

## КРИТЕРИИ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПРОЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

© 2007 М.М. Алиев, М.М. Байбурова<sup>1</sup>

В статье рассматриваются критерии кратковременной прочности анизотропных конструкционных материалов, металлов и горных пород и их применение для оценок состояния предельного равновесия. Детально исследуются критерии К.В. Захарова и И.И. Гольденблатта–В.А. Кошнова. Обсуждаются независимые эксперименты, необходимые для идентификации материальных констант (пять констант прочности), входящих в формулировку критерия К.В. Захарова, в случае плоского напряженного состояния. Исследуются общие уравнения пластического плоского деформированного состояния с критерием пластичности в шестиконстантной форме К.В. Захарова.

При определении предельных нагрузок обычно критерий прочности для различных материалов принимается как условие предельного равновесия и используется для решения конкретных задач.

Критерий прочности конструкционных тел представлен К.В. Захаровым в виде полинома второго порядка

$$a_1\sigma_x^2 + a_2\sigma_y^2 + a_3\sigma_z^2 + a_4\sigma_x\sigma_y + a_5\sigma_x\sigma_z + a_6\sigma_y\sigma_z + a_7\sigma_x + a_8\sigma_y + a_9\sigma_z + a_{10}\tau^2 + a_{11}\tau_z^2 + a_{12}\tau_x^2 + a_{13} = 0. \quad (1)$$

В случае плоского напряженного состояния условие прочности в главных напряжениях имеет вид

$$\sigma_1^2 + k_1\sigma_2^2 + k_2\sigma_1\sigma_2 + k_3\sigma_1 + k_4\sigma_2 + k_5 = 0, \quad (2)$$

где  $a_1, a_2, k_1, k_2$  — постоянные коэффициенты, определяющие прочность материалов при различных условиях нагружения.

Критерий (2) после выражения коэффициентов через соответствующие пределы прочности принимает вид [1]

$$\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}\sigma_2^2 + \left[ 1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} + \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\tau_{45}} - \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \left( \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{2p}}{\tau_{45}} \right) - \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\tau_{45}^2} \right] \sigma_1\sigma_2 + (\sigma_{1c} - \sigma_{1p})\sigma_1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} (\sigma_{2c} - \sigma_{2p})\sigma_2 - \sigma_{1p}\sigma_{1c} = 0, \quad (3)$$

<sup>1</sup>Алиев Мехрали Мирзали-Оглы, Байбурова Минсария Мазитовна, кафедра прикладной механики Альметьевского государственного нефтяного института, 423450, Россия, Республика Татарстан, г. Альметьевск, ул. Ленина, 2.

где  $\sigma_{1p}$ ,  $\sigma_{2p}$ ,  $\sigma_{1c}$ ,  $\sigma_{2c}$  — пределы прочности в главных направлениях армирования ( $p$  — растяжение,  $c$  — сжатие),  $\tau_{45}$  — предел прочности при чистом сдвиге, при  $\sigma_1 = \sigma_{1p} = -\sigma_2 = -\sigma_{2c}$ .

Критерий И.И. Гольденבלата–В.А. Кошнова в простейшем виде представляет собой квадратичную форму

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{2\sigma_{1p}\sigma_{1c}}\sigma_1 + \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{2p}}{2\sigma_{2p}\sigma_{2c}}\sigma_2 + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_{1p} + \sigma_{1c}}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}} \right) \sigma_1^2 + \left( \frac{\sigma_{2p} + \sigma_{2c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \right) \sigma_2^2 + \right. \\ & \left. \left[ \left( \frac{\sigma_{1p} + \sigma_{1c}}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{2p} + \sigma_{2c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \right)^2 - \left( \frac{\tau_{45}^+ + \tau_{45}^-}{\tau_{45}^+ \cdot \tau_{45}^-} \right)^2 \right] \sigma_1 \sigma_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tau_{45}^+$  определяется по схеме максимального нагружения (рис. 1), а  $\tau_{45}^-$  — по схеме минимального нагружения (рис. 2).

