УДК 539.4

ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ВО ВНЕШНОСТИ ЦИЛИНДРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

© 2007 В.А. Колесников[1]

Исследуется распространение цилиндрических волн, излучаемых расширяющимся и движущимся вдоль своей оси жестким шероховатым цилиндром в упругопластической среде.

Среда, для которой рассматривается задача предполагается уплотняющейся. В таком виде она впервые была предложена А.Ю. Ишлинским. В дальнейшем полное обоснование модели такой среды было сделано в работе [1]. Напряжения удовлетворяют условию пластичности Мизеса с константой текучести.

Задача о расширении цилиндра в различных упругопластических средах рассматривались ранее. Вначале такая задача была рассмотрена в [2]. Там она решалась без учета движения вдоль оси, среда была идеальная — "пластический газ". Для упругопластической среды Сен—Венана—Мизеса без учета касательных напряжений на поверхности, исследование проводилось в [3]. В более полной постановке для уплотняющейся среды Сен—Венана—Мизеса задача была рассмотрена в [4]. Для вязкопластичесих сред аналогичные проблемы изучались в [5]. В квазистатическом режиме применительно к среде, описываемой уравнениями Прандтля—Рейса, в случае малых деформаций подобная задача решена в [6] и [7].

Здесь рассматривается упругопластическая среда, сдвиговые свойства которой описываются соотношениями Сен—Венана—Мизеса. Похожие задачи рассматривались А.Я. Сагомоняном для описания проникания тонких тел. Причем, для более сложных законов объемного деформирования, при этом рассматривались только продольные волны, осевые скорости и соответствующие напряжения считались нулевыми, т.е. рассматривалась плоская задача. В нашем случае — более простой закон объемного деформирования, но при этом модель среды — более полная, более сложные краевые условия, а поле скоростей и напряжений не является плоским.

Подробно исследовано асимптотическое представление решения задачи для различных параметров среды. В непосредственной близости к цилиндрической поверхности использовалось решение погранслойного типа. Получена оценка границ применимости асимптотического разложения.

1. Пусть при $t < 0$ безграничная среда покоится и ненапряжена. В начальный момент, при $t = 0$ от некоторой прямой начинает расширяться с постоянной скоростью c цилиндрическая поверхность, сообщая такую же скорость соприкасающимся с ней частицам среды. К образующейся таким образом цилиндрической

[1]Колесников Владимир Алексеевич, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики Российской академии наук, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

границе, кроме того, приложено касательное напряжение. Иными словами, движение вызывается расширением по закону $r = ct$ жесткого шероховатого цилиндра, который как бы расталкивает среду и одновременно двигается вдоль своей оси. Упомянутое значение касательного напряжения есть напряжение трения.

Рассматриваемая среда предполагается уплотняющейся [1]; под этим понимается следующее. Обозначим деформацию объема и давление через $\vartheta = 1 - \rho_0/\rho$ и $\rho = -\sigma_{ii}/3$, где ρ_0 — начальная, ρ — текущая плотности, σ_{ii} — компоненты напряжения. Объемное деформирование происходит по схеме, представленной на рис. 1.

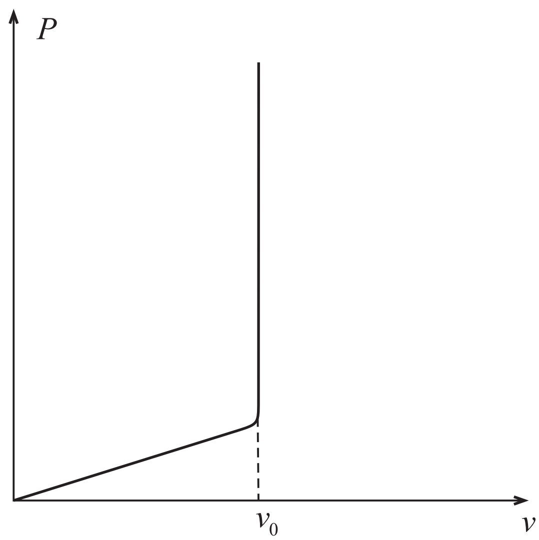

Рис. 1

Если в процессе деформирования $\max p(t) < k\vartheta_0$, то материал несжимаем и $\vartheta = p/k$; в противном случае $\vartheta = \vartheta_0$. Среда при сколь угодно малом возмущении из состояния с плотностью ρ_0 переходит в состояние с плотностью ρ, которая при дальнейшем увеличении или уменьшении давления p остается постоянной, а материал среды несжимаемым.

