

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

© 2007 Н.Н. Окулова¹

Даются постановка и решение задачи о распределении напряжений в вязкопластической полосе. Одна граница полосы принимается свободной от напряжений, а к другой прикладывается касательное напряжение. Исследование задачи проведено численно-аналитически. Предложен метод решения подобного класса задач. Разностная схема задачи строится таким образом, что определение положения узлов сетки и соответствующих значений напряжений в них, а также толщины зоны течения, ведется в параллельном режиме по мере перехода с одного временного слоя на другой.

Введение

Данная задача принадлежит классу параболических задач в области с неизвестной движущейся границей, по форме напоминающих задачи типа Стефана [1] для уравнения теплопроводности, но с иными краевыми условиями. Подробный анализ имеющихся точных и приближенных решений нестационарных задач о вязкопластических течениях дан в монографии [2]. Рассматриваемая задача представляет особый интерес в связи с отсутствием на данный момент аналитического либо численного решения.

Определяющие соотношения вязкопластической среды (модель Бингама–Ильюшина) могут быть представлены в виде объединения скалярных и тензорных определяющих соотношений:

$$T = \tau_s + \mu U, \quad s_{ij} = 2 \frac{T}{U} v_{ij}, \quad (1)$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге, μ — динамическая вязкость, $s_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — девиатор тензора напряжений, $v_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — тензор скоростей деформации, $T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}}$ — максимальное касательное напряжение, $U = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}}$ — максимальная скорость скольжения.

В области $\Omega_f = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) > \tau_s\}$, называемой зоной течения, имеет место вязкопластическое течение. Другая область $\Omega_r = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq \tau_s\}$, называемая жесткой зоной, ведет себя как твердое тело. Граница жесткой зоны Σ_r определяется из

¹Окулова Надежда Николаевна (nokulova@gmail.com), кафедра прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана, 105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.

условия $T(\mathbf{x}) = \tau_s$ и зачастую представляет основной интерес в прикладных задачах.

В областях Ω_f и Ω_r имеем уравнения движения и условие несжимаемости:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad v_{i,i} = 0. \quad (2)$$

1. Постановка задачи

Полоса $\Omega_0 = \{(x, y) : x \in R, 0 \leq y \leq L\}$ заполнена несжимаемым вязкопластическим материалом. При $t < 0$ материал находится в ненапряженном состоянии и покоится. При $t \geq 0$ на границе $y = 0$ задается касательное напряжение $\sigma(0, t) = S(t)$, где $S(t)$ — некоторая монотонно возрастающая функция, такая, что $S(0) = \tau_s$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0 \tau_s$. Граница $y = L$ считается свободной от напряжений: $\sigma(L, t) = 0$.

Требуется определить закон изменения границы раздела "зона течения — жесткая зона" $\xi = \xi(t)$, распределение скоростей $v(y, t)$ и напряжений $\sigma(y, t)$ в зоне пластического течения $D_f = \{(y, t) : 0 \leq y \leq \xi(t), t \geq 0\}$; распределение напряжений $\sigma(y, t)$ в твердой зоне $D_r = \{(y, t) : \xi(t) \leq y \leq L, t > 0\}$ и скорость ее движения $v(t)$.

Будем решать задачу в предположении отсутствия массовых сил. Включим в базис обезразмеривания тройку величин $\{\rho, \mu, \tau_s\}$. Для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\tau_s}, \quad v^* = \frac{v}{\rho^{-1/2} \tau_s^{1/2}}, \quad y^* = \frac{y}{\rho^{-1/2} \mu \tau_s^{-1/2}}, \quad t^* = \frac{\tau_s t}{\mu},$$

$$s_{ij}^* = \frac{s_{ij}}{\tau_s}, \quad v_{ij}^* = \frac{\mu v_{ij}}{\tau_s}, \quad T^* = \frac{T}{\tau_s}, \quad U^* = \frac{\mu U}{\tau_s}.$$

В дальнейшем индекс "*" опускается и все соотношения записываются в безразмерном виде.

