

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОГРАНСЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ УСЛОВНОГО ФРОНТА ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

© 2007 В.А. Ковалев<sup>1</sup>; О.В. Таранов<sup>2</sup>

Изучаются вопросы применения асимптотических методов для исследования нестационарного напряженно-деформируемого состояния при ударных нагрузках нормального типа на торец полуполосы. Проведен анализ решения на основе приближенных асимптотических уравнений, полученных символическим методом Лурье и точного решения трехмерных уравнений упругости, найденных с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Показано, что для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в полуполосе асимптотически главные составляющие решения по точной и приближенной теориям совпадают.

Ряд важных узлов и деталей современных технических устройств работает в резко нестационарных режимах вследствие быстрого изменения во времени действующих на них внешних сил. При этом в конструкциях возникают динамические напряжения, которые должны учитываться при оценке прочности и работоспособности, а также выборе оптимальных параметров для функционирования тех или иных упругих элементов. Одним из наиболее актуальных вопросов являются задачи, связанные с расчетом пластин и оболочек на динамические воздействия. Поскольку нахождение точного аналитического решения или численного решения соответствующих трехмерных задач сопряжено с почти непреодолимыми трудностями, вопрос о построении приближенных методов расчета во многих случаях имеет важнейшее значение. Асимптотические методы позволяют получить приближенные уравнения и осуществлять далее их теоретический и численный анализ. При этом часто остается открытым вопрос соответствия приближенных и точных решений задачи.

В данной работе на примере для бесконечной упругой полуполосы (полубесконечной упругой пластины) проведено сравнение точного и приближенного асимптотического решений, найденных для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея.

Рассмотрим трехмерную плоскую задачу для бесконечной упругой полуполосы (рисунок) при ударной торцевой нагрузке.

<sup>1</sup>Ковалев Владимир Александрович (kovalev@migm.ru) кафедра математических и информационных основ управления Московского городского университета управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

<sup>2</sup>Таранов Олег Викторович (mgupi@mail.ru) кафедра теоретической механики Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107475, Россия, г. Москва, ул. Стромьнка, 20.

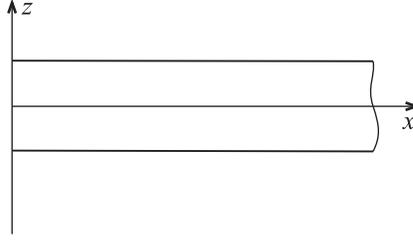


Рисунок. Полубесконечная упругая полуполоса

Введем следующие безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}.$$

Здесь  $c_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)\rho}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$  — скорости волн расширения и сдвига;  $\kappa = \frac{c_2}{c_1}$ ;  $x, z$  — продольная и нормальная координаты;  $t$  — время;  $h$  — полутолщина полосы;  $E, \nu, \rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки;  $u_1, u_3$  — перемещения в направлении осей  $x$  и  $z$ .

Примем, что на торце  $\xi = 0$  задано следующее граничное условие, которое соответствует торцевому воздействию нормального типа:

$$\frac{\partial u_3}{\partial \xi} = IH(\tau), \quad u_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь  $H(\tau)$  — единичная функция Хевисайда,  $I$  — амплитуда нагрузки. Рассматриваем однородные начальные условия при  $\tau = 0$

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = 0, \quad (i = 1, 3) \quad (2)$$

и примем, что лицевые поверхности свободны от напряжений

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0. \quad (3)$$

## Асимптотический анализ точного решения задачи

Осуществим сначала анализ точного решения трехмерных уравнений упругости, найденных с помощью применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье.

Уравнения движения в безразмерном виде имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения закона Гука записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Применяем интегральное преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по продольной координате

$$u_1^{LS} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v_1^L \sin \chi \xi \, d\xi, \quad u_3^{LC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v_3^L \cos \chi \xi \, d\xi, \quad (6)$$

где через переменную  $s$  обозначим параметр преобразования Лапласа по временной переменной.

Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных изображений

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_1^{LS}}{d\zeta^2} - (\kappa^{-2} \chi^2 + s^2) u_1^{LS} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{du_3^{LC}}{d\zeta} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \chi \frac{du_1^{LS}}{d\zeta} + \kappa^{-2} \frac{d^2 u_3^{LC}}{d\zeta^2} - (\chi^2 + s^2) u_3^{LC} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{I}{s}.\end{aligned}\quad (7)$$

Со следующими граничными условиями при  $\zeta = \pm 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_3^{LC}}{d\zeta^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi u_1^{LS} &= 0, \\ -\chi u_3^{LC} + \frac{du_1^{LS}}{d\zeta} &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Запишем решение однородной системы, соответствующей системе дифференциальных уравнений (7), в гиперболических функциях:

$$\begin{aligned}u_1^{LS} &= -\frac{\chi}{\alpha} (D_1 \operatorname{sh} \alpha \zeta + D_2 \operatorname{ch} \alpha \zeta) - \frac{\beta}{\chi} (D_3 \operatorname{sh} \beta \zeta + D_4 \operatorname{ch} \beta \zeta), \\ u_3^{LC} &= D_1 \operatorname{ch} \alpha \zeta + D_2 \operatorname{sh} \alpha \zeta + D_3 \operatorname{ch} \beta \zeta + D_4 \operatorname{sh} \beta \zeta,\end{aligned}\quad (9)$$

где  $D_i$  — постоянные интегрирования,  $\alpha^2 = \chi^2 + k^2 s^2$ ,  $\beta^2 = \chi^2 + s^2$ .

Решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$u_1^{LS} = 0, \quad u_3^{LC} = -\frac{I}{s\beta^2}.\quad (10)$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим соотношение для изображения касательного напряжения  $\sigma_{13}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{13}^{LS} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I\chi}{s\beta^2} \left[ \frac{1}{D_a} \left( \chi^2 \beta^2 \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \operatorname{ch} \alpha \zeta - \gamma^4 \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \operatorname{ch} \beta \zeta \right) + 1 \right], \\ D_a &= \gamma^4 \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \operatorname{ch} \beta - \beta^2 \chi^2 \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \operatorname{ch} \alpha, \quad \gamma^2 = \chi^2 + \frac{1}{2} s^2.\end{aligned}\quad (11)$$

Выражение для изображения перерезывающего усилия  $N_1$  при этом принимает вид

$$N_1^{LS} = \frac{EI}{(1+\nu)h} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\chi}{s\beta^2} \left[ 4 - \frac{s^4}{D_a} \frac{\text{sh } \alpha}{\alpha} \frac{\text{sh } \beta}{\beta} \right]. \quad (12)$$

Найдем приближенное выражение для изображения  $N_1^{LS}$ , определяющего решение в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея. Как известно [1, 2], это решение определяется первым корнем уравнения Релея–Лэмба, а метод перевала позволяет сделать вывод, что его асимптотика задается при  $\chi \rightarrow +\infty$ . Соответствующая асимптотика первого корня уравнения Релея–Лэмба имеет вид

$$\omega_1(\chi) = k_R \chi - B \chi \exp\left(-2\sqrt{1-k_R^2}\chi\right) + B \chi \exp\left(-2\sqrt{1-k^2 k_R^2}\chi\right). \quad (13)$$

Здесь

$$B = 2 \left[ \frac{k_R}{1-k_R^2} + \frac{k^2 k_R}{1-k^2 k_R^2} - \frac{4k_R}{2-k_R^2} \right]^{-1},$$

где  $k_R = \frac{c_R}{c_2} < 1$ ,  $c_R$  — скорость поверхностных волн Релея, частота для первой моды  $\omega_1$  связана с параметром преобразования Лапласа соотношением  $s = \pm i\omega_1$ , а коэффициент  $k_R$  является корнем известного трансцендентного уравнения

$$(2-k_R^2)^2 - 4\sqrt{1-k_R^2}\sqrt{1-k^2 k_R^2} = 0.$$

Преобразуем сначала синус-преобразование Фурье к преобразованию Фурье с экспоненциальным ядром:

$$N_1^{LS} = -iN_1^{LF}. \quad (14)$$

Найдем аппроксимацию знаменателя  $D_a$  в форме, удобной для искомой асимптотики решения в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея

$$D_a \sim K \chi (s^2 + \Omega_1^2) e^\alpha e^\beta, \quad (15)$$

где  $K$  — постоянная величина, а в выражении для  $\Omega_1(\chi)$  по сравнению с  $\omega_1(\chi)$  в соответствии с формулой (13) пренебрегаем членом с множителем  $\exp\left(-2\sqrt{1-k^2 k_R^2}\chi\right)$  по сравнению с членом с множителем  $\exp\left(-2\sqrt{1-k_R^2}\chi\right)$ :

$$\Omega_1 = k_R \chi - B \chi \exp\left(-2\sqrt{1-k_R^2}\chi\right). \quad (16)$$

Найдем значение  $K$  в соотношении (15). Здесь и в дальнейшем будем учитывать тот принцип, что везде, кроме выражения  $s^2 + \Omega_1^2$  в (15), будем учитывать связь между переменными  $s$  и  $\chi$  в виде  $s = ik_R \chi$ . Этим обеспечивается необходимая точность решения: повышение точности выражений необходимо только в показателях степени экспоненты (аргументах тригонометрических функций) в интегралах, обращающих изображения.

