

ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНОМ СЛОЕ, ПОДКРЕПЛЕННОМ ТОНКОЙ ПЛАСТИНОЙ

© 2007 А.В.Белоконь,¹ О.А.Белоконь,² А.И.Болгова³

Изучено влияние действия неравномерной нагрузки в произвольной области на формирование волновых полей и потоков энергии. Для прямоугольной области получены асимптотические формулы для вычисления волновых полей от действия нагрузки, изменяющейся вдоль оси y и постоянной вдоль оси x .

Введение

Рассматривается задача о распространении упругих волн в трехмерном слое, нижняя граница которого закреплена, а на верхней границе лежит без отрыва и трения бесконечная пластина. Предполагается, что нагрузка, действующая на пластину распределена неравномерно в ограниченной области S и осцилирует с частотой Ω .

При решении задачи применяется метод контурного интегрирования [1], принцип предельного поглощения [2], с помощью которых получены асимптотические формулы для определения волновых полей. Решение задачи приводится для прямоугольной области.

1. Постановка задачи

Пусть упругая среда занимает область $\Pi = \{|x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < H\}$. На границе $z = H$ упругой среды расположена бесконечная пластина, лежащая без отрыва и трения. В этом случае требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_1) (\operatorname{div} \underline{u})_{,k} + \mu_1 \Delta u_k &= \rho_1 \ddot{u}_k, & k = 1, 2, 3, \\ \tilde{D} \Delta^2 \tilde{v}_3 + \rho_2 h \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial t^2} &= p(\tilde{x}, \tilde{y}, t) - q(\tilde{x}, \tilde{y}, t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

¹Белоконь Александр Владимирович, НИИ механики и прикладной математики им.Воровича И.И.,кафедра математического моделирования Южного федерального университета, 344090, Россия, г.Ростов-на-Дону, пр.Стачки, 200/1.

²Белоконь Олег Александрович(olegbel@rsu.ru), НИИ механики и прикладной математики им. И.И.Воровича, 344090, Россия, г.Ростов-на-Дону, пр.Стачки, 200/1.

³Болгова Анна Ипполитовна (bolgova@hotmail.ru), кафедра высшей математики Южно-Российского государственного технического университета, 346428, Россия, г.Новочеркасск, ул.Просвещения, 132.

где $\lambda_1, \mu_1, \rho_1, \lambda_2, \mu_2, \rho_2, \nu_2$ — постоянные, соответственно характеризующие слой и пластину, Δ — оператор Лапласа в трехмерной области, Δ^2 — квадрат оператора Лапласа в двумерной области x, y , $\tilde{D} = (\mu_2 h^3) / (6(1 - \nu_2))$.

Граничные условия и условия сопряжения пластины и слоя имеют вид

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \begin{cases} f(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, & (\tilde{x}, \tilde{y}) \in S, \\ 0, & (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin S, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} q(\tilde{x}, \tilde{y}, t) &= \sigma_{33}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t), & \tilde{v}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, t) &= u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t), \\ \sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t) &= 0, & k &= 1, 2, \\ \sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) &= 0, & k &= 1, 2, & u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где S — некоторая ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Рассматривая установившийся режим колебаний, решение системы (1.1) ищем в виде

$$\underline{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e^{i\tilde{\Omega}t}, \quad \tilde{v}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, \quad \sigma_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl} e^{i\tilde{\Omega}t}$$

и вводим безразмерные величины

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tilde{x}}{H}, & y &= \frac{\tilde{y}}{H}, & z &= \frac{\tilde{z}}{H}, & \underline{U} &= \frac{\tilde{U}}{H}, & V &= \frac{\tilde{V}}{H}, \\ \Omega &= \frac{\tilde{\Omega}H}{c_1}, & \xi &= \frac{h}{H}, & D &= \frac{\mu_2 h^3}{6H^3 \mu_1 (1 - \nu_2)}, \\ c &= \frac{c_2}{c_1}, & c_1^2 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, & c_2^2 &= \frac{\mu_1}{\rho_1}, & \mu &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, & \rho &= \frac{\rho_2}{\rho_1}. \end{aligned}$$

Будем искать решение поставленной задачи (1.1)–(1.3), применяя принцип предельного поглощения, который фактически приводит к замене Ω на $\Omega_\varepsilon = \Omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, и при условии $\underline{u}(x, y, z, t) \rightarrow 0$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

В качестве нагрузки, рассматриваем неравномерную нагрузку, заданную в прямоугольнике $|x| < a$, $|y| < b$ четной функцией по y и постоянной по x . Разложив ее в ряд Фурье, получим

$$f(x, y) = p \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right), \quad b = b_1/H.$$