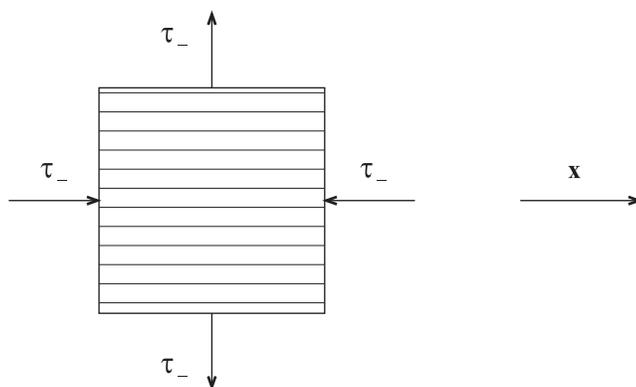


Рис. 1. Чистый сдвиг образца в плоскости  $xu$  по схеме максимального нагружения

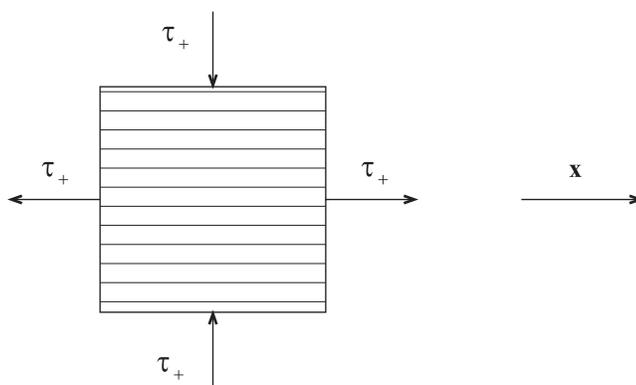


Рис. 2. Чистый сдвиг образца в плоскости  $xu$  по схеме минимального нагружения

При сравнении (3) и (4) очевидно, что в критерий К.В. Захарова (3) входят пять констант, а в критерий И.И. Гольденבלата–В.А. Кошнова (4) — шесть констант. Шестую характеристику определяют для проверки ”условия совместности”

[2]. Для стеклопластиков, предельная линия которых в плоском напряженном состоянии, как обычно, является эллипсом, можно шестую характеристику не определять. Возникает вопрос, какой из пределов прочности при чистом сдвиге ( $\tau_{45}^+$ ,  $\tau_{45}^-$ ) входит в критерий К.В. Захарова. Для объяснения этого в статье рассматриваются две известные теории прочности анизотропных материалов, доказываются связь между ними и совпадение этих критериев не только в плоскости, но и в пространстве главных напряжений. Исследования ведутся на основе сравнения критериев прочности К.В. Захарова [1] и И.И. Гольденבלата–В.А. Копнова [2].

Для определения пяти постоянных прочности, входящих в (2) необходимо пять независимых экспериментов:

- 1) Одноосное растяжение вдоль оси 1, совпадающей с первым главным направлением анизотропии в виде  $\sigma_1 = \sigma_{1p}$ .
- 2) То же самое сжатие в виде  $\sigma_1 = -\sigma_{1c}$ .
- 3) Одноосное растяжение вдоль оси 2, совпадающей со вторым главным направлением анизотропии в виде  $\sigma_2 = \sigma_{2p}$ .
- 4) То же самое сжатие в виде  $\sigma_2 = -\sigma_{2c}$ .
- 5) Чистый сдвиг при  $\sigma_1 = \tau_{45}^+ = \tau_1$ ,  $\sigma_2 = -\tau_{45}^+ = -\tau_1$ .
- 6) Чистый сдвиг при  $\sigma_1 = -\tau_{45}^- = -\tau_2$ ,  $\sigma_2 = \tau_{45}^- = \tau_2$ .

Каждый из последних двух видов испытаний совместно с другими позволяют найти пять постоянных прочности и потому другой из них, является контрольным, позволяющий вывести условие совместности. Результаты первых и вторых видов экспериментов согласно (2) определяют

$$\begin{cases} \sigma_{1p}^2 + k_3\sigma_{1p} + k_5 = 0, \\ \sigma_{1c}^2 - k_3\sigma_{1c} + k_5 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем  $k_3 = \sigma_{1c} - \sigma_{1p}$ ,  $k_5 = -\sigma_{1p}\sigma_{1c}$ .

