивыми. Определение области устойчивости и неустойчивости сводится к нахождению критического значения параметра нагружения, однако точных решений такой задачи, как правило, нет. При отсутствии точного решения возможна постановка и решение других задач следующих двух типов: 1) определение области заведомой устойчивости; 2) определение области заведомой неустойчивости. Задачи первого типа сводятся к нахождению оценки снизу для вышеупомянутого критического значения параметра нагружения, а задачи второго типа — к нахождению оценки сверху. В данной работе будут рассматриваться только задачи второго типа, хотя большее прикладное значение имеют задачи первого типа (задачи о "безопасных" нагрузках); в идеале желательно иметь решения обеих задач, что позволило бы судить о точности соответствующих оценок. Заметим, что так называемые "точные" решения, полученные с помощью балочного приближения, все без исключения относятся ко второму типу. Что касается задач первого типа, то их до самого недавнего времени решить было просто невозможно, так как хотя принципиальных методов их решения (метод Холдена, см. например [2]) был предложен в 1964 г., но для его реализации не хватало конкретных значений константы Корна — некоторой ин-

тегрально-геометрической характеристики области, занимаемой телом (точнее из пространственных областей она была известна только для шара).

Метод решения задач второго типа основан на принятии "кинематических гипотез", т.е. на искусственном сужении класса допустимых полей смещений с целью упрощения задачи вплоть до возможности ее аналитического решения на суженном классе полей смещений. Использование традиционной кинематической гипотезы ортогональных плоских сечений в сочетании с энергетическим методом на основе корректной линеаризации нелинейно-упругих определяющих соотношений представлено в литературе (см. например [2]), однако, интуитивно ясно, что эта гипотеза "работает" только для тонких тел, и весьма интересен (однако ранее не затронутый) вопрос о пределах ее применимости. В данной работе этот вопрос изучается наряду с некоторыми другими.

Рассматриваемые в данной работе задачи второго типа относятся к одноосно сжатым блокообразным нелинейно-упругим телам произвольной толщины. Рассмотрение основано на двух различных кинематических гипотезах: гипотезы ортогональных плоских сечений и другой, ранее никогда не применявшейся, гипотезе, базирующейся на классе экстремалей модифицированной вариационной задачи Корна [3] (необходимые разъяснения даны ниже, в п. 4.2). Оказалось, что оценки, полученные с помощью второй гипотезы, всегда лучше таковых, полученных с помощью первой. Причем разница тем больше, чем больше толщина блока, и даже доходит до бесконечности (!) при некоторой толщине, за пределами которой традиционная (первая) гипотеза просто перестает давать результат. Для второй гипотезы также имеется некоторая предельная толщина (в том же смысле), но она существенно больше. Кроме того, из сравнения оценок по обеим гипотезам ясно, что первая гипотеза по сути перестает быть адекватной еще при тех толщинах, где формально результат есть, но он непомерно завышен. Использование же второй кинематической гипотезы оказалось эффективным и очень простым (с минимальными вычислениями) средством получения оценок области заведомой неустойчивости для толстых блоков. Причины такой эффективности обсуждаются в заключительной части статьи.

Полученные оценки и оценки аналогичного типа могут быть чрезвычайно полезны во многих прикладных задачах.

1. Конечные и инкрементальные соотношения нелинейной упругости. Конкретизация нелинейно-упругого материала

В работе используется отсчетное описание и соответствующий ему тензор напряжений Пиолы.

Пусть имеется некоторая отсчетная конфигурация κ . Радиус-вектор \mathbf{x} этой конфигурации идентифицирует материальную точку тела. В каждой из так называемых актуальных конфигураций $\kappa(t)$ положение точки \mathbf{x} определяется взаимнооднозначным отображением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$. В получившей определенное распространение терминологии книги [1] это отображение называется "деформацией". Вектор-функция $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ считается непрерывной и дифференцируемой. Градиент этой функции ("градиент деформации")

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{r}$$

является тензором второго ранга и задает линейное отображение малой окрестности точки \mathbf{x} в отсчетной конфигурации в окрестность точки $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ в актуальной конфигурации:

$$d\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t).$$

Будем считать материал "гиперупругим" [1], но в дальнейшем (для простоты) будем называть его просто "упругим". Пусть $\sigma(\mathbf{F})$ — объемная плотность упругой энергии по отношению к отсчетной конфигурации ("упругий потенциал"). Как известно, упругий потенциал задает определяющее соотношение упругого материала посредством равенства

$$\mathbf{T}_\kappa(\mathbf{F}) = \frac{d\sigma(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{T}_κ — тензор напряжения Пиолы.

Необходимое для исследования устойчивости инкрементальное соотношение для тензора напряжений Пиолы в случае упругого материала имеет вид

$$\delta\mathbf{T}_\kappa = \mathbf{C} : \delta\mathbf{F}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{C} — один из тензоров упругих модулей. Тензор \mathbf{C} выражается через упругий потенциал $\sigma(\mathbf{F})$ следующим образом:

$$\mathbf{C} = \frac{d^2\sigma(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}d\mathbf{F}}. \quad (1.3)$$

В силу симметрии второй производной скалярной функции тензорного аргумента $\sigma(\mathbf{F})$ для \mathbf{C} выполняется равенство

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(3412)},$$

где $\mathbf{C}^{(ijkl)}$ обозначает изомер $(ijkl)$ тензора четвертого ранга \mathbf{C}^2 .