Тогда, очевидно, что в силу линейности задачи достаточно рассмотреть нагрузку вида $f(x, y) = p \cos my$, причем для дальнейшего необязательно, что m совпадает с $n\pi/b$. В этом случае преобразование Фурье от нагрузки имеет вид:

$$F(\alpha, \gamma) = p \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \left(\frac{\sin(m - \gamma)b}{m - \gamma} + \frac{\sin(m + \gamma)b}{m + \gamma} \right) = p\varphi(m, \alpha, \gamma).$$

Применяя к системе дифференциальных уравнений (1.1) и условиям (1.2), (1.3) преобразование Фурье по координатам x и y , и решая полученную систему уравнений с соответствующими граничными условиями, найдем:

$$\begin{aligned} U_{1\varepsilon} &= \frac{p}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \varphi(m, \alpha, \gamma)}{\Delta_\varepsilon} e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma, \\ U_{2\varepsilon} &= \frac{p}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\gamma \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \varphi(m, \alpha, \gamma)}{\Delta_\varepsilon} e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma, \\ U_{3\varepsilon} &= \frac{p}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_{1\varepsilon}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) \varphi(m, \alpha, \gamma)}{\Delta_\varepsilon} e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\ell, \Omega, z) &= -E_1 sh\beta_2 ch\beta_1 z + 2\beta_1 \beta_2 sh\beta_1 ch\beta_2 z, \\ \tilde{C}(\ell, \Omega, z) &= E_1 sh\beta_2 sh\beta_1 z - 2\ell^2 sh\beta_1 sh\beta_2 z, \\ \Delta &= E_1^2 ch\beta_1 sh\beta_2 - 4\ell^2 \beta_1 \beta_2 sh\beta_1 ch\beta_2 - \beta_1 sh\beta_1 sh\beta_2 (D\ell^4 - L^2 \Omega^2) \Omega^2 / 2, \\ \beta_1^2 &= \ell^2 - \Omega^2, \quad \beta_2^2 = \ell^2 - \Omega^2 / c^2, \quad E_1 = 2\ell^2 - \Omega^2 / c^2, \quad \ell^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad L = \rho \xi / c^2.\end{aligned}$$

Окончательное решение рассматриваемой краевой задачи получим из (1.4) с помощью предельного перехода [2]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{U}_\varepsilon = \underline{U}.$$

2. Построение решения вне области действия нагрузки при $x > a$, $y > b$

Подынтегральные выражения, стоящие в формуле (1.4) являются аналитическими функциями параметров α и γ . А решение дисперсионного уравнения $\Delta = 0$ представляет систему конечного числа фигур вращения вокруг оси Ω . Выберем Ω таким, чтобы плоскость $\Omega = \text{const}$ пересекала лишь одну дисперсионную поверхность. В этом случае можно показать, что решение не затухающее при $x, y \rightarrow \infty$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}U_{1\varepsilon} &= A(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(m, \alpha_{0\varepsilon}, \gamma) e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma, \\ U_{2\varepsilon} &= A(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \varphi(m, \alpha_{0\varepsilon}, \gamma)}{\alpha_{0\varepsilon}} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma, \\ U_{3\varepsilon} &= -i(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m, \alpha_{0\varepsilon}, \gamma)}{\alpha_{0\varepsilon}} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma y} d\gamma,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$A(\ell_0, \Omega, z) = \frac{p\ell_0 \tilde{A}(\ell_0, \Omega, z)}{2\pi \partial\Delta/\partial\ell|_{\ell=\ell_0}}, \quad C(\ell_0, \Omega, z) = \frac{p\ell_0 \tilde{C}(\ell_0, \Omega, z)}{2\pi \partial\Delta/\partial\ell|_{\ell=\ell_0}},$$

$$\alpha_{0\varepsilon} = \sqrt{\ell_{0\varepsilon}^2 - \gamma^2}, \quad \ell_{0\varepsilon} = \ell_0 - i\delta, \quad 0 < \delta \ll 1,\tag{2.2}$$

$$\text{Im}\alpha_{0\varepsilon} < 0,\tag{2.3}$$

где ℓ_0 — радиус окружности, полученной в результате сечения плоскостью $\Omega = \text{const}$ первой дисперсионной поверхности $\Omega = \psi(\ell)$, а δ — характеризует смещение полюса $\alpha_{0\varepsilon}$ с вещественной оси в комплексную область и в рассматриваемом случае

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\psi'(\ell_0)}, \quad \psi'(\ell_0) > 0.$$

Для получения асимптотического решения будем применять метод контурного интегрирования. Поскольку подынтегральные функции в интегралах (2.1) неаналитические, так как содержат точки ветвления $\pm\ell_{0\varepsilon}$, то для правильного построения контура, необходимо провести разрез в комплексной плоскости $\gamma = \sigma + i\eta$. Заметим при этом, что разрез нельзя проводить произвольно и легко доказать [3], учитывая неравенство (2.3), что имеет место следующая лемма.

