УДК 539.375

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ

© 2007 А.А. Маркин, Дао Ван Доан[1]

С термомеханических позиций рассматривается процесс образования новых материальных поверхностей. В модель вводится характерный масштаб длины — слой взаимодействия, материал которого образует поверхностные слои разделенных тел. Рассмотрены процессы устойчивого и неустойчивого разделения.

Предлагается вариант моделирования разделения материала в рамках плоской деформации. Разделение рассматривается как процесс образования новых материальных поверхностей в результате механических воздействий на деформируемое тело.

Гипотеза сплошности не позволяет адекватно описать процесс разрушения, поэтому предлагается процесс разрушения и предшествующего ему деформирования рассматривать на основе введения в модель масштабного эффекта [1–2]. В соответствии с данной моделью материалу предписывается характерный δ-размер.

1. Общая постановка задачи разделения на основе дискретной модели

Для адекватного описания, как стадии деформирования, так и процессов, происходящих с нарушением сплошности, предлагается модель, основанная на следующих положениях:

1. Тело в начальном состоянии представляется ансамблем δ-элементов с характерным размером δ_0 [3–5], распределение термомеханических характеристик в пределах элемента полагается однородным.

2. Процесс деформирования продолжается до достижения аддитивной энергией Ψ_0 критического значения хотя бы в одном δ-элементе ($0-k$ переход). Также в качестве критерия разрушения δ-элемента используется главное максимальныое растягивающее напряжение.

3. Процесс образования новых поверхностей происходит в результате перехода материала δ-элемента из неустойчивого однородного состояния к формированию вдоль границ δ-элемента поверхностных слоев с энергией $\Delta\Gamma$. При этом все внешние и внутренние силы работы не совершают (узловые точки неподвижны). Действие δ-элемента на часть тела вне его заменяется дополнительными δ-нагрузками ($k-m$ переход).

[1]Маркин Алексей Александрович, Дао Ван Доан (doanvk31hd@mail.ru), кафедра математического моделирования Тульского государственного университета, 300600, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 92.

4. Процесс δ-разгрузки ($m-p$ переход) приводит к нулевым значениям δ-нагрузок, при этом остальные внешние по отношению к образуемому телу, узловые силы остаются постоянными, если же граничные условия заданы в перемещениях, то постоянными при $m-p$ переходе остаются перемещения граничных узловых точек, которые не были общими с узлами разрушаемого элемента.

Отметим, что энергия связи δ-элемента в начальном состоянии складывается из аддитивной Ψ и поверхностной $\Gamma_{O'O''}$, составляющих, если он расположен на поверхности тела,

$$\Phi_0^{(\delta)} = -|\Psi_0| + \Gamma_{O'O''}.$$

В (k) состоянии энергия связи принимает вид

$$\Phi_k^{(\delta)} = -|\Psi_k| + \Gamma_{O'O''}. \tag{1.1}$$

При $k-m$ переходе выполняется условие равенства нулю работы внешних по отношению к элементу сил (1-й вариант описания $k-m$ перехода), поэтому общая энергия элемента сохраняется, $\Phi_m^{(\delta)} = \Phi_k^{(\delta)}$. Однако часть аддитивной энергии $\left|\Psi_m^{(\delta)}\right| - \left|\Psi_k^{(\delta)}\right|$ трансформируется в энергию формирования новых поверхностных слоев. В результате получим, что

$$\Phi_m^{(\delta)} = -\left|\Psi_0\right| + \Gamma_{O'O''} + \Delta\Gamma. \tag{1.2}$$

Из выражений (1.1) и (1.2) находим энергию формирования поверхностных слоев.

$$\Delta\Gamma = (\left|\Psi_0\right| - \left|\Psi_k\right|) = U_k.$$

В соответствии с положением №3 дискретной модели части тела вне разрушаемого элемента должны поддерживаться в равновесном состоянии, достигнутом в момент времени t_k. Для выполнения этого условия к узлам тела, общим с разрушенным δ-элементом, прикладываются узловые силы $\vec{F}_k^{(\delta)}$, отражающем действие δ-элемента на часть тела вне его.

Данные силы прикладываются в момент времени t_k и изолируют часть тела вне δ-элемента от процесса его разрушения. Это означает, что на вновь образуемые поверхностные слои силы $\vec{F}_k^{(\delta)}$ не действуют, поэтому в m состоянии поверхностные слои становятся полностью свободными от внешних воздействий и аддитивная энергия в них определяется из условия

$$-\left|\Psi_m\right| = -\left|\Psi_0\right|,$$

что нашло отражение в формуле (1.2).