Помимо исходной отсчетной конфигурации κ введем еще однопараметрическое семейство конфигураций $\tilde{\kappa}(\beta)$, где β — параметр, причем пусть $\tilde{\kappa}(1) = \kappa$. Обозначим через $\mathbf{F}_0(\beta)$ — тензор второго ранга, связывающий элементарный вектор $d\mathbf{x}$ в конфигурации κ с элементарным вектором $d\tilde{\mathbf{x}}$ в конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$

$$d\mathbf{x} = d\tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_0(\beta).$$

Найдем связь между градиентом деформации \mathbf{F} , вычисленным относительно конфигурации κ , и градиентом деформации $\tilde{\mathbf{F}}$, вычисленным относительно новой отсчетной конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = d\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}_0(\beta) \cdot \tilde{\mathbf{F}}, \quad \forall d\mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Из равенства (1.4) получаем связь между тензорами \mathbf{F} и $\tilde{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0(\beta) \cdot \tilde{\mathbf{F}}. \quad (1.5)$$

Найдем теперь соответствующие соотношение между упругим потенциалом $\sigma_\kappa(\mathbf{F})$ (относительно отсчетной конфигурации κ) и упругим потенциалом того же

²Если \mathbf{C} представлен в виде суммы тетрад

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}_4 + \dots,$$

то его изомером $(ijkl)$ (где $(ijkl)$ — перестановка чисел (1234)) называют тензор, задаваемый следующим равенством

$$\mathbf{C}^{(ijkl)} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_l + \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k \otimes \mathbf{b}_l + \dots$$

материала $\sigma_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}})$ (относительно отсчетной конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$). Для этого необходимо учесть, что с помощью упругого потенциала $\sigma_{\kappa}(\mathbf{F})$ определяется энергия деформации для элементарного объема в конфигурации κ , а с помощью $\sigma_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}})$ определяется энергия деформации для элементарного объема в конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$. Эти объемы связывает следующее соотношение:

$$dV_{\kappa} = \det \mathbf{F}_0 dV_{\tilde{\kappa}}. \quad (1.6)$$

Учитывая (1.5) и (1.6), получаем соотношение между упругими потенциалами:

$$\sigma_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \sigma_{\kappa}(\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}). \quad (1.7)$$

Пусть задан упругий потенциал $\sigma_{\kappa}(\mathbf{F})$. Для того, чтобы получить тензор упругих модулей $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}$ относительно конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$, которая является равновесной и будет исследоваться на предмет устойчивости, можно воспользоваться выражением (1.3), взяв в качестве упругого потенциала $\sigma_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}})$ потенциал, определяемый соотношением (1.7):

$$\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}} = \frac{d^2}{d\tilde{\mathbf{F}}d\tilde{\mathbf{F}}} \left(\frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \sigma_{\kappa}(\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}) \right). \quad (1.8)$$

Тензор $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{I}}$ будет определять инкрементальное соотношение для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{T}_{\tilde{\kappa}}$ при малых отклонениях от конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$:

$$\delta \mathbf{T}_{\tilde{\kappa}} = \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{I}} : \delta \tilde{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{I}} \equiv \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{\mathbf{I}}.$$

Найдем тензор $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}$, для конкретного принимаемого в данной работе упругого потенциала, который в отсчетной конфигурации κ имеет следующий вид

$$\sigma_{\kappa}(\mathbf{F}) = \frac{\mu}{4} (\mathbf{F} : \mathbf{F} + \mathbf{F}^{-1} : \mathbf{F}^{-1}). \quad (1.9)$$

Заметим, что такой потенциал удовлетворяет принципу материальной объективности ($\sigma_{\kappa}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}) = \sigma_{\kappa}(\mathbf{F})$, где \mathbf{Q} — произвольный ортогональный тензор), а соответствующий материал изотропен ($\sigma_{\kappa}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \sigma_{\kappa}(\mathbf{F})$). Кроме того, он обладает тем свойством, что упругая энергия не меняется при замене \mathbf{F} на \mathbf{F}^{-1} ($\sigma_{\kappa}(\mathbf{F}^{-1}) = \sigma_{\kappa}(\mathbf{F})$); в частности, это означает, что одинаковой является энергия в состояниях, соответствующих сжатию и растяжению в одинаковое число раз, причем это число может быть сколь угодно большим. Конфигурация κ является естественной для данного материала, т.е.

$$\mathbf{T}_{\kappa} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = \frac{d\sigma_{\kappa}(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = \mathbf{0}.$$

Заметим еще, что инкрементальное соотношение данного материала при $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ (вблизи естественной конфигурации) является законом Гука с нулевым коэффициентом Пуассона.

Используя соотношение (1.7), найдем конкретный вид упругого потенциала рассматриваемого материала относительно конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$:

$$\sigma_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \frac{\mu}{4} \left((\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}) : (\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_0^{-1}) : (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_0^{-1}) \right). \quad (1.10)$$

Дважды продифференцировав по $\tilde{\mathbf{F}}$ выражение (1.10), согласно (1.8), получим тензор упругих модулей для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}$ относительно конфи-

гурации $\tilde{\kappa}(\beta)$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{\mu}{2 \det \tilde{\mathbf{F}}} & \left[(\mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{I})^{(2314)} + \right. \\ & + (\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \otimes \tilde{\mathbf{F}}^{-1})^{(1342)} + \\ & + (\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T})^{(1324)} + \\ & \left. + (\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \otimes \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1})^{(1342)} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Приняв в выражении (1.11) $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$, получим тензор $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{\mathbf{I}}$, который будет определять инкрементальное соотношение для тензора напряжения Пиолы $\mathbf{T}_{\tilde{\kappa}}$ относительно конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$:

$$\delta \mathbf{T}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{I}} = \frac{\mu}{2 \det \mathbf{F}_0} \left((\mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{I})^{(2314)} + (\mathbf{B}_0^{-1} \otimes \mathbf{I})^{(1342)} + \right. \\ \left. + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_0^{-1})^{(1324)} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_0^{-1})^{(1342)} \right) : \delta \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{\mathbf{I}} : \delta \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{B} \equiv \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ — правый тензор Коши–Грина.