Лемма 1.

Для того, чтобы подынтегральная функция в (2.1) была бы не только аналитической, но и выполнялось условие (2.3) необходимо и достаточно, чтобы в нижней комплексной полуплоскости σ изменялась от 0 до ℓ_0 , а η изменялась бы от $-\infty$ до $-\delta$, где $\gamma = \ell_0 - i\delta$ — точка ветвления подынтегральной функции.

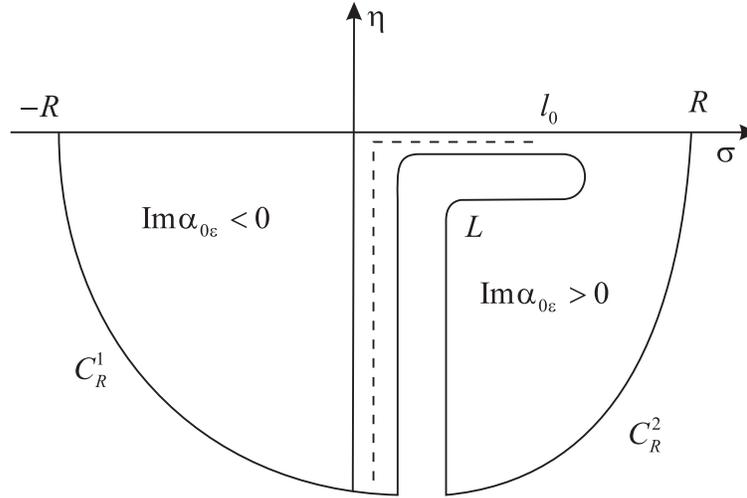


Рис. 1

Из рис. 1 вытекает, что контур интегрирования, внутри которого подынтегральная функция является аналитической, представляет собой петлю L и полуокружность радиуса R . Таким образом, для вычисления интегралов, входящих в формулы (2.1), можно использовать выражение:

$$\int_{-R}^R F(\gamma) d\gamma = - \int_L F(\gamma) d\gamma - \int_{C_R^1} F(\gamma) d\gamma - \int_{C_R^2} F(\gamma) d\gamma.$$

Принимая во внимание, что интегралы по контурам C_R^1, C_R^2 при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, интеграл по контуру L стекается при $\epsilon \rightarrow 0$ на вещественную и мнимую оси (пунктирная линия на фигуре 1), переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow 0$, найдем, что формулы для определения перемещений для $x > a, y > b$ принимают вид:

$$\begin{aligned}
U_1 &\approx -2A(\ell_0, \Omega, z) \left[- \int_0^\infty \varphi(m, \tilde{\alpha}_0, -i\eta) \sin \tilde{\alpha}_0 x \cdot e^{-\eta y} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + i \int_0^{\ell_0} \varphi(m, \alpha_0, \gamma) \sin \alpha_0 x \cdot e^{-i\gamma y} d\gamma \right], \\
U_2 &\approx 2A(\ell_0, \Omega, z) \left[\int_0^\infty \frac{\eta \varphi(m, \tilde{\alpha}_0, -i\eta)}{\tilde{\alpha}_0} \cos \tilde{\alpha}_0 x e^{-\eta y} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\ell_0} \frac{\gamma \varphi(m, \alpha_0, \gamma)}{\alpha_0} \cos \alpha_0 x e^{-i\gamma y} d\gamma \right], \\
U_3 &\approx -2C(\ell_0, \Omega, z) \left[- \int_0^\infty \frac{\varphi(m, \tilde{\alpha}_0, -i\eta)}{\tilde{\alpha}_0} \cos \tilde{\alpha}_0 x e^{-\eta y} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + i \int_0^{\ell_0} \frac{\varphi(m, \alpha_0, \gamma)}{\alpha_0} \cos \alpha_0 x e^{-i\gamma y} d\gamma \right],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\tilde{\alpha}_0 = \sqrt{(\ell_0)^2 + \eta^2}$.

При получении формул (2.4) учтено, что должно выполняться неравенство (2.3).