Применительно к данному случаю $T = |\sigma|$, $U = |v_y|$. Подставляя эти соотношения в (1), (2), получаем математическую постановку рассматриваемой задачи. Требуется найти функции $v(y, t)$, $\sigma(y, t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющие начально-краевой дифференциальной задаче

$$\begin{aligned} \sigma_y(y, t) &= v_t(y, t), & \sigma(y, t) &= 1 + v_y(y, t), & (y, t) &\in D_f, \\ \sigma_y(y, t) &= v_t, & v_y(y, t) &= 0, & (y, t) &\in D_r, \\ \sigma(0, t) &= S(t), & \sigma(L, t) &= 0, & \sigma(\xi(t), t) &= 1, & \xi(0) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Исключая из уравнения скорость, получим при $t > 0$:

$$\sigma_{yy}(y, t) = \sigma_t(y, t), \quad (y, t) \in D_f, \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}(y, t) = 0, \quad (y, t) \in D_r, \quad (4)$$

$$\xi(0) = 0, \quad (5)$$

$$\sigma(0, t) = S(t), \quad \sigma(L, t) = 0, \quad \sigma(\xi(t), t) = 1, \quad (6)$$

$$\sigma_y(\xi^+(t), t) = \sigma_y(\xi^-(t), t). \quad (7)$$

Последнее условие является следствием непрерывности ускорения на границе "зона течения — жесткая зона", т.е. при $y = \xi(t)$.

Для стандартизации задачи перейдем к новым переменным $\hat{y} = \frac{y}{L}$, $\hat{t} = \frac{t}{L^2}$. В новых переменных уравнения (3), (4) и условия (5)–(7) примут вид (здесь и далее знак $\hat{}$ снят)

$$\sigma_{yy}(y, t) = \sigma_t(y, t), \quad (y, t) \in D_f, \quad (8)$$

$$\sigma_{yy}(y, t) = 0, \quad (y, t) \in D_r, \quad (9)$$

$$\xi(0) = 0, \quad (10)$$

$$\sigma(0, t) = S(t), \quad \sigma(1, t) = 0, \quad \sigma(\xi(t), t) = 1, \quad (11)$$

$$\sigma_y(\xi^+(t), t) = \sigma_y(\xi^-(t), t). \quad (12)$$

Из уравнения (9) следует, что $\sigma(y, t) = a(t)y + b(t)$, $(y, t) \in D_r$. Учитывая отсутствие напряжений при $y = 1$ и последнее из условий (11), получаем распределение напряжений в жесткой зоне

$$\sigma(y, t) = \frac{y - 1}{\xi - 1}.$$

Поэтому условие (12) теперь можно записать в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right|_{y=\xi^-} = \frac{1}{\xi(t) - 1}. \quad (13)$$

В случае, когда $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0$ ($1 < S_0 < \infty$) следует ожидать выхода решения на стационарный режим $\hat{\sigma}(y)$. Он определяется как решение следующей дифференциально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yy}(y) &= 0, & 0 < y < \hat{\xi}, \\ \hat{\sigma}_{yy}(y) &= 0, & \hat{\xi} < y < 1, \\ \hat{\sigma}(0) &= S_0, & \hat{\sigma}(\hat{\xi}) &= 1, & \hat{\sigma}(1) &= 0. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(y) &= S_0(1 - y), & 0 \leq y \leq \hat{\xi}, \\ \hat{\xi} &= \frac{S_0 - 1}{S_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ распределение напряжений задается единой линейной функцией как в области пластического течения, так и в жесткой зоне. Толщина зоны течения становится постоянной и равной $h = 1 - 1/S_0$.

2. Численное решение задачи в зоне течения

Пусть $\bigcup(y_i, t_i)$ — некоторая сетка, покрывающая область течения D_f . Будем предполагать, что узлы (y_j, t_j) находятся на границе раздела "зона течения — жесткая зона" (рис. 1), другими словами, $y_j = \xi(t_j)$.