Представим  $D_a$  в виде:

$$D_a = \left[ \gamma^4 (1 - e^{-2\alpha})(1 + e^{-2\beta}) - \chi^2 \alpha \beta (1 + e^{-2\alpha})(1 - e^{-2\beta}) \right] \frac{e^{\alpha+\beta}}{\alpha}.$$

Тогда имеем

$$\left. \frac{\partial D_a}{\partial s} \right|_{s=ik_R} = -i\chi^2 \frac{2\sqrt{1-k_R^2}}{B} e^{\alpha+\beta} + \dots$$

С другой стороны, по формуле (15) получаем

$$\left. \frac{\partial D_a}{\partial s} \right|_{s=ik_R} = +iK2k_R\chi^2 e^{\alpha+\beta}.$$

В итоге находим значение величины  $K$

$$K = -\frac{\sqrt{1-k_R^2}}{k_R B}. \quad (17)$$

Следовательно, приближенное выражение для величины  $N_1^{LF}$  можно представить в виде:

$$N_1^{LF} = \frac{EI}{(1+\nu)h} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\chi}{s(s^2+\chi^2)} \left[ 4 + \frac{k_R^5 B \chi}{\sqrt{1-k^2 k_R^2} (1-k_R^2) (s^2+\Omega_1^2)} \right]. \quad (18)$$

## Приближенное решение краевой задачи с помощью асимптотических методов

В работе [3] показано, что решение задачи для полубесконечной пластины может быть представлено в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая является частным решением, которое удовлетворяет граничным условиям на торце (1), но не удовлетворяет граничным условиям на лицевых поверхностях (2)–(3). Обозначим это решение верхним индексом "0":

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= 0, & u_3^{(0)} &= -I(\tau - \xi)H(\tau - \xi), \\ \sigma_{11}^{(0)} &= \sigma_{33}^{(0)} = 0, & \sigma_{13}^{(0)} &= \frac{EI}{2(1+\nu)h} H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (19)$$

Вторая составляющая является решением эквивалентной задачи для бесконечной полосы с симметричной нагрузкой. Для этого решения с верхним индексом (1) на торце и лицевых поверхностях ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : & \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \xi} = 0, & u_1^{(1)} &= 0, \\ \zeta = \pm 1 : & \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0, & \sigma_{13}^{(1)} &= -\frac{EI}{2(1+\nu)h} H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (20)$$

Решение данной краевой задачи осуществляется с помощью символического метода А.И. Лурье [3–5]. Исследуем окрестность условного фронта волны Релея для эквивалентной задачи по приближенным уравнениям, полученным в работе [3].

Если ввести эквивалентную поверхностную нагрузку в виде

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi > 0, \\ -\frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi < 0, \end{cases}$$

то разрешающее уравнение в потенциальных функциях имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - \kappa^2 k_R^2) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} &= 0, \\ (1 - k_R^2) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + 2k_R B \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} &= -\frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S, \\ \zeta = -1 : \quad 2k_R B \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} &= -\frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} &= \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}, \\ \zeta = -1 : \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} &= \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (23)$$

Напряжение  $\sigma_{13}$  выражается через потенциальные функции следующим соотношением

$$\sigma_{13} = \frac{E}{(1 + \nu)h^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \tau} - \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (24)$$

Применяя к краевой задаче интегральные преобразования Лапласа и Фурье, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_i^{LF}}{d\zeta^2} + (1 - k^2 k_R^2) \chi^2 \varphi_i^{LF} &= 0, \\ \frac{d^2 \psi_i^{LF}}{d\zeta^2} + (1 - k_R^2) \chi^2 \psi_i^{LF} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad (s^2 + k_R^2 \chi^2) \psi_1^{LF} - 2k_R B \chi^2 \psi_2^{LF} &= -\frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S^{LF}, \\ \zeta = -1 : \quad -2k_R B \chi^2 \psi_1^{LF} + (s^2 + k_R^2 \chi^2) \psi_2^{LF} &= -\frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S^{LF}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad \frac{\partial \varphi_1^{LF}}{\partial \zeta} &= i \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \chi \psi_1^{LF}, \\ \zeta = -1 : \quad \frac{\partial \varphi_2^{LF}}{\partial \zeta} &= i \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \chi \psi_2^{LF}. \end{aligned} \quad (27)$$

Откуда следует, что выражение для величины  $S^{LF}$  определяется формулой

$$S^{LF} = \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\chi}{s(s^2 + \chi^2)}. \quad (28)$$