По сдвигу пластические свойства среды описываются так. Девиаторные компоненты напряжений s_{ij} и скорости ε_{ij} деформаций связаны соотношениями Сен–Венана–Мизеса

$$\varepsilon_{ii} s_{ij} = \varepsilon_{ij} s_{ii}. \tag{1.1}$$

Условие пластичности берется в форме Мизеса

$$I(S) = \tau_s^2, \quad I(S) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \tag{1.2}$$

где I — второй инвариант девиатора напряжений S, τ_s — предел текучести.

Упругие свойства среды по сдвигу описываются законом Гука $s_{ij} = 2Ge_{ij}$, где e_{ij} — компоненты малой деформации, G — модуль сдвига.

Искомые функции удовлетворяют уравнениям сохранения импульса

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad} p + \mathrm{div} \mathbf{S} \tag{1.3}$$

и соотношениям сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость частиц среды.

В качестве начальных принимаются условия: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\sigma_{ij} = 0$ при $t = 0$.

Задача рассматривается в эйлеровой цилиндрической системе координат r, φ, z; за ось z принимается ось цилиндра. Предполагается, что Искомые функции не зависят от переменной z. В выбранной системе координат с учетом последнего обстоятельства, а также осевой симметрии и того, что как в упругой, так и пластической областях $\tau_{zz} = 0$, соотношения (1.1)–(1.4) соответственно принимают вид:

$$I(S) = \tau_s^2, \quad I(S) = s_{rr}^2 + s_{rz}^2, \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_{rr} s_{rz} = \varepsilon_{rz} s_{rr}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + 2\frac{s_{rr}}{r}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{s_{rz}}{r}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{1.9}$$

Компоненты упругой деформации e_{ij} выражаются как

$$e_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^t v_r dt, \quad e_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^t v_z dt. \tag{1.10}$$

На поверхности цилиндра ставятся следующие условия

$$v_r = c, \quad s_{rz} = \tau_0. \tag{1.11}$$

2. Аналогично [8–10] решение задачи в зависимости от соотношений между параметрами среды и скоростью расширения цилиндра строится из комбинации ударной волны, области течения несжимаемого упругого материала упругой поперечной и пластической волн.

Для рассматриваемой среды система уравнений (1.5)–(1.11) расщепляется на отдельные уравнения и меньшие системы, из которых неизвестные находятся последовательно.

Характерным для настоящей задачи обстоятельством, принимая во внимание закон объемного деформирования в среде, является обязательное наличие ударной волны, за которой среда приходит в несжимаемое состояние. Радиус фронта ударной волны r_* может быть найден из условия (1.9) и условия сохранения массы на нем:

$$r_* = \frac{ct}{\sqrt{\vartheta}}. \tag{2.1}$$

В зависимости от соотношения между параметрами упругая поперечная волна может быть, как впереди, так и позади ударной. Так в случае

$$b < \frac{c}{\sqrt{\vartheta}}, \qquad b = \sqrt{\frac{G}{2\rho_0}}, \tag{2.2}$$

где b — скорость упругой поперечной волны в невозмущенной среде, упругая поперечная находится позади ударной. В силу нулевых начальных условий перед ударной волной, из условий сохранения импульса на ударном фронте в проекции на ось имеем на нем

$$\sigma = \rho(1 - \vartheta)v_r^2. \tag{2.3}$$

Между ударной волной и цилиндром могут располагаться в различном порядке фронт упругой поперечной волны и фронт пластической волны. Если за ударной продольной волной (2.1) материал находится в упругом состоянии по сдвигу и по нему двигается фронт пластической волны со скоростью большей скорости поперечных волн b, тогда упругая поперечная волна вообще отсутствует.

В рассматриваемой задаче отсутствуют параметры размерности длины и скорости, она является автомодельной. Искомые функции будут зависеть от одной независимой автомодельной переменной $\xi = \dfrac{r}{ct}$.

Автомодельные компоненты скорости будут: $v = \dfrac{v_r}{c}$, $w = \dfrac{v_z}{c}$. Компоненты напряжения $s_{rr}, s_{\varphi\varphi}$, s_{zz}, s_{rz} перейдут соответственно в s_r, s_ϕ, s_z, τ, будучи поделенными, на константу текучести τ_s, величину σ_{rr}, отнесенную к ρc^2, обозначим σ.