2. Энергетическое определение устойчивости/неустойчивости. Математический критерий устойчивости/неустойчивости в малом

Для определения устойчивости воспользуемся энергетическим определением устойчивости/неустойчивости в *малом*, которое состоит в следующем [2]: пусть упругое тело B с заданными на его поверхности (или ее части) граничными усилиями (которые зависят от положения границы), находится в равновесном состоянии (конфигурации) $\tilde{\kappa}(B)$, задаваемом следующим соотношением $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$. Если при переходе в любое близкое (в некотором смысле) равновесное состояние полная потенциальная энергия возрастает, то будем называть исходное равновесное состояние *устойчивым в малом*. Если существует хотя бы одно близкое состояние, при переходе в которое полная потенциальная энергия уменьшается, то исходное состояние называется неустойчивым.

Из сформулированного энергетического определения устойчивости/неустойчивости для малых возмущающих полей смещений вытекает следующий математический критерий устойчивости/неустойчивости в малом: наличие устойчивости или неустойчивости состояния равновесия равносильно наличию или отсутствию положительной определенности функционала второй вариации полной потенциальной энергии, который определяется соотношением

$$R\{\delta \mathbf{r}\} = \int_{\tilde{\kappa}(B)} \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{r} : \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{\mathbf{I}} : \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{r} \, dV - \int_{\partial \tilde{\kappa}(B)} \delta \mathbf{t}_{\tilde{\kappa}} \cdot \delta \mathbf{r} \, d\Sigma, \quad (2.1)$$

где $\delta \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}})$ — поле малых смещений относительно конфигурации $\tilde{\kappa}(B)$, $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{\mathbf{I}}$ — тензор упругих модулей, задающий инкрементальное соотношение для тензора напряжений Пиолы относительно исследуемой на устойчивость конфигурации, $\delta \mathbf{t}_{\tilde{\kappa}}$ — изменение поверхностных сил, соответствующее полю смещений $\delta \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}})$.

Таким образом, дальнейшее исследование устойчивости/неустойчивости в работе сводится к исследованию свойств функционала $R\{\delta \mathbf{r}\}$ (2.1).

3. Метод получения достаточных условий неустойчивости

Получение условий, являющихся необходимыми и достаточными условиями устойчивости равновесного состояния тела, связано с решением пространственной вариационной задачи в классе всех кинематически допустимых возмущений. Метода решения такой задачи пока не существует. При этом существуют методы получения как достаточных условий устойчивости (вопрос, который в данной работе не затрагивается), так и достаточных условий неустойчивости, что и составляет предмет данной работы.

Достаточным условием неустойчивости, т.е. достаточным условием наличия отрицательных значений функционала $R\{\delta\mathbf{r}\}$, является наличие отрицательных значений этого функционала на некотором подмножестве всех кинематически допустимых полей возмущающих смещений. На этом очевидном факте и основан стандартный энергетический метод нахождения достаточных условий неустойчивости, а именно: исследование функционала $R\{\delta\mathbf{r}\}$ на наличие отрицательных значений проводится на некотором специально выбранном более узком классе полей возмущений. Выбор суженного класса полей возмущений традиционно называется "принятием кинематической гипотезы" [2]. Существенное сужение класса полей возмущений зачастую настолько упрощает задачу, что делает возможным ее аналитическое решение (которое все равно является приближенным решением исходной задачи). Для разных суженных классов полей возмущений решения будут разными и в различной степени будут приближать точное решение. В случае когда исследуемое на устойчивость семейство конфигураций характеризуется монотонно возрастающим параметром нагружения, и неустойчивость возникает, когда этот параметр достигает некоторого критического значения и переходит через него, вышеописанный метод приводит к получению оценок сверху для критического значения параметра нагружения; очевидно, что наилучшей из оценок сверху является наименьшая, что и дает принцип отбора решений в рамках каждой из кинематических гипотез. На основе этого же принципа минимальности оценок сверху возможно выяснение вопроса о том, какая из кинематических гипотез дает лучшее приближенное решение.

4. Достаточные условия неустойчивости, соответствующие двум используемым кинематическим гипотезам

В качестве примера применения изложенного выше способа получения достаточных условий неустойчивости, рассмотрим задачу о неустойчивости равновесного состояния одноосного сжатия для нелинейно-упругого тела, имеющего форму блока.

Будем считать, что боковые грани свободны, а торцы скользят по твердым и гладким плоским плитам, расстояние между которыми медленно меняется предписанным образом.

Так же как и в первом параграфе, введем конфигурацию \mathbf{k} , относительно которой задается упругий потенциал и семейство конфигураций $\tilde{\mathbf{k}}(\beta)$, каждая из которых соответствует растяжению блока вдоль направления \mathbf{e}_2 в β раз (будем

называть β коэффициентом растяжения). Градиент деформации, переводящей конфигурацию κ в конфигурацию $\tilde{\kappa}(\beta)$, дается равенством

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (4.1)$$

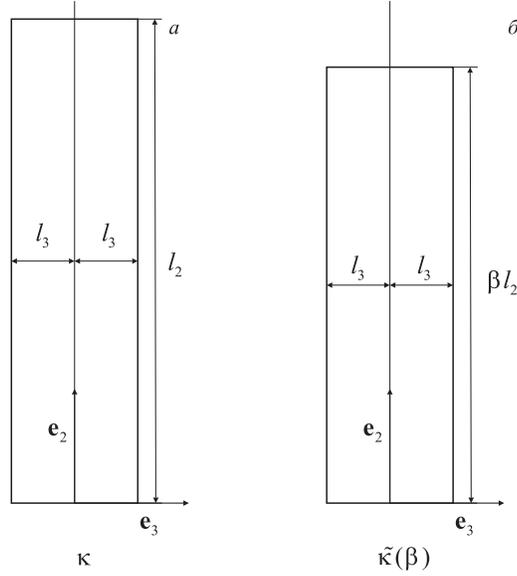


Рис. 1. Сечение блока в плоскости Ox_2x_3 ; a — конфигурация κ ; b — конфигурация $\tilde{\kappa}(\beta)$

Нелинейно-упругие свойства материала задаются упругим потенциалом (1.9). Пусть B — блок, занимаемый телом в конфигурации κ

$$B = \{\mathbf{x} | 0 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 < l_1, 0 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 < l_2, -l_3 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 < l_3\}.$$

В сжатом состоянии тело будет занимать блок $\tilde{B}(\beta)$:

$$\tilde{B}(\beta) = \{\tilde{\mathbf{x}} | 0 < \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_1 < l_1, 0 < \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_2 < \beta l_2, -l_3 < \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 < l_3\}.$$

Будем исследовать на неустойчивость конфигурации семейства $\tilde{\kappa}(\beta)$, и, принимая за параметр нагружения коэффициент сжатия β^{-1} , найдем оценку сверху для его критического значения.