В результате третьего и четвертого вида экспериментов определим

$$\begin{cases} k_1\sigma_{2p}^2 + k_4\sigma_{2p} + k_5 = 0; \\ k_1\sigma_{2c}^2 - k_4\sigma_{2c} + k_5 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}; \quad k_4 = \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{2p}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}\sigma_{1p}\sigma_{1c}.$$

Пятый вид экспериментов позволяет определить

$$k_2 = 1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{2c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} + \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\tau_1} + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}(\sigma_{2p} - \sigma_{2c})}{\tau_1\sigma_{2p}\sigma_{2c}} - \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1p}}{\tau_1^2}. \quad (5)$$

В результате шестого вида экспериментов эта же постоянная определится в виде

$$k_2 = 1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{2c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} - \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\tau_2} - \frac{\sigma_{1p}\sigma_{2c}(\sigma_{2p} - \sigma_{2c})}{\tau_2\sigma_{2p}\sigma_{2c}} - \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1p}}{\tau_2^2}. \quad (6)$$

Таким образом, критерий прочности К.В. Захарова в условиях плоского напряженного состояния в системе координат, совпадающей с осями симметрии материала, может представиться в виде

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2p}}\sigma_2^2 + \\ & + \left[ 1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \pm \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\tau_{45}} \pm \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \left( \frac{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}{\tau_{45}} \right) - \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\tau_{45}^2} \right] \sigma_1\sigma_2 + \\ & - (\sigma_{1c} - \sigma_{1p})\sigma_1 + \frac{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}(\sigma_{2c} - \sigma_{2p})\sigma_2 - \sigma_{1p}\sigma_{1c} = 0, \end{aligned}$$

где верхний знак принимается если  $\tau_{45} = \tau_{45}^+ = \tau_1$ , а нижний знак — при  $\tau_{45} = \tau_{45}^- = \tau_2$ .

В такой форме критерий всегда совпадает с критерием И.И. Гольденבלата–В.А. Копнова.

Для сравнения (2) и критерия И.И. Гольденבלата–В.А. Копнова, последний критерий в пространстве главных напряжений представим в виде

$$\begin{aligned} & \Pi_{11}\sigma_1 + \Pi_{22}\sigma_2 + \Pi_{33}\sigma_3 + \\ & + [\Pi_{1111}\sigma_1^2 + \Pi_{2222}\sigma_2^2 + \Pi_{3333}\sigma_3^2 + \\ & + 2(\Pi_{1111}\sigma_1\sigma_2 + \Pi_{1133}\sigma_1\sigma_3 + \Pi_{2233}\sigma_2\sigma_3)]^{1/2} = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как в левой части критерия сумма первых трех членов меньше единицы, то, перенеся их в правую часть, получим некоторое алгебраическое выражение больше нуля. Это позволит нам возводить обе части в квадрат без лишних корней и получить критерий в виде

$$\begin{aligned} & (\Pi_{1111} - \Pi_{11}^2)\sigma_1^2 + (\Pi_{2222} - \Pi_{22}^2)\sigma_2^2 + (\Pi_{3333} - \Pi_{33}^2)\sigma_3^2 + \\ & + 2(\Pi_{1122} - \Pi_{11}\Pi_{22})\sigma_1\sigma_2 + 2(\Pi_{1133} - \Pi_{11}\Pi_{33})\sigma_1\sigma_3 + \\ & + 2(\Pi_{2233} - \Pi_{22}\Pi_{33})\sigma_2\sigma_3 + 2\Pi_{11}\sigma_1 + 2\Pi_{22}\sigma_2 + 2\Pi_{33}\sigma_3 = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Для сравнения запишем критерий К.В. Захарова также в пространстве главных напряжений, совпадающих с главными направлениями анизотропии, в следующем виде

$$\begin{aligned} & \Pi_1\sigma_1^2 + \Pi_2\sigma_2^2 + \Pi_3\sigma_3^2 + \Pi_4\sigma_1\sigma_2 + \Pi_5\sigma_1\sigma_3 + \\ & + \Pi_6\sigma_2\sigma_3 + \Pi_7\sigma_1 + \Pi_8\sigma_2 + \Pi_9\sigma_3 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где согласно результатам девяти независимых испытаний

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}; \\ a_4 &= \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}} + \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} + \frac{1}{\tau_{45}^+} + \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}} \frac{\sigma_{2p} - \sigma_{2c}}{\tau_{45}^+} - \frac{1}{(\tau_{45}^+)^2}; \\ a_7 &= \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}, \end{aligned} \quad (10)$$

а остальные постоянные определяются путем круговой подстановки.