В нашем случае скорость v легко определяется из (1.9)

$$v = \frac{1}{\xi}. \tag{2.4}$$

Проекция уравнения сохранения импульса на ось r

$$\sigma'(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{2n}{\xi} s_r(\xi), \tag{2.5}$$

где $n = \dfrac{\tau_s}{\rho c^2}$, является уравнением для определения σ при известном s_r. Проекция уравнения (1.3) на ось z (1.8) примет вид

$$(1 - \xi^2)w' = n(\xi\tau' + \tau). \tag{2.6}$$

Уравнения пластического состояния среды (1.5)–(1.6) перейдут в выражения:

$$s_r^2 + \tau^2 = 1, \quad \tau = -\frac{1}{2}\xi^2 \tau w'. \tag{2.7}$$

Соотношения для упругих компонент (1.10) теперь будут выглядеть так

$$\tau_{ij} = \frac{e_{ij}}{m}, \quad e_{rr} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{\xi^2} + \vartheta), \tag{2.8}$$

$$e_{rz} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}(\xi \int_{\xi}^{\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}} w(\eta)\frac{d\eta}{\eta^2}), \tag{2.9}$$

где m — константа, $m = \dfrac{\tau_s}{G}$. В автомодельных переменных координата ударного фронта η_* и скачок напряжений σ на нем как следует из (2.1) и (2.3) будут

$$\eta_* = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}, \quad \sigma = -(1 - \vartheta)\vartheta. \tag{2.10}$$

Граничное условие на поверхности цилиндра $\eta = 1$ (1.11) перейдет в

$$\tau = \tau_0. \tag{2.11}$$

3. Рассмотрим вариант, когда пластический фронт движется быстрее упругой поперечной волны. О возможности его существования говорилось выше. Среда за ударной волной находится в упругом состоянии, при $\xi = \xi_p$ условие пластичности выполняется только за счет продольного поля т.е. $\tau = 0$. В области $\xi \leqslant \xi_p$ среда находится в пластическом состоянии. Упругие поперечные волны в данной ситуации не возникают вовсе $\xi_b = b/c < \xi_p$. Действительно, пусть

$$\vartheta < \sqrt{3m}, \tag{3.1}$$

тогда из условия пластичности (2.7) при $\tau = 0$ для координаты пластического фронта, согласно (2.8) имеем

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt[4]{4m^2 - \vartheta^2/3}}. \qquad (3.2).$$

Значит, поперечная волна отсутствует, если выполняется условие

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 > \sqrt{4m^2 - \vartheta^2/3}. \qquad (3.3)$$

Условие того, что упругая поперечная волна будет позади ударной (2.2), как нетрудно видеть, вытекает из соотношений (3.1), (3.3). Таким образом, само существование описанного режима распространения волн определяется этими неравенствами. Опишем решение во всей области за ударным фронтом. Как уже отмечалось при $\xi_p < \xi \leqslant \xi_*$ в нашем случае $w = \tau = 0$, во всей возмущенной области v определяется соотношением (2.4), s_r находится из (2.8). Для отыскания σ имеем (2.5) с граничным условием (2.10). Значит, в этом интервале задача однозначно разрешима. Для отыскания τ в области $1 < \xi \leqslant \xi_p$ имеем уравнение первого порядка

$$n(\xi\tau' + \tau) = \frac{2(1-\xi^2)\tau}{\xi^2\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad (3.4)$$

которое вытекает из (2.6) и (2.7), если последнее переписать в виде

$$w' = \frac{2\tau}{\xi^2\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad (3.5)$$

$$s_r = -\sqrt{1-\tau^2}. \qquad (3.6)$$

Таким образом, в этой области τ определяется из (3.4) с граничным условием (2.11) всюду за исключением точки $\xi = \xi_p$, в которой возникает разрыв — ударная поперечная волна. Из (3.4) следует, что $\tau' < 0$ при $\xi > 1$, с другой стороны $\tau \neq 0$ при конечных ξ. Действительно для малых τпри больших ξ уравнение (3.4) эквивалентно уравнению $\xi\tau' + a\tau = 0$, где $0 < a = \dfrac{1}{n} + 2$, значит $\tau = A\xi^{-a}$ и τ может обращаться в ноль только при $\xi \to \infty$. Продольного разрыва быть не может

$$[\sigma] = 0, \qquad (3.7)$$

так как плотность ρ — постоянна.