В соответствии с положением №4 на $m-p$ переходе тело освобождается от δ-нагрузок, происходит δ-разгрузка, в результате которой $\vec{F}_k^{(\delta)} \to 0$. В том случае, если на границе тела заданы внешние силы, то они не должны изменяться в процессе δ-разгрузки на части поверхности вне δ-элемента, то есть должно выполняться условие

$$\vec{F}_p^{(e)} = \vec{F}_k^{(e)}.$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии на $m-p$ переходе для части тел вне δ-элемента

$$A_{m-p}^{(\delta)} + A_{m-p}^{(i)} + A_{m-p}^{(e)} = K_p, \tag{1.3}$$

где $A_{m-p}^{(e)}$ — работа внешних по отношению к телу нагрузок; $A_{m-p}^{(i)}$ — работа внутренних нагрузок; $A_{m-p}^{(\delta)}$ — работа δ-нагрузок; K_m — кинетическая энергия в момент времени t_m. По условию состояние рассматриваемого тела в момент t_m равновесно, поэтому $K_m = 0$.

Если левая часть выражения (1.3) положительна, то состояние тела в момент t_p неравновесно, так как скорости узловых точек не нулевые. Если же левая часть выражения (1.3) не положительна, то $m-p$ переход — равновесный и p состояние устойчиво.

Когда на границе тела заданы перемещения необходимо потребовать, чтобы на части поверхности вне δ-элемента выполнялось условие:

$$\vec{u}_p^{(e)} = \vec{u}_k^{(e)}, \tag{1.4}$$

где $\vec{u}_k^{(e)}$ — перемещение граничных точек, расположенных вне δ-элемента при $0-k$ переходе; $\vec{u}_p^{(e)}$ — перемещение тех же точек при $m-p$ переходе.

В данном случае теорема об изменении энергии принимает вид:

$$A_{m-p}^{(\delta)} + A_{m-p}^{(i)} = K_m. \tag{1.5}$$

В отличие от выражения (1.3), при выполнении условия (1.5) внешние нагрузки $\vec{F}_k^{(e)}$ не совершают работы. Состояние δ-разгрузки будет устойчивым, если левая часть выражения (1.5) не положительна.

Предлагаемая модель позволяет наряду со стадией деформирования описать процессы образования новых материальных поверхностей. В зависимости от способа внешнего воздействия и свойств материала процесс разделения может быть катастрофическим, когда разрушение охватывает одновременно слой δ-элементов, что приводит к одновременному разделению тела на части. Под термином "разрушение δ-элемента" мы понимаем $k-m$ переход.

Если процесс образования новых поверхностей неустойчив, то его будем называть перманентным разрушением (неуправляемым разделением).

Устойчивые процессы разделения, позволяющие образовывать тела с наперед заданной поверхностью, будем называть управляемым разделением. Условия и возможности реализации тех или иных режимов представляются весьма актуальными для моделирования как процессов разрушения, так и технологических процессов обработки материалов. При этом необходимо для данного материала установить условия достижения изменением аддитивной составляющей энергии критического значения при различных процессах докритического деформирования, а также определить масштабную характеристику материала — величину δ_0.

2. Задачи разделения плоского образца

Рассмотрим пластину единичной толщины с вырезом, показанную на рис. 1. Случай (а) соответствует внешнему, а (б) внутреннему нагружению.

Используя описанный выше дискретный подход разбиваем пластину на треугольные δ-элементы. В силу симметрии рассматривается четвертая часть пластины, показанная на рис. 2. Задача решается в безразмерном виде. Линейные размеры отнесены к начальному значению критической нагрузки. Таким образом единичной внешней нагрузке соответствует момент, когда разрушается хотя бы один δ-элемент. При таком походе нет необходимости знать конкретные значения параметра δ и критической внешней нагрузки. В качестве критерия разрушения δ-элемента принимаем условие достижения главным растягивающим напряжением σ_2 критического значения σ_K. Материал пластины вплоть до критического состояния полагается линейно упругим.

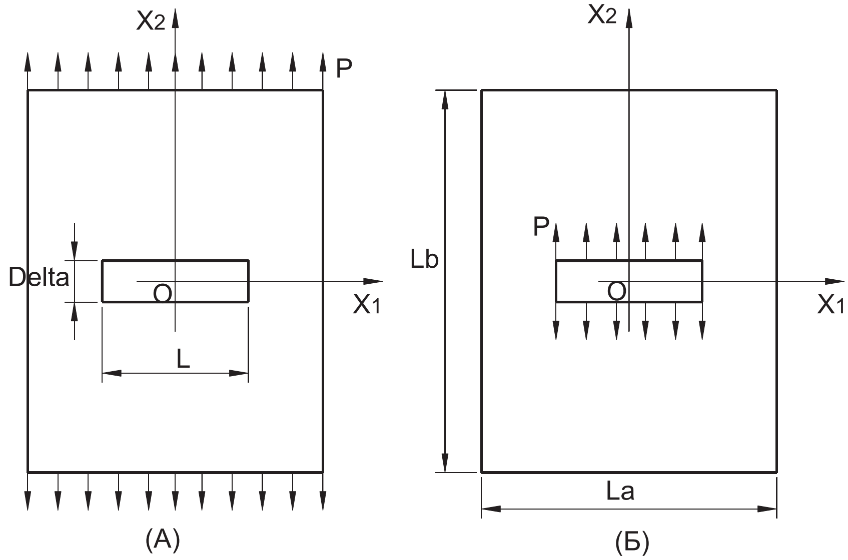

Рис. 1. Пластина единичной толщины с вырезом

В случае внешнего нагружения (рис. 1(а)) граничные условия имеют следующий вид:

$$U_{2|AB} = 0, \sigma_{12|AB} = 0; \sigma_{11|BC} = 0, \sigma_{12|BC} = 0;$$

$$\sigma_{22|CD} = P, \sigma_{12|CD} = 0; U_{1|DE} = 0, \sigma_{12|DE} = 0;$$

$$\sigma_{22|EF} = 0, \sigma_{12|EF} = 0; \sigma_{11|FA} = 0, \sigma_{12|FA} = 0.$$

При внутреннем нагружении компоненты векторов перемещений и напряжений удовлетворяют условием:

$$U_{2|AB} = 0, \sigma_{12|AB} = 0; \sigma_{11|BC} = 0, \sigma_{12|BC} = 0;$$

$$\sigma_{22|CD} = 0, \sigma_{12|CD} = 0; U_{1|DE} = 0, \sigma_{12|DE} = 0;$$

$$\sigma_{22|EF} = P, \sigma_{12|EF} = 0; \sigma_{11|FA} = 0, \sigma_{12|FA} = 0.$$

Рассмотрение процесса равновесного дискретного разделения сводится к следующим этапам:

1. На первом шаге, решая систему линейных уравнений к которой сводится упругая задача в дискретной постановке, находим распределение безразмерных напряжений в δ-элементах при единичной внешней нагрузке.

2. Определяем в каком элементе (элементах) главное растягивающее напряжение достигает максимального значения $\sigma_2 = \sigma^{(1)}_{2\max}$. Это значение принимаем в качестве критического $\sigma_K = \sigma^{(1)}_{2\max}$.

3. На втором шаге коэффициенты матрицы жесткости разрушаемого элемента (элементов) полагаются нулевыми и вновь определяется напряженное состояние пластины при той же самой единичной внешней нагрузке $P = 1$. При этом

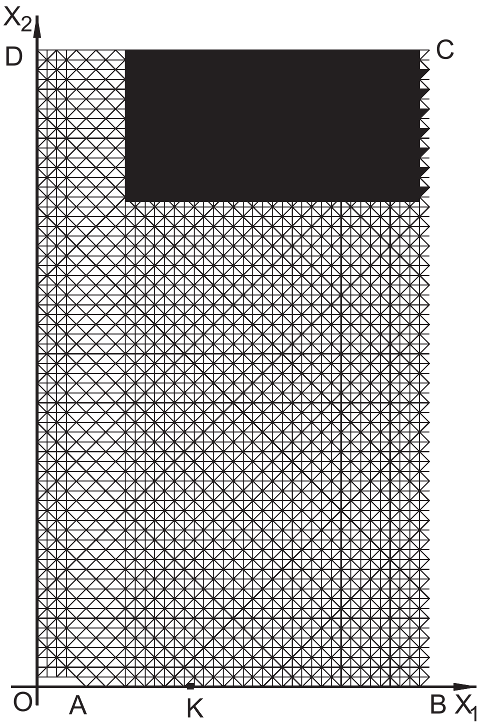

Рис. 2. Четвертая часть пластины

возможны два случая. В первом, напряжение σ_2 не превышает критического значения $\sigma^{(1)}_{2\max}$. Во втором случае напряжение σ_2 хотя бы в одном элементе превышает критическое значение. Первый случай соответствует устойчивому, а второй неустойчивому процессу разделения. Находим отношение критического напряжение $\sigma^{(1)}_{2\max} = \sigma_K$ к максимальному напряжению $\sigma^{(2)}_{2\max}$ достигаемому на втором шаге. Пусть

$$\gamma = \frac{\sigma_K}{\sigma^2_{2\max}}.$$

4. Если на третьем шаге $\gamma > 1$ и процесс устойчив, то внешняя нагрузка увеличивается до значения

$$P^{(2)} = P\gamma.$$

Так как задача линейна, то при нагрузке $P^{(2)}$ напряжение σ_2 достигает критического значения в том элементе (элементах), где оно было максимальным, но меньшим чем критическое.