Найдем асимптотику полученных решений, учитывая, что полубесконечные интегралы, и это легко показать, не дают вклада в поток энергии, если $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$ одновременно. Для оценки интегралов в конечных пределах перейдем к полярной системе координат $x_1 = x - a = r \cos \theta$, $y_1 = y - b = r \sin \theta$ и применим метод стационарной фазы [4]. Определив седловую точку $\gamma_s = \ell_0 \sin \theta$, получим главные члены асимптотических выражений для перемещений:

$$\begin{aligned}
U_1 &= A(\ell_0, \Omega, z) S(r, \ell_0, \theta, m) \cos \theta + O(1/r), \\
U_2 &= A(\ell_0, \Omega, z) S(r, \ell_0, \theta, m) \sin \theta + O(1/r), \\
U_3 &= -i(\ell_0, \Omega, z) S(r, \ell_0, \theta, m)/\ell_0 + O(1/r),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $S(r, \ell_0, \theta, m) = p \sqrt{\frac{2\pi\ell_0}{r}} \varphi(m, \ell_0 \cos \theta, \ell_0 \sin \theta) e^{-i\ell_0(a \cos \theta + b \sin \theta)} e^{-ir\ell_0 + i\pi/4}$.

Аналогично можно получить асимптотические формулы для перемещений в областях $x < -a$, $y > b$, $x > a$, $y < -b$, $x < -a$, $y < -b$. Таким образом, получено асимптотическое решение при $|x| > a$, $|y| > b$.

Используя формулы (2.5), определим поток энергии в слое, проходящий через цилиндрическую поверхность $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r = \text{const}$, который в направлении r при фиксированном θ имеет вид [5]:

$$\tilde{P}_r = \tilde{\Omega}^2 C_g B(U, U)/2, \quad C_g = -\frac{\partial \Delta}{\partial \ell} \Big/ \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega}, \tag{2.6}$$

$$B(U, U) = r \int_0^1 (U_1 \overline{U_1} + U_2 \overline{U_2} + U_3 \overline{U_3}) dz.$$

Из (2.5), (2.6) вытекает, что поток энергии через указанную цилиндрическую поверхность при $r \rightarrow \infty$ будет равен:

$$P_r = -\Omega^2 p^2 \ell_0 \varphi^2(m, \ell_0 \cos \theta, \ell_0 \sin \theta) \left(4\pi^2 \frac{\partial \Delta}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} \right) \times \\ \times \int_0^1 (\ell_0^2 \tilde{A}^2(\ell_0, \Omega, z) + \beta_1^2 \tilde{C}^2(\ell_0, \Omega, z)) dz. \quad (2.7)$$

Таким образом, получена расчетная формула для определения потока энергии в слое в секторе $x > a$, $y > b$. Для получения полного потока, уходящего на бесконечность, проинтегрируем формулу (2.7) по θ от нуля до $\pi/2$ и умножим на четыре:

$$P_r = -\frac{\Omega^2 p^2 \ell_0}{\pi^2 \frac{\partial \Delta}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega}} I(\ell_0, \Omega) \int_0^{\pi/2} \varphi^2(m, \ell_0 \sin \theta, b) d\theta, \quad (2.8)$$

$$I(\ell_0, \Omega) = \int_0^1 (\ell_0^2 \tilde{A}^2(\ell_0, \Omega, z) + \beta_1^2 \tilde{C}^2(\ell_0, \Omega, z)) dz.$$

Переходим теперь к получению асимптотического решения в канале $\Pi = \{x > a, |y| \leq b\}$.

3. Построение решения в канале

$$\Pi = \{x > a, |y| \leq b\}$$

Прежде всего, отметим, что для вычисления асимптотики перемещения внутри канала Π интегралы (2.1) представляются в виде суммы двух интегралов. Например, для $U_{1\varepsilon}$ это представление имеет вид:

$$U_{1\varepsilon} = \frac{1}{i} A(\ell_{0\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^-(\alpha_{0\varepsilon}, \gamma)}{m^2 - \gamma^2} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma(y-b)} d\gamma + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^+(\alpha_{0\varepsilon}, \gamma)}{m^2 - \gamma^2} e^{-i\alpha_{0\varepsilon} x} e^{-i\gamma(y+b)} d\gamma \right], \quad (3.1)$$

$$b^+(\alpha_{0\varepsilon}, \gamma) = (im \sin mb + \gamma \cos mb) \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a}{\alpha_{0\varepsilon}}, \quad (3.2)$$

$$b^-(\alpha_{0\varepsilon}, \gamma) = (im \sin mb - \gamma \cos mb) \frac{\sin \alpha_{0\varepsilon} a}{\alpha_{0\varepsilon}}.$$

Учитывая, что подынтегральные функции в (3.1) содержат точки ветвления, и вычисляя интегралы аналогично предыдущему, найдем при $m > \ell_0$

$$U_1 = 2A(\ell_0, \Omega, z) \left[\pi \frac{\operatorname{sh} \sqrt{m^2 - \ell_0^2} a}{\sqrt{m^2 - \ell_0^2}} \cos my e^{-\sqrt{m^2 - \ell_0^2} x} - \right. \\ \left. - 2i \int_0^{\infty} \frac{b^-(\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{m^2 + \eta^2} e^{-\eta b} \operatorname{ch} \eta y \sin \tilde{\alpha}_0 x d\eta - 2 \int_0^{\ell_0} \frac{b^+(\alpha_0, \gamma)}{m^2 - \gamma^2} e^{-i\gamma b} \cos \gamma y \sin \alpha_0 x d\gamma \right]. \quad (3.3)$$