Дифференциальной задаче (8)–(11), (13) поставим в соответствие разностную схему. При этом уравнение (8) аппроксимируется неявной схемой треугольников:

$$\frac{2\sigma_{i+1}^j h_i + 2\sigma_{i-1}^j - 2\sigma_i^j (h_i + h_{i+1})}{h_i h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} = \frac{\sigma_i^j - \sigma_i^{j-1}}{\tau_j}, \quad 0 < i < j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Граничные условия задаются в виде:

$$\sigma_0^j = S(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \sigma_j^j = 1, \quad (15)$$

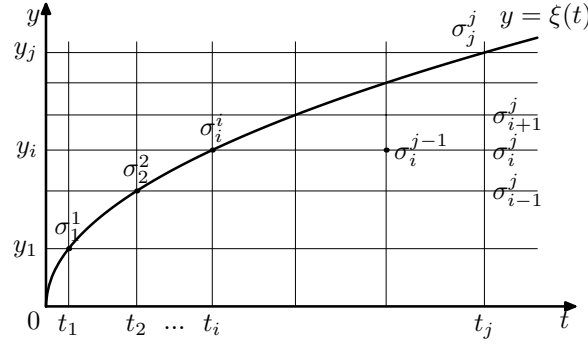


Рис. 1. Построение разностной сетки

Разностный аналог условия сопряжения (13):

$$\frac{1 - \sigma_{j-1}^j}{h_j} = \frac{1}{y_j - 1}. \quad (16)$$

Здесь σ_i^j — значение сеточной функции в узле (y_i, t_j) , $h_i = y_i - y_{i-1}$, $\tau_j = t_j - t_{j-1}$.

Построение сетки и определение напряжений производится последовательно, шаг за шагом, по мере перехода от одного временного слоя к другому.

Шаг 1. Задаем некоторое $\tau_1 = t_1$. Условие сопряжения (16) принимает вид $\frac{1 - S(\tau_1)}{h_1} = \frac{1}{h_1 - 1}$, разрешая его находим $h_1 = 1 - 1/S(\tau_1)$.

После первого шага имеем h_1 и две точки на первом временном слое $(0, t_1)$ и (h_1, t_1) . Значение напряжения в точках этого слоя следующие: $\sigma_0^1 = S(\tau_1)$ и $\sigma_1^1 = 1$.

Пусть мы сумели определить $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$, положение узловых точек на соответствующих временных слоях и значение напряжения в этих точках.

Шаг m. Полагаем, что при переходе с $m-1$ временного слоя на m -й слой толщина жидкой зоны возрасла на некоторую величину h_m , т.е. $y_m = y_{m-1} + h_m = \xi(t_{m-1} + \tau_m)$, при этом h_m пока считаем неизвестным.

Уравнение (14) на m -ом временном слое можно записать в виде СЛАУ:

$$A^{(m)} \sigma^{(m)} = B^{(m)}, \quad (17)$$

где $A^{(m)}$ — трехдиагональная квадратная матрица порядка $m-1$:

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & & a_{i-1} & a_{ii} & a_{i+1} \\ & 0 & & a_{m-2} & a_{m-1} \\ & & & a_{m-2} & a_{m-1} \end{pmatrix},$$

$$a_{i-1} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad a_{ii} = -\frac{2}{h_i h_{i+1}} - \frac{1}{\tau_m}, \quad a_{i+1} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})};$$

$\sigma^{(m)}$ — столбец напряжений во внутренних точках слоя, $B^{(m)}$ — столбец правых

частей:

$$\sigma^{(m)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^m \\ \sigma_2^m \\ \sigma_3^m \\ \dots \\ \sigma_{m-1}^m \end{pmatrix}, \quad B^{(m)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \end{pmatrix},$$

$$b_1 = -\frac{\sigma_1^{m-1}}{\tau_m} - \frac{2S(t_{m-1} + \tau_m)}{h_1(h_1 + h_2)}, \quad b_i = -\frac{\sigma_i^{m-1}}{\tau_m} \quad (i = 2, 3, \dots, m-2),$$

$$b_{m-1} = -\frac{1}{\tau_m} - \frac{2}{h_m(h_{m-1} + h_m)}.$$

В выражении для b_1 учтено граничное условие $\sigma_0^m = S(t_{m-1} + \tau_m)$, а в выражении для b_{m-1} учтено, что узел (y_m, t_m) лежит на границе раздела "жидкость – твердое тело" и, следовательно, $\sigma_m^m = 1$.