Для определения условий неустойчивости воспользуемся сформулированным выше математическим критерием устойчивости/неустойчивости. Краевые условия рассматриваемой задачи таковы, что поверхностный интеграл в функционале (2.1) равен нулю; тогда функционал принимает вид

$$R\{\delta \mathbf{u}\} = \int_{\tilde{B}(\beta)} \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{u} : \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^I : \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{u} dV. \quad (4.2)$$

В качестве суженных классов полей возмущающих сечений рассмотрим следующие два: 1) класс, соответствующий гипотезе ортогональных плоских сечений; 2) класс, образованный экстремалами соответствующей модифицированной задачи Корна (соответствующие понятия подробно обсуждаются ниже, а именно, в п. 4.2).

4.1. Достаточные условия неустойчивости, полученные на основе применения гипотезы ортогональных плоских сечений

Рассмотрим применение гипотезы ортогональных плоских сечений для получения достаточных условий неустойчивости. Будем рассматривать плоский изгиб в плоскости $O\tilde{x}_2\tilde{x}_3$.

С учетом краевых условий задачи эта кинематическая гипотеза реализуется следующим образом:

поле инкрементальных смещений задается соотношением [2]:

$$\delta \mathbf{u} = \delta u(\tilde{x}_2)\mathbf{e}_3 - \tilde{x}_3 \delta u'(\tilde{x}_2)\mathbf{e}_2;$$

его градиент имеет вид:

$$\nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{u} = \delta u'(\tilde{x}_2)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) - \tilde{x}_3 \delta u''(\tilde{x}_2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (4.3)$$

где $\delta u(\tilde{x}_2) = A \cos \frac{\pi \tilde{x}_2}{\beta l_2}$ ($A \ll 1$ — амплитуда возмущений).

На рис. 2, а показаны возмущенные конфигурации, соответствующие гипотезе ортогональных плоских сечений для изгиба в плоскости Ox_2x_3 .

Получим подынтегральное выражение в функционале (4.2), подставив в качестве градиента полей смещений тензор (4.3)

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{u} : \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}^{-1} : \nabla_{\tilde{\kappa}} \otimes \delta \mathbf{u} &= \\ &= \frac{1}{2} \mu \left((\beta^2 + 3\beta^{-2}) \tilde{x}_3^2 (\delta u''(\tilde{x}_2))^2 + (\beta^2 - \beta^{-2}) (\delta u'(\tilde{x}_2))^2 \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выполним интегрирование сначала по сечению $\tilde{x}_2 = \text{const}$, затем по длине, а потом, деля результат на квадрат амплитуды, получаем

$$\frac{1}{A^2} R_1(\beta) = \frac{\mu \pi^2 l_1 l_3}{9\beta^6 l_2} \left((\beta^4 + 3) \frac{\pi}{3} \left(\frac{l_3}{l_2} \right)^2 + \beta^6 - \beta^2 \right). \quad (4.5)$$

Выполнение условия $R_1(\beta) < 0$ являются достаточным условием неустойчивости конфигурации $\tilde{\kappa}(\beta)$. Максимальное значение β_1^* , для которого выполняется $R_1(\beta) = 0$, будет наилучшей оценкой снизу для критического значения коэффициента растяжения в рамках первой кинематической гипотезы.

Так как рассматривается сжатие блока, то $\beta \in (0, 1]$. Естественное равновесное состояние блока устойчиво, то есть $R_1(1) > 0$. Для определения β_1^* требуется найти наибольший корень уравнения

$$\left(\beta^4 + 3 \right) \frac{\pi}{3} \left(\frac{l_3}{l_2} \right)^2 + \beta^6 - \beta^2 = 0 \quad (4.6)$$

из промежутка $(0, 1]$. Очевидно, что полученная оценка зависит от отношения исходных линейных размеров блока l_3/l_2 .

На рис. 3 приведен график зависимости оценки снизу критического значения коэффициента сжатия $\gamma_1^* = 1/\beta_1^*$ от отношения линейных размеров блока (для удобства будем рассматривать отношение $l_2/(2l_3)$). При $l_2/(2l_3) < 2,66$ на отрезке $(0, 1)$ не будет корней, а следовательно, $R_1(\beta) > 0$ на рассматриваемом отрезке. Это означает, что применение гипотезы ортогональных плоских сечений не позволяет обнаружить неустойчивость. Отсюда вовсе не следует действительное отсутствие неустойчивости, так как могут существовать другие поля смещения на которых функционал (4.2) будет принимать отрицательные значения.