Аналогично получим формулы для U_2 и U_3 :

$$U_2 = 2A(\ell_0, \Omega, z) \left[\pi m \frac{\operatorname{sh} \sqrt{m^2 - \ell_0^2} a}{m^2 - \ell_0^2} \sin my \cdot e^{-\sqrt{m^2 - \ell_0^2} x} + \right. \\ \left. + 2i \int_0^\infty \frac{\eta b^- (\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{\tilde{\alpha}_0 (m^2 + \eta^2)} e^{-\eta b} \operatorname{sh} \eta y \cos \tilde{\alpha}_0 x d\eta - \right. \\ \left. - 2 \int_0^{\ell_0} \frac{\gamma b^+ (\alpha_0, \gamma)}{\alpha_0 (m^2 - \gamma^2)} e^{-i\gamma b} \sin \gamma y \cos \alpha_0 x d\gamma \right], \quad (3.4)$$

$$U_3 = -2i(\ell_0, \Omega, z) \left[2 \int_0^\infty \frac{b^- (\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{\tilde{\alpha}_0 (m^2 + \eta^2)} \cos \tilde{\alpha}_0 x \operatorname{ch} \eta y \cdot e^{-\eta b} d\eta - \right. \\ \left. - 2i \int_0^{\ell_0} \frac{2b^+ (\alpha_0, \gamma)}{\alpha_0 (m^2 - \gamma^2)} \cos \alpha_0 x \cos \gamma y \cdot e^{-i\gamma b} d\gamma + \right. \\ \left. + \pi \frac{\operatorname{sh} \sqrt{m^2 - \ell_0^2} a}{m^2 - \ell_0^2} \cos my \cdot e^{-\sqrt{m^2 - \ell_0^2} x} \right].$$

Лемма 2. Асимптотическая оценка выражений (3.3), (3.4) при больших значениях x , полученная с помощью метода стационарной фазы имеет вид для $m > \ell_0$:

$$U_1 = 2A(\ell_0, \Omega, z) \sqrt{\frac{2\pi\ell_0}{x}} \frac{\sin mb}{m} \frac{\sin \ell_0 a}{\ell_0} e^{-i(\ell_0 x - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{x}\right), \\ U_2 = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (3.5) \\ U_3 = -2i(\ell_0, \Omega, z) \sqrt{\frac{2\pi}{\ell_0 x}} \frac{\sin mb}{m} \frac{\sin \ell_0 a}{\ell_0} e^{-i(\ell_0 x - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

При этом вклад в асимптотику дают оба интеграла, входящие в выражения для перемещений.

Аналогично можно получить асимптотические формулы для перемещений в канале $\Pi_1 = \{|x| \leq a, y > b\}$, которые при $y \rightarrow \infty$ будут убывать не медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{y}}$. Последнее обстоятельство вместе с асимптотикой (3.5) позволяет утверждать, что в каналах Π и Π_1 поток энергии на бесконечности равен 0. Такой же вывод можно сделать и для каналов $|x| \leq a, y < -b$ и $x < -a, |y| \leq b$. Таким образом можно утверждать, что формула (2.8) определяет полный поток энергии, уходящей на бесконечность.

Переходим теперь к изучению случая $m < \ell_0$. Тогда точки $\gamma = \pm m$ являются особыми, но их нельзя окружить окружностью малого радиуса, внутри которой функция была бы аналитической везде за исключением этих точек. В этом случае контур интегрирования для вычисления интеграла следует изменить. Поясним выбор контура интегрирования на примере вычисления первого интеграла в формуле (3.3) в канале при $y \leq b$. Контур интегрирования изображен на рис. 2.

Вначале он расположен на вещественной оси от $-R$ до $-m - \Delta$ ($\Delta > 0$, $-m - \Delta$ — особая точка подынтегральной функции), затем контур выходит в комплексную плоскость на кривую β , проходящую через точки: $-m - \Delta$, a , b , $-m + \Delta$. Далее

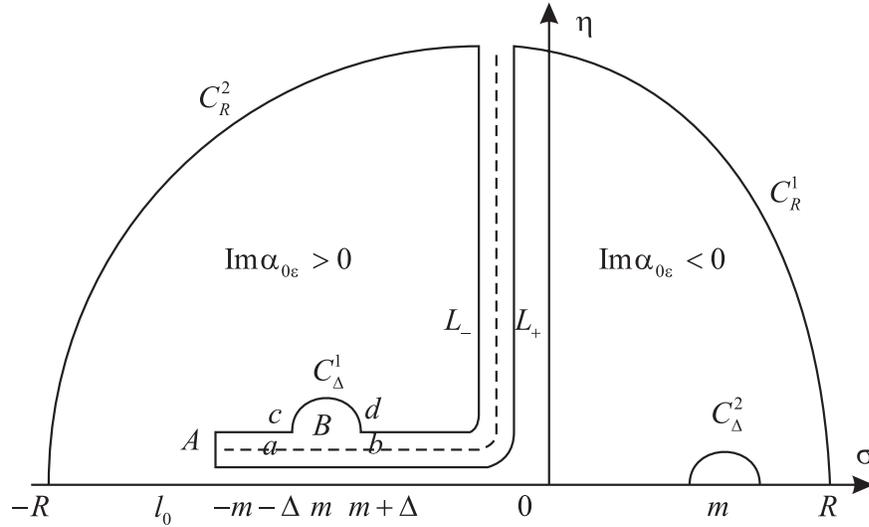


Рис. 2

контур интегрирования снова проходит по вещественной оси, обходит точку m по полуокружности C_{Δ}^2 и дальше идет по вещественной оси до точки R . Затем контур переходит в комплексную область: идет по полуокружности C_R^1 до разреза, спускается по берегу разреза L_+ до точки ветвления A и переходит на берег разреза L_- . Далее контур проходит по берегу разреза L_- и обходит по кривой C_{Δ}^1 точку B , которая при $\epsilon \rightarrow 0$ смещается на вещественную ось в точку $\sigma = -m$. Затем контур проходит по берегу разреза до полуокружности C_R^2 и по полуокружности C_R^2 до $-R$. Все деформации контура возможны в силу того, что подынтегральная функция аналитическая внутри области, ограниченной контуром. Интеграл, вычисляемый по контуру (рис. 2), принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) d\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(- \int_{\beta} F(\gamma) d\gamma - \int_{C_R^1} F(\gamma) d\gamma - \int_{L_+} F(\gamma) d\gamma - \int_{L_-} F(\gamma) d\gamma - \int_{C_R^2} F(\gamma) d\gamma \right) + \int_{C_{\Delta}^1} F(\gamma) d\gamma + \int_{C_{\Delta}^2} F(\gamma) d\gamma. \quad (3.6)$$

Заметим, что при таком обходе контура путь ab по L_+ обходится в прямом и обратном направлении, а путь cd по L_- вообще не проходится. Кроме того, при стремлении $\epsilon \rightarrow 0$ разрез L стекается соответственно на вещественную и мнимую

оси и, таким образом, при $R \rightarrow \infty$, а $\varepsilon, \Delta \rightarrow 0$ формула (3.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) d\gamma = & - \int_{-\infty}^0 f(i\eta) e^{-i\tilde{\alpha}_0 x} i d\eta - \\ & - v.p. \int_0^{-\ell_0} f(\sigma) e^{-i\alpha_0 x} d\sigma - v.p. \int_{-\ell_0}^0 f(\sigma) e^{i\alpha_0 x} d\sigma - \\ & - \int_0^{\infty} f(i\eta) e^{i\tilde{\alpha}_0 x} i d\eta + \pi i \operatorname{Res} F(\gamma)|_{\gamma=-m} + \pi i \operatorname{Res} F(\gamma)|_{\gamma=-m}, \end{aligned}$$

где $F(\gamma) = f(\gamma) e^{-i\alpha_0(\gamma)x}$.

Таким образом, из изложенного выше вытекает

Теорема 1 Компоненты перемещений при $x > a, |y| \leq b$ для $m < \ell_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 = & -2A(\ell_0, \Omega, z) \left[2i \int_0^{\infty} \frac{b^-(\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{m^2 + \eta^2} \sin \sqrt{\ell_0^2 + \eta^2} x \cdot e^{-\eta b} \operatorname{ch} \eta y d\eta + \right. \\ & + 2v.p. \int_0^{\ell_0} \frac{b^+(\alpha_0, \gamma)}{m^2 - \gamma^2} \sin \alpha_0 x \cdot e^{-i\gamma b} \cos \gamma y d\gamma - \\ & \left. - \pi \frac{\sin \sqrt{\ell_0^2 - m^2} a}{\sqrt{\ell_0^2 - m^2}} \cos my \cdot \cos \sqrt{\ell_0^2 - m^2} x \right], \\ U_2 = & 2A(\ell_0, \Omega, z) \left[2i \int_0^{\infty} \frac{\eta b^-(\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{\tilde{\alpha}_0 (m^2 + \eta^2)} e^{-\eta b} \operatorname{sh} \eta y \cos \tilde{\alpha}_0 x d\eta - \right. \\ & - 2v.p. \int_0^{\ell_0} \frac{\gamma b^+(\alpha_0, \gamma)}{\alpha_0 (m^2 - \gamma^2)} e^{-i\gamma b} \sin \gamma y \cos \alpha_0 x d\gamma - \\ & \left. - \pi \frac{m \sin \sqrt{\ell_0^2 - m^2} a}{\ell_0^2 - m^2} \sin my \cdot \sin \sqrt{\ell_0^2 - m^2} x \right], \quad (3.7) \\ U_3 = & -2C(\ell_0, \Omega, z) \left[2i \int_0^{\infty} \frac{b^-(\tilde{\alpha}_0, i\eta)}{\tilde{\alpha}_0 (m^2 + \eta^2)} \cos \tilde{\alpha}_0 x e^{-\eta b} \operatorname{ch} \eta y d\eta + \right. \\ & + 2v.p. \int_0^{\ell_0} \frac{b^+(\alpha_0, \gamma)}{\alpha_0 (m^2 - \gamma^2)} \cos \alpha_0 x \cos \gamma y \cdot e^{-i\gamma b} d\gamma + \\ & \left. + \frac{\pi \sin \sqrt{\ell_0^2 - m^2} a}{\ell_0^2 - m^2} \cos my \sin \sqrt{\ell_0^2 - m^2} x \right], \end{aligned}$$

где интеграл, имеющий особенность на вещественной оси, понимается в смысле главного значения по Коши.

Если сравнить формулы (3.3), (3.4) и (3.7), то видно, что их отличие заключается лишь в том, что свободный член в формулах (3.3), (3.4) экспоненциально затухает на бесконечности, а в формулах (3.7) свободный член ограничен при $x \rightarrow \infty$. Кроме того, интегралы в конечных пределах понимаются в смысле главного значения по Коши. При этом в результате численного анализа показано, что

эти интегралы выходят на асимптотику, совпадающую с противоположным знаком со свободными членами формул (3.7). Из предыдущего с помощью метода стационарной фазы можно доказать, что имеет место

Лемма 3. Пусть $m < \ell_0$, тогда асимптотика решения внутри канала Π имеет вид (3.4).

Замечание. Асимптотические выражения для компонент перемещений при $m=0$ могут быть получены предельным переходом и совпадают с асимптотикой, полученной в работе [4] для равномерно распределенной нагрузки.

Из лемм 2, 3 и замечания вытекает следующая теорема.

Теорема 2 В случае $m = \pi/b$ главный член асимптотики решения внутри канала $x > a$, $|y| < b$, $0 < z < 1$ определяется нулевым коэффициентом разложения нагрузки в ряд Фурье, а остальные коэффициенты дают вклад в решение порядка $O(1/x)$.

4. Вычисление потока энергии при действии нагрузки в произвольной области

Пусть нагрузка задана в области S , тогда очевидно, что перемещения в слое будут определяться при помощи формул (1.4), где вместо $p\varphi(\alpha, \gamma)$ стоит функция

$$F(\alpha, \gamma) = \iint_S f(x, y) e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} dS.$$

Если заключить область S в прямоугольник со сторонами a, b и учесть, что из результатов работы [6] следует, что однородное решение в каналах будет иметь асимптотику, аналогичную полученной для прямоугольника. И поскольку поток энергии в каналах вычисляется при помощи однородных решений, то он будет равен 0. Отсюда следует, что имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Полный поток энергии от произвольной нагрузки в области S можно вычислить с помощью формулы

$$P_r = -\frac{\Omega^2 \ell_0 I(\ell_0, \Omega)}{\pi c^2 \partial \Delta / \partial \ell \cdot \partial \Delta / \partial \Omega} \int_0^{\pi/2} F(\ell_0 \cos \theta, \ell_0 \sin \theta, b) \bar{F}(\ell_0 \cos \theta, \ell_0 \sin \theta, b) d\theta,$$

$$I(\ell_0, \Omega) = \int_0^1 (\ell_0^2 \tilde{A}^2(\ell_0, \Omega, z) + \beta_1^2 \tilde{C}^2(\ell_0, \Omega, z)) dz.$$

5. Численные результаты

Анализ численных результатов показал, что наличие пластины малой толщины на слое мало влияет на поведение дисперсионных поверхностей. Так, например, при отношении $\mu = 5,147$, $\rho = 8,743$ (пластина — вольфрам, слой — плавленный кварц) и $\Omega = 0,5$ — $l_0 = 0,555$. Если же $\mu = 0,383$, $\rho = 0,259$ (пластина — плавленный кварц, слой — сталь) и $\Omega = 0,5$, тогда $l_0 = 0,553$. Вместе с тем, поток энергии от неравномерно распределенной нагрузки значительно отличается от действия сосредоточенной силы. На рис. 3 построен график потока энергии от первой ($m = \pi/b$)

гармоники, а на рис. 4 – от второй ($m = 2\pi/b$). Наконец, на рис. 5 приведем график потока энергии для области, образованной пересечением двух окружностей: $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

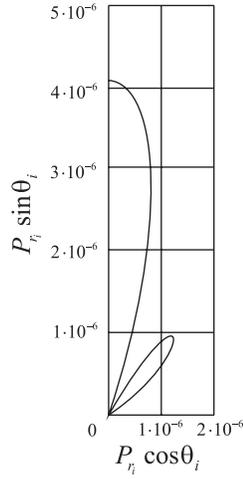


Рис. 3

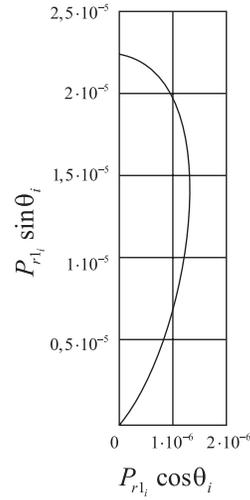


Рис. 4

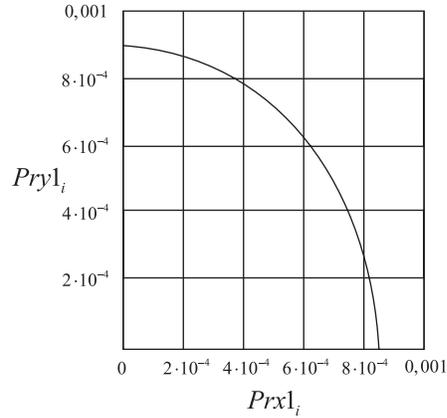


Рис. 5

Заключение

Впервые изучено влияние неравномерно распределенной по прямоугольнику нагрузки на формирование волновых полей и потоков энергии в трехмерном слое, подкрепленном тонкой пластиной. При этом в трехмерном слое получены асимптотические формулы поведения решения на бесконечности, позволившие вычислить поток энергии, переносимый от источника возмущений на бесконечность; определено, что в канале $x > a$, $|y| < b$ в случае нагрузки, задаваемой четной функцией, асимптотика перемещений на бесконечности убывает как $(1/x)$, а поток энергии не распространяется. Кроме того, получены формулы для вычисления потока энергии от произвольной нагрузки, приложенной в произвольной области S .

Литература

- [1] Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
- [2] Свешников, А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 80. – №3. – С 1011–1013.
- [3] Белоконь, О.А. Применение метода контурного интегрирования в задачах о распространении волн в анизотропной полуплоскости. автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.А. Белоконь. – Краснодар, 2001.
- [4] Фелсен, Л. Излучение и рассеяние волн / Л. Фелсен, Н. Маркувиц. – М.: 1978. – Т. 2. – 547 с.
- [5] Белоконь, А.В. Особенности распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой / А.В. Белоконь, А.И. Болгова // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2005. – №2. – С. 31–35.
- [6] Белоконь, А.В. Собственные и присоединенные собственные функции в задаче о распространении упругих волн в анизотропном неоднородном по глубине слое / А.В. Белоконь // Известия АН России. Механика твердого тела. – 2000. – №3. – С. 11–19

Поступила в редакцию 2/VII/2007;
в окончательном варианте — 2/VII/2007.

WAVES IN THREE-DIMENSIONAL LAYER WITH A THIN PLATE ON THE TOP

© 2007 A.V. Belokon,⁴ O.A. Belokon,⁵ A.I. Bolgova⁶

The paper is devoted to a study of the influence of the effect of irregularly distributed load in arbitrary area to the forming wave fields and energy flow. For rectangular area asymptotic formulas for evaluation of wave fields forming from effect of the load which changes along the Y axis and is constant along the X axis are given.

Paper received 2/VII/2007.

Paper accepted 2/VII/2007.

⁴Belokon Alexandr Vladimirovich (olegbel@rsu.ru), Research Institute of Mechanics and Applied Mathematics, Department of Mathematical Modeling, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

⁵Belokon Oleg Alexandrovich (olegbel@rsu.ru), Research Institute of Mechanics and Applied Mathematics n.a. I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

⁶Bolgova Anna Ippolitovna (bolgova@hotmail.ru), Dept. of Higher Mathematics Southern, Russia State Technical University, Novocherkassk, 346428, Russia