Из уравнения (2.5) для известных τ с учетом (3.6) и (3.7) находится σ. Радиальная скорость v по-прежнему определяется (2.4).

Для определения скорости w имеем уравнение (3.5), в качестве граничного берем проекцию условия сохранения импульса на ось z на ударном фронте: $n[\tau] = -(V - v)[w]$, здесь V — скорость ударного фронта, при $\xi > \xi_p$ у нас $\tau = w = 0$, поэтому, принимая во внимание (3.2) и (2.4), получаем граничное условие для w в виде

$$w = \frac{n\xi_p\tau}{1-\xi_p^2}. \qquad (3.8)$$

Рассмотрим наиболее простой случай, аналогично А.Я. Сагомоняну будем считать, что осевые скорости и касательные напряжения τ_{rz} отсутствуют. Будем также считать, что теперь

$$\vartheta > \sqrt{3}m, \quad \sqrt{\vartheta} < \frac{c}{b}. \qquad (3.9)$$

Тогда сразу за ударной волной материал среды находится в пластическом состоянии, $\xi = \xi_p$, поперечная волна поглощена пластической. Так как $\tau = \tau_0 = 0$, из условия текучести (3.6) следует: $s_r = -1$. Радиальное напряжение σ определяется из уравнения (2.5) с помощью (2.10) тем самым решение для этого случая определяется полностью. Отметим, что на поверхности цилиндра $\xi = 1$ напряжение σ равно

$$\sigma(1) = \frac{1}{2}(\vartheta - 1) + \left(\frac{1}{2} + n\right)\ln\frac{1}{\vartheta}. \tag{3.10}$$

Итак, окончательно можем утверждать, что при сделанных ограничениях на параметры (3.1), (3.3) или (3.9), задача расщепляется и сводится к решению независимых дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими условиями, при этом разрешимость ее — однозначная.

4. Рассмотрим асимптотическое разложение в предположении малости параметра n. Напомним, что $n = \tau_s/\rho c^2$, считая его пренебрежимо малым, из (2.5) и (2.10) для σ имеем

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\vartheta + \frac{1}{\xi^2}\right) - \left(1 + \ln\frac{\xi}{\sqrt{\vartheta}}\right). \tag{4.1}$$

Значение v определяется соотношением (2.4) во всей области, s_r (2.8) за ударным продольным фронтом при $\xi < \xi_*$ однозначно, так как v от n не зависит. Граница между упругой и пластической областями по-прежнему задается формулой (3.2) и ее положение от параметра n также не зависит. В пластической области $1 \leqslant \xi \leqslant \xi_p$ согласно (3.4)–(3.6) и (3.8)

$$\tau = w = 0, \quad s_r = -1. \tag{4.2}$$

Итак, во всей возмущенной области, интересующие нас величины, найдены.

Осталось удовлетворить граничному условию (2.11). Отметим вначале следующее обстоятельство. В тонком слое около поверхности цилиндра $\xi = 1$ функция τ будет быстро убывать от $\tau = \tau_0 > 0$ до $\tau = 0$, которое соответствует уже полученному значению. Такое изменение τ вызовет изменение s_r, но не повлияет на величину σ с точностью до $o(n)$, так как в выражение для σ, в соответствии с (2.5), входит интеграл от s_r. Для того, чтобы удовлетворить условию на поверхности цилиндра, построим решение вблизи этой поверхности — решение погранслойного типа [11]. В качестве условия сращивания найденного выше асимптотического решения с погранслойным используем вместо (3.8):

$$w(\infty) = 0. \tag{4.3}$$

Система (3.4)–(3.5) содержит малый параметр при производной. Пользуясь известным приемом найдем ее асимптотическое решение. Пусть

$$\xi = 1 + \nu x, \quad w = \mu u, \tag{4.4}$$

где ν и μ стремятся к нулю вместе с n. Тогда из (3.5) имеем

$$\frac{\mu}{\nu}u' = \frac{2\tau}{(1 + \nu x)^2\sqrt{1 - \tau^2}}.$$

Заметим, что правая часть конечна при малых x и, предполагая то же относительно u', сравнивая порядки правой и левой частей, заключаем

$$\nu = \mu. \tag{4.5}$$

Действуя аналогичным образом, из (3.4) получаем

$$\nu = n. \tag{4.6}$$

Используя соотношения (4.5)–(4.6) для малых ν и μ, имеем

$$\tau' + \frac{4x\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \tag{4.7}$$

$$u' = \frac{2\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}. \tag{4.8}$$