5. Если же $\gamma < 1$ и процесс неустойчив, то внешняя нагрузка уменьшается до значения

$$P^{(2)} = P\gamma.$$

В этом случае при нагрузке $P^{(2)}$ критическое состояние достигается в том элементе (элементах), где напряжение было максимальным, но большим чем критическое.

6. Аналогичным образом реализуется дальнейшая процедура определения внешней нагрузки необходимой для поддержания равновесного процесса разделения.

На рис. 3 показана зависимость внешней нагрузки от количества разрушаемых вдоль отрезка АВ δ-элементов для случая внешнего нагружения рис. 1(а)

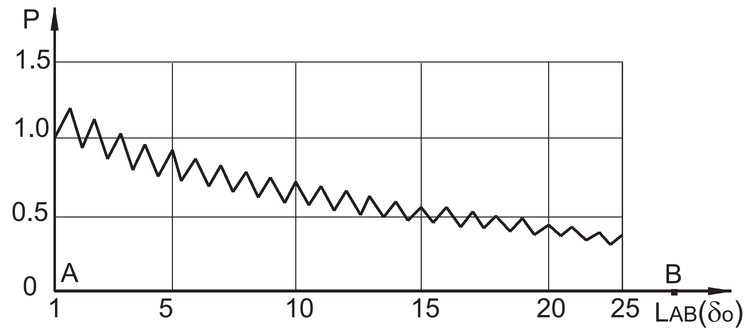

Рис. 3. Процесс неустойчивого разделения на основе дискретной модели

На рис. 4 показано изменение внутренней нагрузки в зависимости от числа разрушаемых δ-элементов для случая внутреннего нагружения рис. 1(б).

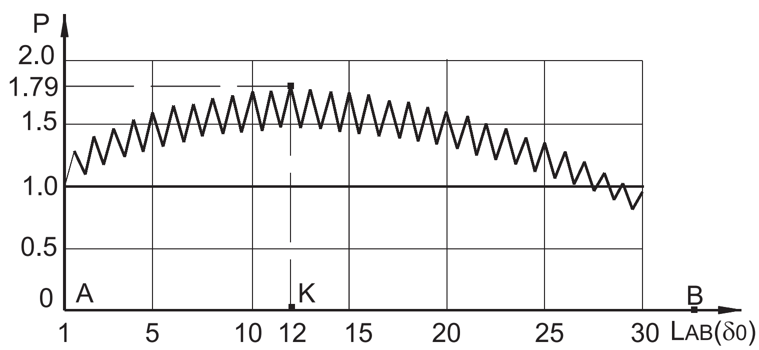

Рис. 4. Процесс устойчивого разделения на основе дискретной модели

3. Обсуждение результатов

Отметим, что в рамках дискретной модели точность полученных результатов определяется точностью решения систем линейных алгебраических уравнений. Это означает, что разбиение на более мелкие элементы не имеет смысла, тат как размер δ есть предельной масштаб применимости гипотезы сплошности. Если перейти к размерным единицам, то данные расчеты соответствуют микрообразцам с размерами порядка $AB = 40\delta$; $h = 66\delta$.

Разделение при внешнем напряжении является неустойчивым так как сопровождается уменьшением внешней нагрузки.

В случае внутреннего напряжения в начале процесс устойчив (отрезок АК, а затем также становится неустойчивым). При этом характер конкретных значений параметра δ и критического напряжения σ_K.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проект № 06-01-00047.

Литература

[1] Prandtl, L. Ein Gedankenmodell für den Zerreibrorgand spröder Körpor / L. Prandtl. – ZAMM Bd. – 13. – 1933. – S. 129–133

[2] Pictruszczac, S., Stolle D. Deformation of strain softening materials. Pt. Modelling of strain softering response / S. Pictruszczac, D. Stolle // Comput. And Geotechn. – 1987. – №2. – P. 109–123.

[3] Глаголев, В.В. Модель установившегося разделения материального слоя / В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Известия РАН, Механика твердого тела. – 2004. – №5. – С. 121–129.

[4] Глаголев, В.В. Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала / В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Проблемы прочности. – 2006. – №2. – С. 47–58.

[5] Глаголев, В.В. Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №5. – С. 194–203.

Поступила в редакцию 20/ V/2007;
в окончательном варианте 20/ V/2007.

A DISCRETE MODEL OF SEPARATION PROCESS IN SOLIDS

© 2007 A.A. Markin, Dao Van Doan[2]

A process of formation of new material surfaces is considered from thermomechanical viewpoint. The typical length scale — an interaction layer, material of which forms surface layers of separated bodies — is introduced. Processes of steady and unsteady separation are discussed.

Paper received 20/ V/2007.
Paper accepted 20/ V/2007.

[2]Markin Aleksey Alexandrovich, Dao Van Doan (doanvk31hd@mail.ru), Dept. of Mathematical Modelling, Tula State University, Tula, 300600, Russia.