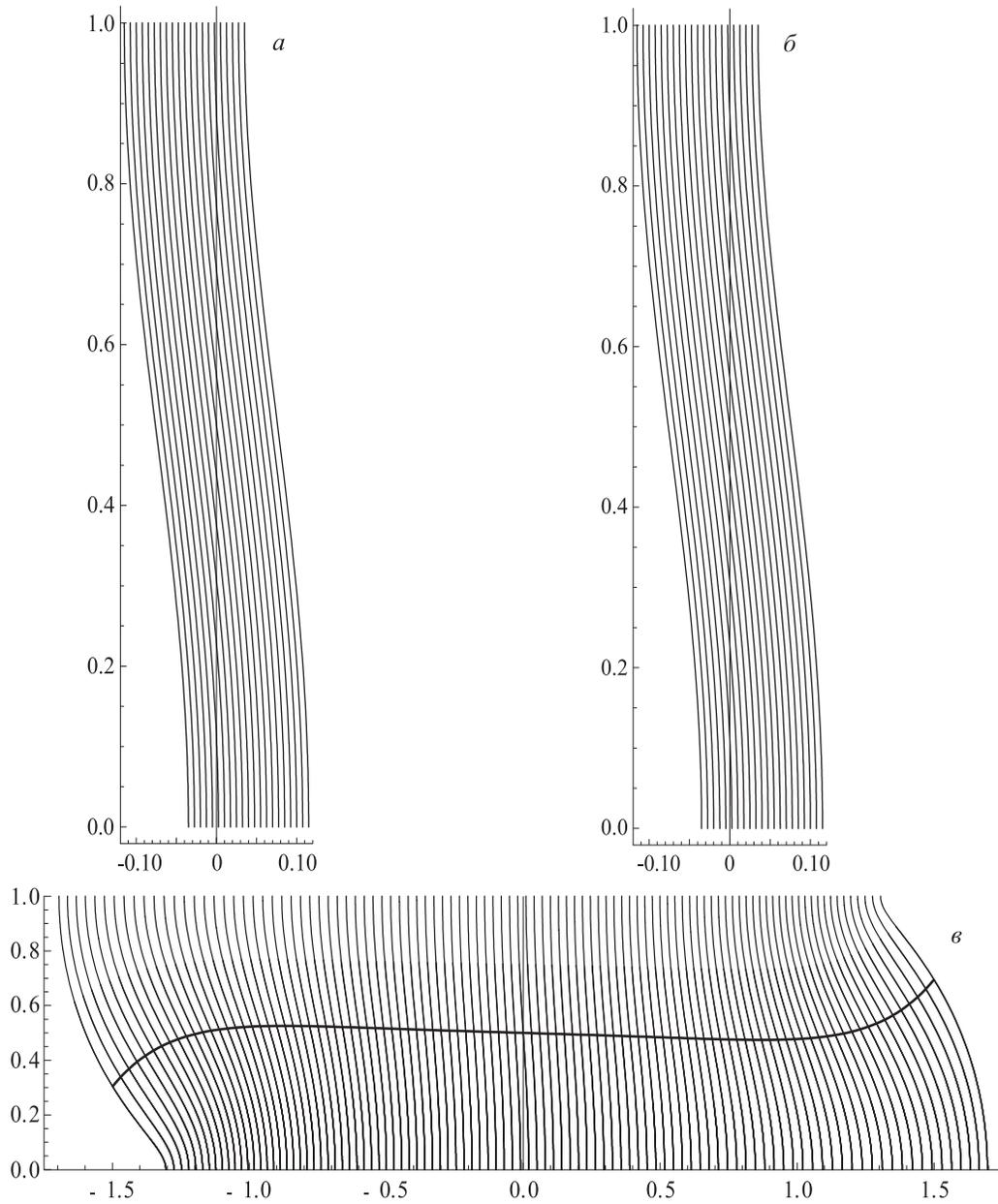


Рис. 2. Пробные возмущенные конфигурации при поиске неустойчивости: *a* — соответствующие гипотезе ортогональных плоских сечений; *б* — соответствующие экстремалам модифицированной задачи Корна (тонкий блок) *в* — соответствующие экстремалам модифицированной задачи Корна (очень толстый блок)

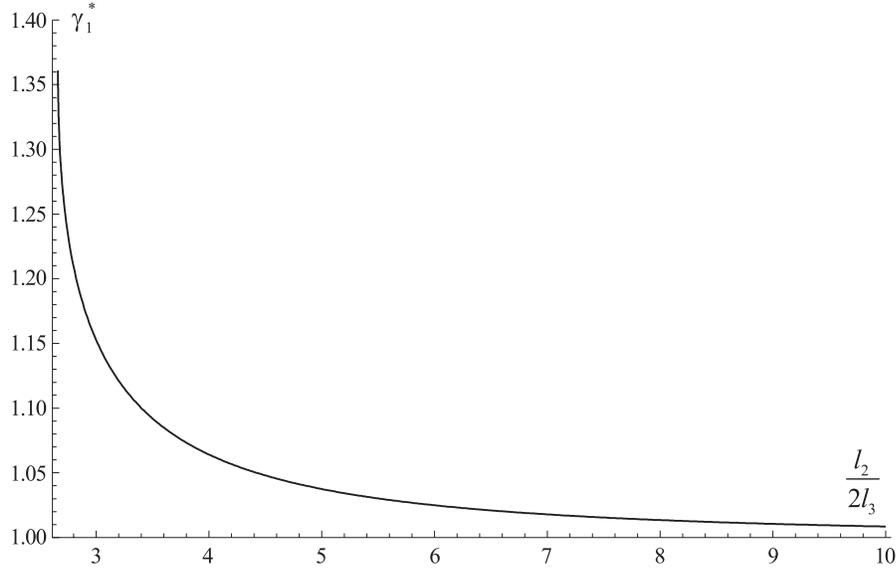


Рис. 3. Оценка снизу для критического значения коэффициента растяжения, полученная на основе гипотезы ортогональных плоских сечений

4.2. Достаточные условия неустойчивости на основе кинематической гипотезы связанной, с экстремалиями модифицированной задачи Корна

Вначале поясним, что понимается под модифицированной задачей Корна. Пусть имеется некоторая область Ω и пусть на ее границе $\partial\Omega$ заданы некоторые граничные условия, исключающие поворот как жесткого целого. Тогда константой Корна k для этой области называется максимум следующего отношения:

$$k = \sup_{\mathbf{u} \in U} \frac{\int_{\Omega} \nabla \otimes \mathbf{u} : \nabla \otimes \mathbf{u} dV}{\int_{\Omega} \nabla^s \otimes \mathbf{u} : \nabla^s \otimes \mathbf{u} dV} = 1 + \sup_{\mathbf{u} \in U} \frac{\int_{\Omega} \nabla^a \otimes \mathbf{u} : \nabla^a \otimes \mathbf{u} dV}{\int_{\Omega} \nabla^s \otimes \mathbf{u} : \nabla^s \otimes \mathbf{u} dV},$$

где U — класс ненулевых дифференцируемых векторных полей, удовлетворяющих граничным условиям на $\partial\Omega$, $\nabla^s \otimes \mathbf{u}$ — симметричная часть градиента векторного поля ($\nabla^s \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T)$), $\nabla^a \otimes \mathbf{u}$ — антисимметричная часть его градиента ($\nabla^a \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} - \nabla \otimes \mathbf{u}^T)$). Соответствующую вариационную задачу будем называть модифицированной задачей Корна (в отличие от классической задачи Корна), а те векторные поля, на которых достигается максимум этого отношения, называются экстремалиями задачи Корна.

Задача о константе Корна для блокообразной области, с некоторыми специальными краевыми условиями на всех гранях, кроме одной пары, была решена в [2]. В частности, она была решена для случая, когда одна пара граней свободна, а на двух других задано условие тангенциального проскальзывания. Эти

граничные условия являются несколько более сильными, чем граничные условия рассматриваемой задачи.

Для определения достаточных условий неустойчивости равновесной конфигурации $\tilde{\mathbf{k}}(\beta)$ воспользуемся кинематической гипотезой, согласно которой рассматриваются поля инкрементальных смещений, принадлежащие классу экстремалей модифицированной задачи Корна. Последние имеют следующий вид [3]: поле инкрементальных смещений

$$\delta \mathbf{u}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \mathbf{e}_2 \hat{a}(\tilde{x}_3) \varphi(\tilde{x}_2) + \mathbf{e}_3 \hat{b}(\tilde{x}_3) \psi(\tilde{x}_2),$$

его градиент

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \delta \mathbf{u}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) &= (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \hat{a}'(\tilde{x}_3) - p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \hat{b}(\tilde{x}_3)) \varphi(\tilde{x}_2) + \\ &+ (p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \hat{a}(\tilde{x}_3) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \hat{b}'(\tilde{x}_3)) \psi(\tilde{x}_2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{\pi}{\beta l_2}, \\ \varphi(\tilde{x}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2l_1 \beta l_2}} \sin p \tilde{x}_2, \quad \psi(\tilde{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2l_1 \beta l_2}} \cos p \tilde{x}_2, \\ \hat{a}(\tilde{x}_3) &= \alpha_1 \operatorname{sh} p \tilde{x}_3 + \alpha_2 p \tilde{x}_3 \operatorname{sh} p \tilde{x}_3 + \alpha_3 \operatorname{ch} p \tilde{x}_3 + \alpha_4 p \tilde{x}_3 \operatorname{ch} p \tilde{x}_3, \\ \hat{b}(\tilde{x}_3) &= \beta_1 \operatorname{sh} p \tilde{x}_3 - \alpha_4 p \tilde{x}_3 \operatorname{sh} p \tilde{x}_3 + \beta_3 \operatorname{ch} p \tilde{x}_3 - \alpha_2 p \tilde{x}_3 \operatorname{ch} p \tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Для рассматриваемых краевых условий константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_3$ таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_3 = \beta_1 = 0, \\ \beta_3 &= 1, \quad \alpha_4 = \frac{\operatorname{th} p l_3}{\operatorname{th} p l_3 + p l_3}, \\ \alpha_1 &= (1 - p l_3 \operatorname{th} p l_3) \alpha_4. \end{aligned}$$

На рис. 2, б показаны смещения, соответствующие экстремалам модифицированной задачи Корна для тонкого блока, ϵ — когда толщина блока сравнима с высотой. Жирной линией на рис. 2, б выделено сечение $x_2 = l_2/2$.

Определим подинтегральное выражение в функционале (4.2), подставив градиент поля смещений (4.7):

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} \otimes \delta \mathbf{u} : \mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{k}}}^{-1} : \nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} \otimes \delta \mathbf{u} &= \\ &= \frac{1}{2} \mu \left(a^2(x_3) (\beta^{-2} + 1) - 2pb(x_3) a'(x_3) (\beta^{-2} + 1) + \right. \\ &\quad \left. + p^2 b^2(x_3) (\beta^2 + 1) + (\beta^2 + 3\beta^{-2}) p^2 a^2(x_3) + 4b'^2(x_3) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда для функционала (4.2), получим³:

$$\begin{aligned} R_2(\beta) &= \pi \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi l_3}{\beta l_2} \right) \left(3 (\beta^2 + 1) \sinh^3 \left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2} \right) l_2^3 \beta^5 + \right. \\ &\quad + 2\pi (2\beta^4 + 3\beta^2 - 3) \sinh^2 \left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2} \right) l_2^2 l_3 \beta^2 + \\ &\quad + 8\pi^3 \left(-\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \cosh \left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2} \right) - 1 \right) l_3^3 + \\ &\quad + 4\pi^2 \left(\beta^3 (\beta^2 - 1) \sinh \left(\frac{4\pi l_3}{\beta l_2} \right) - \beta (\beta^2 + 5) \sinh \left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2} \right) \right) l_2 l_3^2 \times \\ &\quad \left. \left(8\beta^4 l_2^2 \left(\beta \sinh \left(\frac{\pi l_3}{\beta l_2} \right) l_2 + \pi \cosh \left(\frac{\pi l_3}{\beta l_2} \right) l_3 \right)^2 \right)^{-1} \right) > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

³Вычисления производились с использованием пакета символьных вычислений Mathematica.

Выполнение условия $R_2(\beta) < 0$ является достаточным условием неустойчивости конфигурации $\bar{\kappa}(\beta)$.

Также как и в случае первой кинематической гипотезы, при определении оценки снизу для критического значения коэффициента сжатия, нужно решить следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \left(3(\beta^2 + 1) \sinh^3\left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2}\right) l_2^3 \beta^5 + \right. \\ & + 2\pi(2\beta^4 + 3\beta^2 - 3) \sinh^2\left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2}\right) l_2^2 l_3 \beta^2 + \\ & + 8\pi^3 \left(-\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \cosh\left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2}\right) - 1\right) l_3^3 + \\ & \left. + 4\pi^2 \left(\beta^3 (\beta^2 - 1) \sinh\left(\frac{4\pi l_3}{\beta l_2}\right) - \beta (\beta^2 + 5) \sinh\left(\frac{2\pi l_3}{\beta l_2}\right)\right) l_2 l_3^2\right) = 0, \end{aligned}$$

а затем выбрать наибольший корень из промежутка $(0, 1)$. Полученная таким образом оценка (обозначим ее через β_2^*) также будет зависеть только от отношения линейных размеров блока l_3/l_2 . График зависимости $\gamma_2^* = 1/\beta_2^*$ от $l_2/(2l_3)$ представлен на рис. 4.

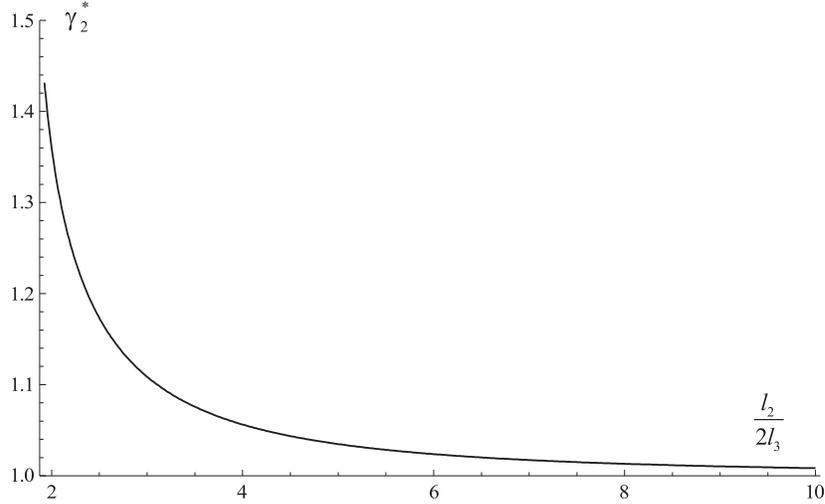


Рис. 4. Оценка снизу для критического значения коэффициента растяжения, полученная при помощи экстремалей модифицированной задачи Корна

Применение кинематической гипотезы на основе экстремалей модифицированной задачи Корна перестает давать результат, когда отношение $l_2/(2l_3)$ становится меньше значения 1.92.

5. Заключение. Сравнительный анализ результатов исследования на основе двух кинематических гипотез. Общие выводы.

Выше были введены величины $\gamma_1^* = 1/\beta_1^*$, $\gamma_2^* = 1/\beta_2^*$ — критические значения коэффициента сжатия блока для гипотезы ортогональных плоских сечений и экстре-

малей задачи Корна, соответственно. Проведем сравнительный анализ оценок γ_1^* и γ_2^* при различных значениях отношения $l_2/(2l_3)$. Будем рассматривать $\gamma \in [1, \infty)$, что соответствует сжатию блока вдоль оси \mathbf{e}_2 .

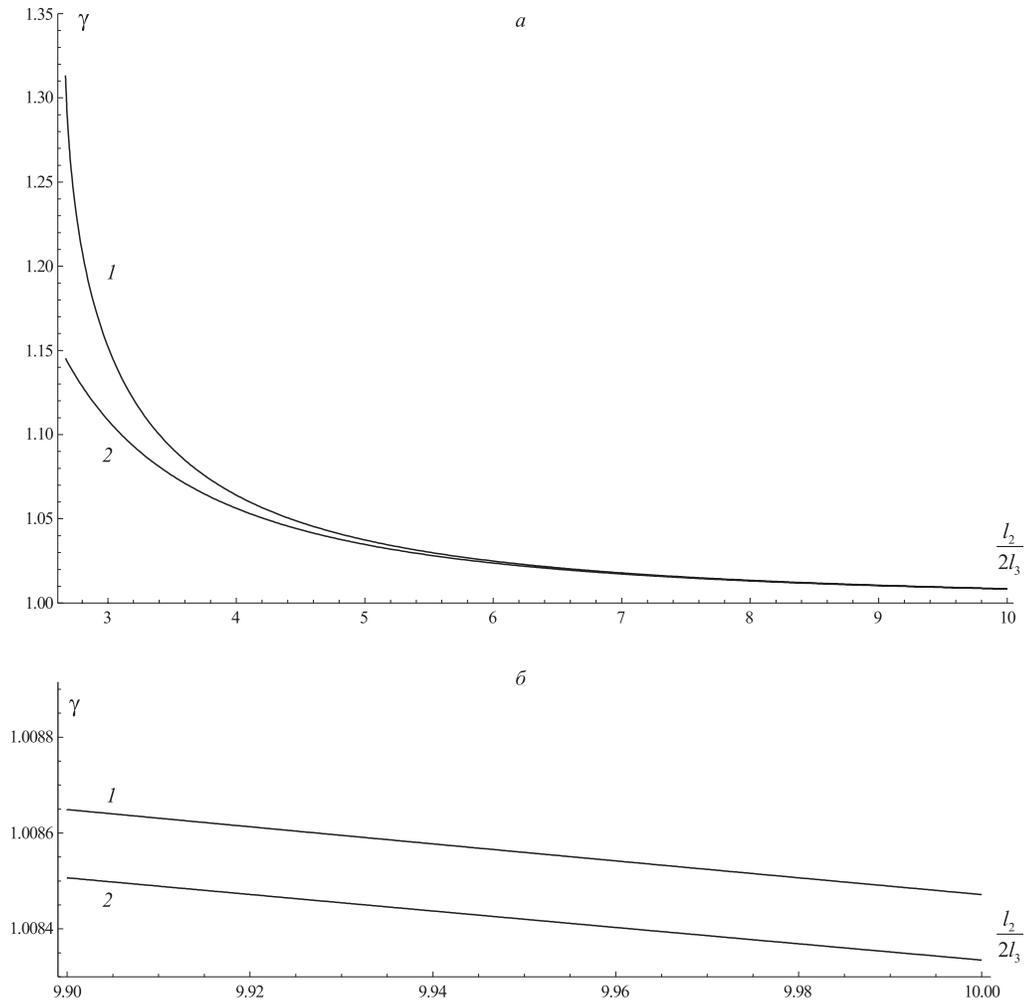


Рис. 5. Оценки сверху критического значения коэффициента сжатия

На рис. 5 представлены графики оценок сверху для двух кинематических гипотез в зависимости от отношения линейных размеров блока ($l_2/(2l_3)$). Оценки рассматриваются на интервале от $l_2/(2l_3) = 2,66$ (при меньшей величине этого отношения гипотеза ортогональных плоских сечений перестает давать результат) до $l_2/(2l_3) = 10$ (довольно тонкий блок). На всем рассматриваемом интервале (рис. 5, а), оценка соответствующая экстремалам задачи Корна (2) будет ниже оценки, соответствующей гипотезе ортогональных плоских сечений (1). При достаточно тонких блоках (рис. 5, а) эти оценки практически совпадают, а с ростом толщины блока разница между этими оценками возрастает до бесконечности (при $l_2/(2l_3) \rightarrow 2,66$).

Все выше перечисленное указывает на неслучайность использования экстремалей задачи Корна при нахождении достаточных условий неустойчивости. Дело в

том, что при определении константы Корна k по сути требуется найти максимум отношения

$$\frac{\int_{\Omega} \nabla^a \otimes \mathbf{u} : \nabla^a \otimes \mathbf{u} dV}{\int_{\Omega} \nabla^s \otimes \mathbf{u} : \nabla^s \otimes \mathbf{u} dV} = \frac{\int_{\Omega} \nabla \otimes \mathbf{u} : \nabla \otimes \mathbf{u} dV}{\int_{\Omega} \nabla^s \otimes \mathbf{u} : \nabla^s \otimes \mathbf{u} dV} - 1 \quad (5.1)$$

на всех кинематически допустимых полях. При решении задачи о неустойчивости ("выпучивании") стержня энергетическим методом в балочном приближении, также требуется найти максимум этого отношения, но уже не на всем классе кинематически допустимых полей, а на более узком классе полей, который соответствует "балочному" приближению, то есть гипотезе ортогональных плоских сечений. Точный максимум этого отношения достигается на экстремалих соответствующей задачи Корна и равен $k - 1$, но если ограничить класс рассматриваемых полей смещений полями, удовлетворяющими гипотезе ортогональных плоских сечений, то получается оценка снизу для $k - 1$, которая достигается на инкрементальных полях смещений п. 4.1. Таким образом и первый, и второй класс рассмотренных полей смещений доставляют максимум отношения (5.1), но на различных множествах. Так как второй класс, в отличие от первого, доставляет максимум на всех допустимых полях, то, как и следовало ожидать, он дает лучшую оценку для критического значения коэффициента сжатия. Когда блок достаточно тонкий, то оценки практически неразличимы, поскольку экстремали модифицированной задачи Корна переходят в смещения, соответствующие гипотезе ортогональных сечений, при стремлении толщины блока к нулю. С увеличением толщины блока различие между кинематиками, задаваемыми гипотезой ортогональных плоских сечений и экстремалими задачи Корна, растет, и одновременно увеличивается разница между оценками, получаемыми на их основе. Для достаточно толстых блоков сечения, которые были изначально плоскими при деформировании по форме потери устойчивости, соответствующей экстремалим модифицированной задачи Корна, существенно искривляются причем тем сильнее, чем ближе к боковым граням (рис. 2, в, жирной линией показано сечение $x_2 = l_2/2$ после деформации).

Чрезвычайно важно, что помимо того, что оценка, полученная при помощи экстремали модифицированной задачи Корна, для толстых блоков намного точнее, она существует при таких толщинах, при которых решение задачи о неустойчивости на основе гипотезы ортогональных плоских сечений, просто отсутствуют.

Автор благодарен Е.И. Рыжаку за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

- [1] Трусделл, К. Превоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
- [2] Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
- [3] Ryzhak, E.I. Korn's constant for a parallelepiped with free face or pair of faces / E.I. Ryzhak // Math. Mech. Solids. – 1999. – V. 4. – No. 1. – P. 35–55.

Поступила в редакцию 10/VII/2007;
в окончательном варианте — 10/VII/2007.

**UPPER ESTIMATES FOR THE CRITICAL VALUE
OF COMPRESSION COEFFICIENT
FOR A NON-LINEAR ELASTIC PARALLELEPIPED**

© 2006 S.A. Panteleyev⁴

The problem of stability under uniaxial compression for a nonlinearly elastic body of the shape of rectangular parallelepiped (the block) is considered in the paper. The energy criterion is used as the criterion for stability/instability. The work is aimed at determining the sufficient conditions for instability of the equilibrium state of the block under compression. The method of analysis is based upon usage of some kinematic hypotheses, i.e. upon reduction of the class of kinematically admissible displacement fields. The method used results in obtaining some upper estimates for the critical value of the loading parameter, by which the coefficient of axial compression of the block is taken here. Used are the following two reduced classes of the fields: 1) the one corresponding to hypothesis of the orthogonal flat cross-sections; 2) that formed by the extremals of corresponding modified Korn's problem. The estimates for the critical values of compression coefficient are obtained in an analytical form and depend on mutual relations of spatial dimensions of the block. A comparative analysis of the estimates corresponding to the above-mentioned two classes, is carried out. It is revealed that the estimate corresponding to the second class appears to be lower (i.e. better) for every geometry considered, but for thin blocks the difference between the estimates is small, whereas the thicker the block, the more appreciable is the difference. For each class there is its own range of thickness beyond which the instability is not found; however, for the second one it is significantly wider and includes the blocks of rather great thickness.

Paper received 10/VII/2007.

Paper accepted 10/VII/2007.

⁴Panteleyev Sergey Alexandrovich (panteleyev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.