При совпадении (7) и (8) в пространстве главных напряжений должны быть выполнены следующие очевидные условия

$$\begin{aligned} \Pi_{1111} - \Pi_{11}^2 &= a_1, \\ 2(\Pi_{1122} - \Pi_{11}\Pi_{22}) &= a_4, \\ 2\Pi_{11} &= a_7, \quad \dots \end{aligned}$$

Для простоты обозначим

$$\frac{1}{\sigma_1^+} = m_1, \quad \frac{1}{\sigma_1^-} = m_2, \quad \frac{1}{\sigma_2^+} = n_1, \quad \frac{1}{\sigma_2^-} = n_2, \quad \frac{1}{\tau_{45}^+} = z_1, \quad \frac{1}{\tau_{45}^-} = z_2.$$

Проверим совпадение  $a_4$  и  $2(\Pi_{1122} - \Pi_{11}\Pi_{22})$ :

$$\begin{aligned} 2(\Pi_{1122} - 2\Pi_{11}\Pi_{22}) &= \\ & - \frac{1}{4} \left[ (m_1 + m_2)^2 + (n_1 + n_2)^2 - (z_1 + z_2)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{4} (m_1 - m_2)(n_1 - n_2). \end{aligned}$$

Согласно "условия совместности" [2] будем иметь

$$z_2 = z_1 - (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2).$$

При этом получим

$$2(\Pi_{1122} - \Pi_{11}\Pi_{22}) = m_1m_2 + n_1n_2 + z_1(m_1 - m_2) - z_1(n_1 - n_2) - z_1^2.$$

Согласно (10) определяем, что  $a_4$  и  $2(\Pi_{1122} - \Pi_{11}\Pi_{22})$  совпадают.

Остальные проверки подтверждают, что критерий К.В. Захарова и И.И. Гольденבלата–В.А. Кошнова в пространстве главных напряжений в виде (7) и (9) также совпадают. Исходя из того, что критерий К.В. Захарова учитывает анизотропные свойства металлов и горных пород, рассмотрим возможность применения этого критерия прочности для решения задач предельного равновесия.

Условие текучести однородного анизотропного тела в виде полинома К.В. Захарова представлено в виде

$$\sigma_x^2 + b_1\sigma_y^2 + b_2\sigma_z^2 + b_3\sigma_x\sigma_y + b_4\sigma_x\sigma_z + b_5\sigma_y\sigma_z + b_6\sigma_x + b_7\sigma_y + b_8\sigma_z + b_9\tau_{xy}^2 + b_{10}\tau_{xz}^2 + b_{11}\tau_{yz}^2 + b_{12} = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \sigma_{xp}\sigma_{xc}/\sigma_{yp}\sigma_{yc}; \\ b_3 &= 1 + \left[ \frac{1}{\sigma_{yp}}\sigma_{yc} + \frac{\sigma_{xc} - \sigma_{xp}}{\tau_{1}\sigma_{xp}\sigma_{xc}} - \frac{\sigma_{yc} - \sigma_{yp}}{\tau_{1}\sigma_{yp}\sigma_{yc}} - \left( \frac{1}{\tau_{1}} \right)^2 \right] \sigma_{xp}\sigma_{xc}; \\ b_6 &= \frac{\sigma_{xp} - \sigma_{xc}}{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}; \quad b_9 = \frac{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}{\tau_{x0}}; \quad b_{12} = -\sigma_{xp}\sigma_{xc}. \end{aligned}$$

$\sigma_{xp}$ ,  $\sigma_{cx}$  и т. д. являются пределами текучести.

Согласно ассоциированному закону течения для деформаций получено

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}; \quad \varepsilon_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}; \quad \varepsilon_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}; \\ \gamma_{xy} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}; \quad \gamma_{xz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}; \quad \gamma_{yz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда находим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda(2\sigma_x + b_3\sigma_y + b_4\sigma_z + b_6); \\ \varepsilon_y &= \lambda(2\sigma_y + b_3\sigma_x + b_5\sigma_z + b_7); \\ \varepsilon_z &= \lambda(2\sigma_z + b_4\sigma_x + b_5\sigma_y + b_8); \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\lambda b_9\tau_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= 2\lambda b_{10}\tau_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= 2\lambda b_{11}\tau_{yz}. \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $\lambda$  — множитель, имеющий размерность 1/Па.

В условиях плоской деформации тела, при совпадении оси  $z$  с одним из главных направлений анизотропии будет иметь место равенство

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Тогда, учитывая, что  $\lambda \neq 0$  из (13) получено

$$\sigma_z = -\frac{1}{2b_2}(b_4\sigma_x + b_5\sigma_y + b_8). \quad (14)$$

Внося (14) в (11) определим

$$\sigma_x^2 + K_1\sigma_y^2 + K_2\sigma_x\sigma_y + K_3\sigma_x + K_4\sigma_y + K_5\tau_{xy}^2 + K_6 = 0, \quad (15)$$

где  $K_1$  зависит от тензоров пластического свойства материала  $b_1$ ,  $b_2$ .

В таком виде (15) представляет собой условие предельного равновесия пластической анизотропной горной породы для плоско деформированного ее состояния.

Разрешающие уравнения для плоской деформации получаются путем введения параметров  $p = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$  и угол  $\alpha$  — как неизвестные. Выражая компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  в некоторой точке через главные нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и тригонометрическую функцию угла  $\alpha$  вводятся следующие параметры:  $\sigma_1 = p + q; \sigma_2 = p - q$ .

Зависимости компонентов напряжений в площадках, проходящих через ось  $z$ , от параметров  $\alpha$  и  $p$  записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p + q \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= p - q \cos 2\alpha, \\ \tau_{xy} &= q \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

тогда из (15) определяем

$$q = -\frac{\Pi_2}{\Pi_1} + \sqrt{\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)^2 - \frac{\Pi_3}{\Pi_1}}, \quad (17)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (K_0 + K_1 - K_2) \cos^2 2\alpha + K_5 \sin^2 2\alpha; \\ \Pi_2 &= [p(K_0 - K_1) + 0,5(K_3 - K_4)] \cos^2 \alpha; \\ \Pi_3 &= (K_0 + K_1 + K_2)p^2 + p(K_3 + K_4) + K_6. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановкой компонентов тензора напряжений (16) в уравнения равновесия получим систему квазилинейных уравнений, которую из-за громоздкости не приводим.

Дифференциальные уравнения характеристик и соотношения на этих характеристиках имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{L_0}{2Q_0} + \sqrt{\left(\frac{L_0}{2Q_0}\right)^2 - \frac{F_0}{Q_0}} \quad (\text{I семейство}), \quad (19)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{L_0}{2Q_0} - \sqrt{\left(\frac{L_0}{2Q_0}\right)^2 - \frac{F_0}{Q_0}} \quad (\text{II семейство}), \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Q_0 &= ab \sin 2\alpha - (1 + b \cos 2\alpha) c; \\ L_0 &= -(1 + b \cos 2\alpha) a + a^2; \\ F_0 &= c(1 - b \cos 2\alpha) + ab \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Соотношения на характеристиках между  $p$  и  $\alpha$  определяются в виде

$$\begin{aligned} dpT_1 - daE_1 &= \gamma l_3 dx - \gamma l_2 dy \quad (\text{I семейство}), \\ dpT_2 - daE_2 &= \gamma l_3 dx - \gamma l_2 dy \quad (\text{II семейство}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= [(l_4 l_8 - l_2 l_5) + (l_3 l_5 - l_4 l_6) \Pi_1]; \\ T_2 &= [(l_4 l_8 - l_2 l_5) + (l_3 l_5 - l_4 l_6) \Pi_2]; \\ E_1 &= E_2 = l_2 l_6 + l_3 l_8; \end{aligned}$$

$l_1, l_2$  — зависимости, являющиеся функциями параметров  $p$  и  $\alpha$ . Величины  $\Pi_1 = \frac{dx}{dy}$  определяется по (19),  $\Pi_2 = \frac{dx}{dy}$  определяется по (20).

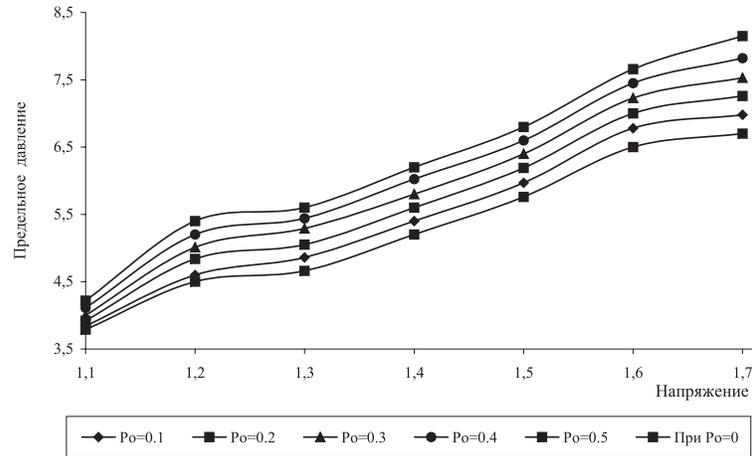


Рис. 3. График зависимости предельного давления от напряжения

На основе произведенных расчетов осуществлено численное решение уравнений характеристик в конечно-разностной форме, построены графики изменения предельного давления  $P_{пр}/\sigma_{2c}$  от напряжения  $\sigma_{1c}/\sigma_{2c}$  (рис. 3).

Графики зависимости предельного давления от напряжения проанализированы, полученные данные сведены в таблицу.

Таблица

Таблица решений разрешающих уравнений

Пригрузка	$p_0 = 0$	$p_0 = 0,5$	$p_0 = 1$	$p_0 = 1,5$	$p_0 = 2$
Касательные напряжения	$\tau$				
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,58 ÷ 0,59	0,58 ÷ 0,59	0,58 ÷ 0,59	0,58 ÷ 0,59	0,58 ÷ 0,59
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,59 ÷ 0,6	0,59 ÷ 0,6	0,59 ÷ 0,6	0,59 ÷ 0,62	0,59 ÷ 0,6
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,61	0,61 ÷ 0,62
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62	0,61 ÷ 0,62
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,62 ÷ 0,63	0,62 ÷ 0,63	0,62 ÷ 0,63	0,62 ÷ 0,63	0,62 ÷ 0,63
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,63 ÷ 0,64	0,63 ÷ 0,64	0,63 ÷ 0,64	0,63 ÷ 0,64	0,63 ÷ 0,64
$\sigma_{1c} = \sigma_{1p} = 1,1$	0,64 ÷ 0,65	0,64 ÷ 0,65	0,64 ÷ 0,65	0,64 ÷ 0,65	0,64 ÷ 0,65

В указанных интервалах разрешающие уравнения имеют решение и относятся к гиперболическому типу.

## Литература

- [1] Захаров, К.В. Критерий прочности для слоистых пластмасс / К.В. Захаров. – Пластмассы. – 1961. – №8. – С. 61–67.
- [2] Сопротивление стеклопластиков / В.Л. Бажанов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1968. – С. 303.
- [3] Малмейстер, А.К. Геометрия теорий прочности / А.К. Малмейстер // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 519–534.

- [4] Гольденблат, И.И. Длительная прочность в машиностроении / И.И. Гольденблат, В.Л. Бажанов, В.А. Копнов. – М., 1977.

Поступила в редакцию 2/VII/2007;  
в окончательном варианте – 2/VII/2007.

## ANISOTROPIC MATERIALS SHORT-TIME STRENGTH CRITERIA AND THEIR APPLICATION TO LIMIT STATE PROBLEMS

© 2007 M.M. Aliev, M.M. Bayburova<sup>2</sup>

In the paper short-time strength criteria for anisotropic constructional materials, metals and rocks and their application to derivation of limit equilibrium state estimates are considered. K.V. Zakharov's and I.I. Goldenblatt–V.A. Kopnov's criteria are analysed in detail. Independent experiments, which are necessary to material constants identification (five strength constants) and used in K.V. Zakharov's criterion formulation are discussed for plane stress state. General equations of plane strain state in the six-constant form due to K.V. Zakhrov's plasticity criterion are analysed.

Paper received 2/VII/2007.  
Paper accepted 2/VII/2007.

---

<sup>2</sup>Aliev Mekhrali Mirzali-Ogli, Bayburova Minsariya Mazitovna, Dept. of Applied Mechanics, Almet'evsk State Petroleum Institute, Almet'evsk, 423450, Russia.