Краевые условия превращаются в

$$\tau = \tau_0 \text{ при } x = 0,$$

$$u = 0 \text{ при } x = \infty. \tag{4.9}$$

Полученные уравнения имеют решения погранслойного типа:

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\tau_0^2} - \sqrt{1-\tau^2} + \ln\left(\frac{\tau_0 + \tau_0\sqrt{1-\tau^2}}{\tau + \tau\sqrt{1-\tau_0^2}}\right)\right),$$

$$u = -2\int\limits_x^\infty \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{1-\tau^2(\eta)}}d\eta. \tag{4.10}$$

При больших x имеем

$$\tau = \tau_1 \exp^{-2x^2}, \quad u = -\tau_1 x^{-1} \exp^{-2x^2}. \tag{4.11}$$

Расчетные зависимости $\tau(x)$ для различных значений τ_0, приведенные на рис. 2, показывают примерно десятикратное убывание τ на интервале (0,1.2], что подтверждает наличие погранслоя.

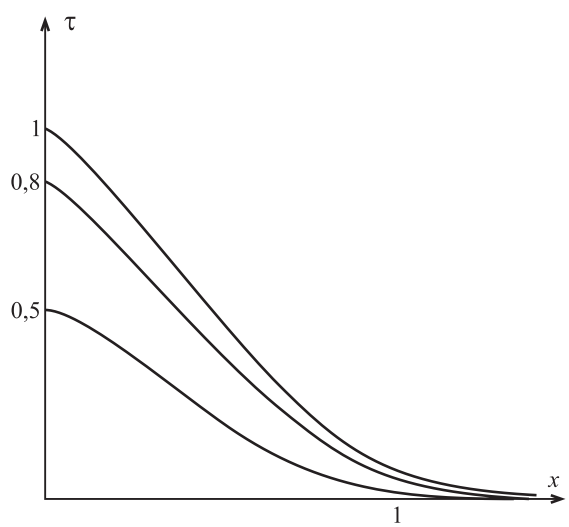

Рис. 2

Результаты численного решения уравнения

$$\frac{d\tau}{dx} = -\left(\frac{2x(2+fx)}{(1+fx)^2\sqrt{1-\tau^2}} + f\right)\frac{\tau}{1+fx}, \quad \tau(0) = 1, \quad x > 0, \tag{4.12}$$

полученного из (3.4) заменой: $\xi = 1 + fx, \quad n = f^2$, приведенные на рис. 3, показывают, что при $n < 0.25$ для описания поведения τ можно пользоваться асимптотической формулой, соответствующей $n = 0$ со средней ошибкой менее 10%. Вклад девиаторных компонент напряжения в величину σ, следуя (2.5) обозначим

$$\sigma(\tau) = \int_1^{\xi_p} \sqrt{1-\tau^2}\frac{d\xi}{\xi} + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\xi_p^2} - \vartheta\right). \tag{4.13}$$

Оценивать этот вклад будем при помощи $\delta(f)$

$$\delta(n) = \left|\frac{\sigma(\tau) - \sigma(\tau_1)}{\sigma(\tau)}\right|. \tag{4.14}$$