Отметим, что в выражениях для элементов матрицы $A^{(m)}$ и столбца $B^{(m)}$ все входящие величины уже известны, кроме шага h_m , который пока считается неизвестным и, следовательно, элементы матрицы $A^{(m)}$ и столбца $B^{(m)}$ следует рассматривать как функции от h_m . Поэтому все компоненты решения системы (17) и, в частности, σ_{m-1}^m будут также функциями от h_m , т.е. $\sigma_{m-1}^m = \sigma_{m-1}^m(h_m)$.

Отсюда следует алгоритм решения. Решаем систему (17) и находим $\sigma_{m-1}^m(h_m)$. Подставляя эту функцию в условие сопряжения (16), находим h_m . Подставляем найденное h_m в $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$. Теперь матрицы $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$ состоят из известных элементов. Решая систему (17) находим σ_i^m ($i = 1, 2, \dots, m-1$).

Замечание. Алгоритм предполагает, что величины τ_j заданы, но это не означает, что они обязаны всегда быть постоянными. Изменение τ_j производится в тех случаях, если найденное h_m слишком мало или больше некоторого предельного значения (поскольку в этих случаях существенно теряется порядок аппроксимации).

3. Результаты численных расчетов

В качестве граничной функции $S(t) = \sigma(0, t)$ рассматривалась $S(t) = (S_0 - 1)(1 - e^{-\alpha t}) + 1$ при $S_0 = 10$ (что соответствует напряжению в десять раз превышающему предел текучести), $\alpha = 10$ и $\alpha = 50$. Графики соответствующих функций представлены на рис. 2 (нижней кривой соответствует $\alpha = 10$, верхней — $\alpha = 50$).

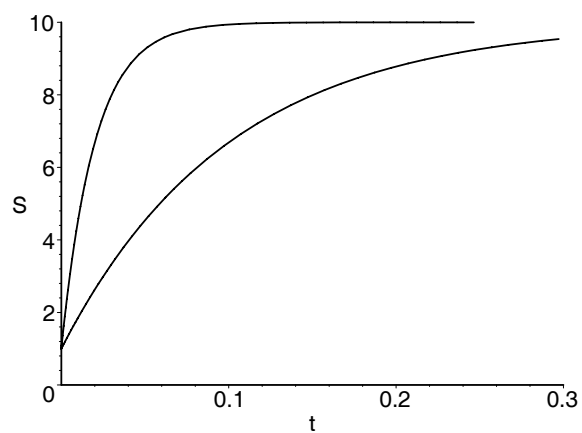
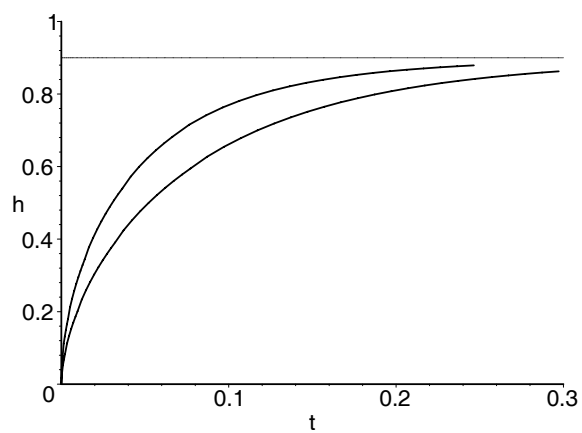
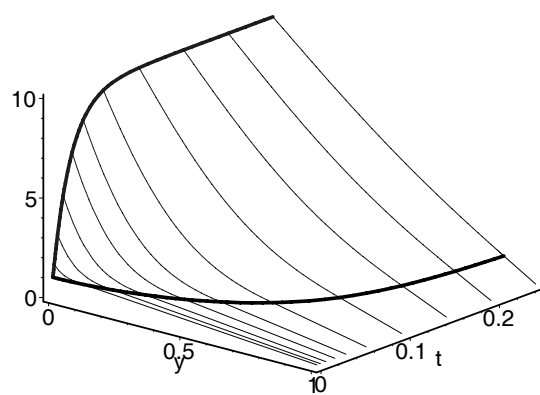
Графики изменения толщины зоны пластического течения от времени $h(t)$ представлены на рис. 3. Нижняя кривая соответствует $\alpha = 10$, верхняя — $\alpha = 50$. Оба графика при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к горизонтальной прямой $h = 1 - 1/S_0$, т.е. в данном случае толщина стремится к значению $h = 0.9$.