Решения для потенциальных функций при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1^{LF} &= \Phi_1 e^{-(1-\zeta) \sqrt{1 - k^2 k_R^2} \chi}, \quad \varphi_2^{LF} = \Phi_2 e^{-(1+\zeta) \sqrt{1 - k^2 k_R^2} \chi}, \\ \psi_1^{LF} &= \Psi_1 e^{-(1-\zeta) \sqrt{1 - k_R^2} \chi}, \quad \psi_2^{LF} = \Psi_2 e^{-(1+\zeta) \sqrt{1 - k_R^2} \chi}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\Phi_i, \Psi_i$  ( $i = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования.

Постоянные величины  $\Psi_i$  найдем из уравнений (26)

$$\begin{aligned} (s^2 + k_R^2 \chi^2) \Psi_1 - 2k_R B \chi^2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \Psi_2 &= -\frac{k_R B}{1-k_R^2/2} S^{LF}, \\ -2k_R B \chi^2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \Psi_1 + (s^2 + k_R^2 \chi^2) \Psi_2 &= -\frac{k_R B}{1-k_R^2/2} S^{LF}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) определим из уравнений (27)

$$\begin{aligned} \sqrt{1-k^2 k_R^2} \Phi_1 &= i \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \chi \Psi_1, \\ -\sqrt{1-k^2 k_R^2} \Phi_2 &= i \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \chi \Psi_2. \end{aligned}$$

Далее получаем, что искомое приближенное выражение для изображения перерезывающей силы можно записать в виде:

$$N_1^{LF} = \frac{EI Q}{(1+\nu) h} \cdot \frac{k_R^5 B \chi^2}{s(s^2 + \chi^2) \left( s^2 + k_R^2 \chi^2 - 2k_R B \chi^2 e^{-2\sqrt{1-k_R^2} \chi} \right)}, \quad (30)$$

где  $Q = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} (1-k_R^2) \sqrt{1-k^2 k_R^2}}$ .

Сравнение изображений (18) и (30) показывает, что в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея, определяемой полюсами  $s = \pm i\Omega_1$ , асимптотически главные составляющие решения по точной и приближенной теориям совпадают.

В заключение отметим, что факт совпадения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в полуполосе асимптотически главных составляющих точного решения и асимптотического решения, подтверждает высокую эффективность предложенного подхода к исследованию напряженно-деформируемого состояния пластин и оболочек.

## Литература

- [1] Нигул, У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек / Л.Я.Айнола, У.К. Нигул // Изв. АН ЭССР. Сер физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – №1. – С. 3–63.
- [2] Петрашень, Г.И. Двумерная задача Лэмба для бесконечно упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями / Г.И. Петрашень // ДАН СССР. – 1949. – Т. 64. – №6. – С. 783–786.
- [3] Ковалев, В.А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки / В.А. Ковалев, Л.Ю. Коссович, О.В. Таранов // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2005. – №5. – С. 89–96.
- [4] Ковалев, В.А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой цилиндрической оболочки при действии торцевой нагрузки / В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №4(54). – С. 197–208.

- [5] Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.

Поступила в редакцию 27/VII/2007;  
в окончательном варианте – 27/VII/2007.

**ANALYSIS OF EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS  
FOR A BOUNDARY LAYER IN A VICINITY OF  
CONDITIONAL FRONT OF THE SURFACE RAYLEIGH  
WAVES IN AN ELASTIC HALF-STRIPE**

© 2007 V.A. Kovalev<sup>3</sup> O.V. Taranov<sup>4</sup>

Problems of application of asymptotic methods to a non-stationary stress-strain state are studied at face effect of normal type on shock of half-stripe. The solution is analysed on the basis of approximate asymptotic equations obtained by the symbolic Lurye method. The exact solution of the 3D elasticity equations found with the help of Laplace and Fourier transforms is analysed. For a boundary layer in a vicinity of conditional front of superficial Rayleigh waves in the half-stripe are shown that the main components of solutions by the exact and approximate theories are asymptotically coincided.

Paper received 27/VII/2007.  
Paper accepted 27/VII/2007.

---

<sup>3</sup>Kovalev Vladimir Alexandrovitch ([kovalev@migm.ru](mailto:kovalev@migm.ru)), Dept. of Mathematical and Informational Grounds of Management, Moscow Municipal University of Management of Moscow Government, Moscow, 107045, Russia.

<sup>4</sup>Taranov Oleg Victorovitch, Dept. of Theoretical Mechanics, Moscow State Industry and Informatics University, Moscow, 107475, Russia