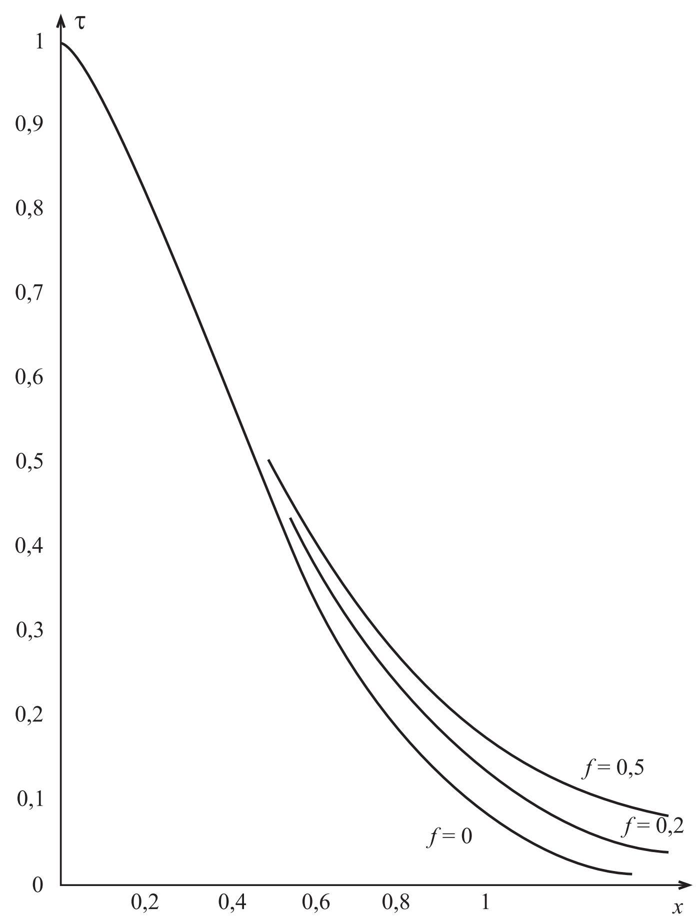

Рис. 3

Численное интегрирование (3.4), которым сопровождалось вычисление $\sigma(\tau)$, выполнялось для различных значений n, $\tau(1)$ принималось равным единице. При вычислении $\sigma(\tau_1)$ значение τ бралось равным нулю, что соответствует его величине вне погранслоя. Расчеты показали, что при $n < 0,25$ ошибка во вкладе девиаторных компонент в значение σ на поверхности цилиндра будет менее 6%.

Рассмотрим теперь случай

$$n \gg 1. \tag{4.15}$$

При этом будем считать, что выполняется условие (3.1). Условие (4.15) справедливо при относительно малой скорости расширения цилиндра c и можно считать режим движения близким к квазистатическому. Аналогичные задачи при $\tau_0 = 0$ для среды Прандтля–Рейсса решены Р. Хиллом [6], а для среды Сен–Венана–Мизеса рассматривались А.Г. Багдоевым [3]. Здесь предполагается, что $\tau_0 > 0$. В соответствии с условиями (3.1) и (4.15) расположение зон будет следующим. При $\xi > \dfrac{1}{\sqrt{\vartheta}}$ среда невозмущенна, находится в состоянии покоя. Далее, при $\xi_b \leqslant \xi \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\vartheta}}$ имеем продольное поле, в котором $w = \tau = 0$, а s_r дается формулами (2.8). За продольной волной при $\xi_p \leqslant \xi \leqslant \xi_b$ располагается зона упругой поперечной волны, здесь продольная часть поля описывается точно также, как и раньше через ξ_b обозначено

$$\xi_b = \frac{b}{c} > 1, \tag{4.16}$$

что следует из (4.15) и условия $m = \dfrac{\tau_s}{G} \ll 1$. Скорость цилиндрической поперечной волны, распространяющаяся в направлении радиуса, направленная вдоль оси z, как известно, выражается

$$w = A\ln(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}), \qquad \varsigma = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}\xi}. \tag{4.17}$$

Здесь A — константа, подлежащая определению. Отсюда на основании (2.8) имеем

$$\tau = -\frac{c}{2bm} A \sqrt{\varsigma^2 - 1}. \tag{4.18}$$

На фронте поперечной волны $\xi = \xi_b$ $(\varsigma = 1)$ функции w и τ непрерывны. На границе пластической зоны $\xi = \xi_p$ ставятся условия

$$[I(S)] = 0, \tag{4.19}$$

$$[\tau] = 0, \tag{4.20}$$

$$[w] = 0. \tag{4.21}$$

По-прежнему, σ предполагается непрерывным, v задается (2.4). Константа A в (4.17) определяется из (4.18) при помощи известного значения $w = w(\xi_p)$ со стороны пластической зоны. Она располагается в интервале $1 \leqslant \xi \leqslant \xi_p$ и описывается уравнениями (3.4)–(3.6). Как и раньше скорость v определяется формулой (2.4), σ находится из уравнения (2.5) с учетом непрерывности σ при $1 \leqslant \xi < \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}$. Точка ξ_p может быть найдена из условия пластичности и других условий.