Итоговый график зависимости напряжения от времени и координаты (для $\alpha = 50$) представлен на рис. 4. Нижняя кривая отделяет зону пластического течения от жесткой зоны.

Зная узловые значения поля напряжений можем найти узловые значения поля скоростей и, в частности, скорости движения границ полосы. Поскольку $v_t(y, t) = \sigma_y(y, t)$, то

$$v(0, t) = \left(\int_0^t \sigma_y(y, t) dt \right)_{y=0}, \quad v(1, t) = \left(\int_0^t \sigma_y(y, t) dt \right)_{y=1}.$$

Графики скоростей границ $y = 0$ (верхняя кривая) и $y = 1$ (нижняя кривая) представлены на рис. 5 (для случая $\alpha = 50$). Скорость точек на границе раздела сред

Рис. 2. График граничного напряжения $S(t)$ Рис. 3. График функции $h(t)$ Рис. 4. График функции напряжения $\sigma(y, t)$

и во всей жесткой зоне совпадает с $v(1, t)$. Нарастание скорости свободной от напряжения границы $y = 1$ происходит с запаздыванием по отношению к скорости границы $y = 0$.

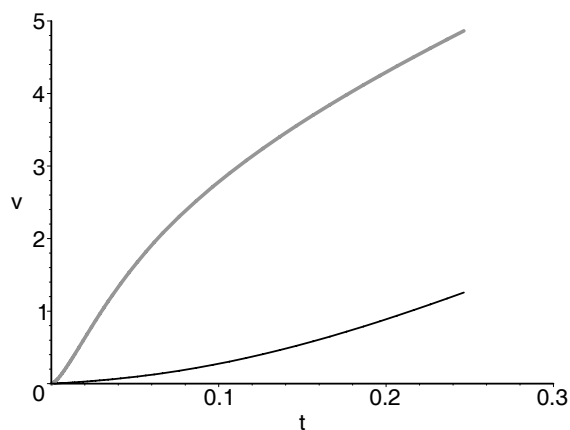


Рис. 5. График распределения скоростей $v(t)$

Литература

- [1] Рубинштейн, Л.И. Проблема Стефана / Л.И. Рубинштейн. – Рига: Звайгзне, 1967. – 457 с.
- [2] Огибалов, П.М. Нестационарные движения вязкопластических сред / П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 373 с.

Поступила в редакцию 15/VI/2007;
в окончательном варианте — 15/VI/2007.

NUMERICAL AND ANALYTICAL ANALYSIS OF STRESSES DISTRIBUTION PROBLEM IN A VISCOPLASTIC BAND

© 2007 N.N. Okulova²

Formulation and solution of the problem of distribution of stresses in a viscoplastic band are given. One boundary of the band is tractions to be free of stress as well as shear stress acts along another one. An analysis of the problem is carried out by numerical and analytical ways. A method for solving of this kind of problems is proposed. The finite difference scheme of the problem is constructed such that an obtaining of mesh knots and corresponding stress values there as well as a thickness of flow zone is carried out in parallel regime in process of transition from one time layer to another.

Paper received 15/*VI*/2007.

Paper accepted 15/*VI*/2007.

²Okulova Nadezhda Nikolaevna (nokulova@gmail.com), Dept. of Applied Mathematics, Moscow State Technical University n.a. N.E. Bauman, Moscow, 105005, Russia.