Теперь в предположении выполнения условия (4.15) построим асимптотическое решение. Для этого будем поступать следующим образом. Вначале опишем алгоритм построения решения. Первым делом при помощи (3.4), (2.11) находим τ. Далее из (4.19)–(4.20) и (2.8) определяется ξ_p. Затем по найденному τ из (2.5) и первому соотношению в (2.7) определяется σ. Зная A, имеем w в зоне упругой поперечной волны. После этого с помощью (4.21) из второго соотношения (2.7), заканчивая решение, легко вычислить w в пластической области. При выполнении условия (4.15) можно выразить τ из уравнения (3.4):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\xi} + \frac{1}{n} T(\xi), \qquad T(\xi) = \frac{2\tau_0}{\xi} \int_1^{\xi} \frac{(1 - \eta^2)}{\eta^2 \sqrt{\eta^2 - \tau_0^2}} d\eta. \tag{4.22}$$

Как было сказано выше следующий шаг — нахождение ξ_p

$$\xi_p^2 = \frac{1}{2m\sqrt{1-\tau^2(\xi_p)-\vartheta}}. \tag{4.23}$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение для определения ξ_p. Приближенно с учетом (4.15)

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt{2m}} = \sqrt{\frac{G}{2\tau_s}}. \tag{4.24}$$

Выражение для σ на поверхности цилиндра $\xi = 1$ будет иметь вид

$$\sigma(1) = \frac{1}{2}\left(1 - \vartheta - \ln\frac{1}{\vartheta} + \frac{n}{m}(\vartheta - \frac{1}{\xi_p^2} - \vartheta\ln\frac{\xi_p^2}{\vartheta}) + 4n\int\limits_0^{\xi_p}\sqrt{1-\tau^2}\frac{d\xi}{\xi}\right). \tag{4.25}$$

Скорость w согласно (4.17), (4.20)–(4.21), с учетом того, что

$$\varsigma_p^2 = \frac{b^2}{c^2\xi_p^2} \approx 2n,$$

выражается так: $w(\xi_p) = -2m\ln n$. Тогда на поверхности цилиндра будет

$$w(1) = -2(1 + m\ln n). \tag{4.26}$$

Сравнение асимптотического решения с решением задачи в полной постановке, изложенным выше, полученным численно показывает, что ошибка $\sigma(1)$ не превосходит 5%, при $n > 2.5$ асимптотическое решение достаточно близко к точному.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-0245а).

Литература

[1] Сагомонян, А.Я. Проникание газовой струи в грунт / А.Я. Сагомонян // Вестник Моск. Ун-та. Сер.матем. мех. – 1979. – №5. – С. 60–64.

[2] Багдоев, А.Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды / А.Г. Багдоев. – Ереван, Изд-во АН Арм ССР, 1961. – 267 с.

[3] Колесников, В.А., Автомодельная задача о расширяющемся и движущемся вдоль своей оси цилиндре, окруженном упругопластической средой / В.А. Колесников, Л.М. Флитман // Сб. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. – Ереван. – 1984. – С. 175–176.

[4] Кукуджанов, В.Н. Ударные волны в уплотняющейся вязкопластической среде / В.Н. Кукуджанов // Изв.АН Арм ССР. Сер. физ. матем. – 1958. – №6. – С. 61–72.

[5] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.

[6] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

[7] Колесников, В.А. Косой удар по поверхности упругопластического полупространства / В.А. Колесников // Известия АН СССР. МТТ. – 1981. – №6. – С. 71–76.

[8] Скобеев, А.М. О плоской упругопластической волне / А.М. Скобеев // ПММ. – 1965. – Т. 29. – Вып. 3. – С. 509–515.

[9] Ковшов, А.Н. О двух задачах динамики грунта при сильных нагрузках / А.Н. Ковшов // Инж. ж. МТТ. – 1968. – №5. – С. 184–189.

Поступила в редакцию 21/*II*/2007;
в окончательном варианте — 21/*II*/2007.

WAVE FIELD IN THE EXTERIOR OF A MOVING CYLINDER IN ELASTOPLASTIC MEDIUM

© 2007 V.A. Kolesnickov[2]

The propagation of cylindrical waves radiated by a cylinder expanding and moving along its axis in elastoplastic medium is studied. In the paper the elastoplastic medium with shear characteristics described by Saint-Venant-Mises formulas is considered. Asymptotic representation of the problem solution for various material parameters is discussed in details. The solution of a boundary layer type is used in a vicinity of cylindrical surface. The limits of applicability of asymptotic expansion are found.

Paper received 21/*II*/2007.
Paper accepted 21/*II*/2007.

[2]Kolesnickov Vladimir Alekseevich, Laboratory of Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia.