

УДК 539.374

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ¹

© 2007 С.В. Тихонов²

В работе рассматривается упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы предполагается изотропным, неоднородным, сохраняющим значение предела текучести постоянным вдоль линий концентрических эллипсов. Рассмотрено влияние неоднородности на напряженное состояние трубы.

Отметим, что прием определения неоднородных свойств материала на примере концентрических эллипсов может быть распространен на случай различных семейств кривых, вдоль которых предел текучести сохраняет постоянное значение.

Теория пластичности неоднородных сред привлекла внимание широкого круга исследователей [1]. Среди других методов для решения задач теории пластичности неоднородных сред рядом исследователей используется метод малого параметра. В теории пластичности неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела. Обычно используется разложение предела текучести в ряд по некоторому безразмерному параметру, за исходное принимается напряженное состояние при постоянном пределе текучести. В этом направлении выполнены работы [2, 4–6] и др.

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a, b , $a < b$ (рис. 1). Условие пластичности примем в виде:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2, \quad (1)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений в полярной системе координат r, θ ; k — предел текучести при сдвиге.

Положим

$$k = k_0 + \delta \left(\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} \right), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - \text{const}, \quad (2)$$

где δ — малый безразмерный параметр.

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Д.Д. Ивлевым.

²Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru), кафедра математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, 428000, Россия, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38.

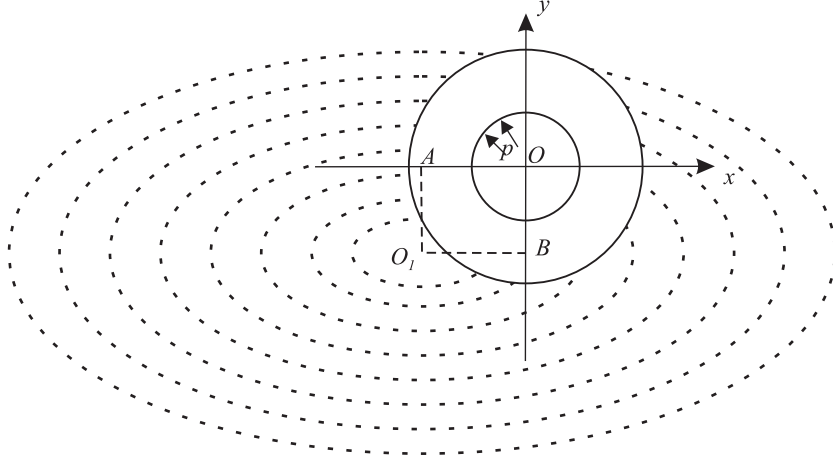


Рис. 1

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы α , β и черту сверху у величин $\bar{a}$, $\bar{b}$, характеризующих неоднородность материала, опустим. Положим

$$\alpha = a/\rho_s^{(0)}, \quad \beta = b/\rho_s^{(0)},$$

где $\rho_s^{(0)}$ — радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2), предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов

$$\frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2} = c, \quad c = \text{const} \quad (3)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c .

Уравнение равновесия в полярной системе координат имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p , а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij}\delta + \sigma''_{ij}\delta^2 + \dots, \quad \rho_s = 1 + \rho'_s\delta + \rho''_s\delta^2 + \dots, \quad (5)$$

где ρ_s — радиус пластической зоны.

В дальнейшем припишем всем компонентам в упругой области индекс "e", в пластической области индекс "p". Все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0 , все линейные размеры будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Из (1), (5), (6) имеет место:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} = -2. \quad (7)$$

Решая совместно (4), (6), (7) получим:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (8)$$

где C — постоянная.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p , внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta} = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует, что

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2k_0 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (10)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - B \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + B \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (11)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}.$$

Согласно (9)–(12) имеем

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (12)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношением:

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - \ln \alpha - p}.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

из (1), (2), (5)–(7) получим в первом приближении

$$k = k_0 + \frac{\delta}{2a^2b^2} \left[(b^2 - a^2)\rho^2 \cos 2\theta + 4Ba^2\rho \sin \theta + 4Ab^2\rho \cos \theta + \right. \\ \left. + (a^2 + b^2)\rho^2 + 2b^2A^2 + 2a^2B^2 \right]. \quad (13)$$

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая:

$$\sigma'_{\rho}{}^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_{\theta}{}^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta}{}^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (14)$$

Из (13), (14) находим, что

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{\rho^2}{a^2 b^2} \left[(b^2 - a^2) \rho^2 \cos 2\theta + 4Ba^2 \rho \sin \theta + \right. \\ \left. + 4Ab^2 \rho \cos \theta + (a^2 + b^2) \rho^2 + 2b^2 A^2 + 2a^2 B^2 \right]. \quad (15)$$

Решение в пластической области имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho} = & C_{00} + \frac{(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \rho^2 - \frac{A^2}{a^2} \frac{1}{\rho^2} - \frac{B^2}{b^2} \frac{1}{\rho^2} + \\ & + \left[\frac{C_{11}}{\rho} + 2 \frac{A}{a^2} \rho \right] \cos(\theta) + \left[\frac{\bar{C}_{11}}{\rho} + 2 \frac{B}{b^2} \rho \right] \sin(\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left([-3C_{21} + \sqrt{3}C_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + [-\sqrt{3}C_{21} - 3C_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \Big) \cos(2\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left([-3\bar{C}_{21} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + [-\sqrt{3}\bar{C}_{21} - 3\bar{C}_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \Big) \sin(2\theta), \\ \tau'_{\rho\theta} = & \left[\frac{C_{11}}{\rho} + 2 \frac{A}{a^2} \rho \right] \sin(\theta) - \left[\frac{\bar{C}_{11}}{\rho} + 2 \frac{B}{b^2} \rho \right] \cos(\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(2\sqrt{3}C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - 2\sqrt{3}C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + \frac{(b^2 - a^2)}{2a^2 b^2} \rho^3 \Big) \sin(2\theta) + \frac{1}{\rho} \left(-2\sqrt{3}\bar{C}_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + 2\sqrt{3}\bar{C}_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \Big) \cos(2\theta), \\ \sigma'_{\theta} = & C_{00} + \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \rho^2 - \frac{A^2}{a^2} \left(\frac{1}{\rho^2} - 2 \right) - \frac{B^2}{b^2} \left(\frac{1}{\rho^2} - 2 \right) + \\ & + \left[\frac{C_{11}}{\rho} + 6 \frac{A}{a^2} \rho \right] \cos(\theta) + \left[\frac{\bar{C}_{11}}{\rho} + 6 \frac{B}{b^2} \rho \right] \sin(\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left([-3C_{21} + \sqrt{3}C_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + [-\sqrt{3}C_{21} - 3C_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \rho^2 \Big) \cos(2\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left([-3\bar{C}_{21} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ & + [-\sqrt{3}\bar{C}_{21} - 3\bar{C}_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \Big) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Имеют место равенства:

$$\sigma'_{\rho} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau'_{\rho\theta} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (17)$$

Соотношения (16) на основании (17) представим в виде

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho}{}^p &= \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} \rho^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} \alpha^2 + \\
&+ \left(-\frac{2A\alpha^2}{a^2} \frac{1}{\rho} + \frac{2A}{a^2} \rho \right) \cos \theta + \left(-\frac{2B\alpha^2}{b^2} \frac{1}{\rho} + \frac{2B}{b^2} \rho \right) \sin \theta - \\
&- \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2\rho} \left(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \rho^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right) \cos 2\theta, \\
\tau'_{\rho\theta}{}^p &= \left(-\frac{2A\alpha^2}{a^2} \frac{1}{\rho} + \frac{2A}{a^2} \rho \right) \sin \theta + \left(\frac{2B\alpha^2}{b^2} \frac{1}{\rho} - \frac{2B}{b^2} \rho \right) \cos \theta + \\
&+ \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2\rho} \frac{\sqrt{3}\alpha^3}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\theta}{}^p &= \frac{3(a^2 + b^2)}{2a^2b^2} \rho^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} \alpha^2 + \frac{2b^2A^2 + 2a^2B^2}{a^2b^2} + \\
&+ \left(-\frac{2A\alpha^2}{a^2} \frac{1}{\rho} + \frac{6A}{a^2} \rho \right) \cos \theta + \left(-\frac{2B\alpha^2}{b^2} \frac{1}{\rho} + \frac{6B}{b^2} \rho \right) \sin \theta - \\
&- \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2\rho} \left(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right) \cos 2\theta.
\end{aligned}$$

На упругопластической границе $\rho = 1$ напряжения (18) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho}{}^p &= a_0'' + a_1'' \cos \theta + b_1'' \sin \theta + a_2'' \cos 2\theta, \\
\tau'_{\rho\theta}{}^p &= b_1''' \sin \theta + a_1''' \cos \theta + b_2''' \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0'' &= \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1'' = \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad b_1'' = \frac{2B}{b^2} (1 - \alpha^2), \\
a_2'' &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \left[-\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right], \\
b_1''' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2B}{b^2} (\alpha^2 - 1), \quad b_2''' = -\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha).
\end{aligned}$$

На внешней границе трубы выполняются граничные условия

$$\sigma'_{\rho}{}^e = \tau'_{\rho\theta}{}^e = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \tag{20}$$

Из граничных условий (19), (20) определяются напряжения в упругой области [3]. Для физических компонент тензора напряжений в первом приближении в цилиндрической системе координат справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{'e} &= \frac{(1-\alpha^2)}{\beta^2-1} \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2} \left[-1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right] - \frac{2(1-\alpha^2)\beta}{\beta^4-1} \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left[\frac{A}{a^2} \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{b^2} \sin \theta \right] - \frac{(\rho^2-\beta^2)}{6(\beta^2-1)^3} \frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \left[(((4\alpha^3-2)\rho^2-4\alpha^3+1)\beta^4 + \right. \\
&\quad \left. + (-\rho^2+3)\beta^2-\rho^2) \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3((-1+2\rho^2)\beta^4 + \right. \\
&\quad \left. + (-3+2\rho^2)\beta^2 + \rho^2) (\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1) \right] \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{'e} &= -\frac{2(1-\alpha^2)\beta}{\beta^4-1} \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left[\frac{A}{a^2} \sin \theta + \frac{B}{b^2} \cos \theta \right] + \\
&\quad + \frac{\rho^2-\beta^2}{(\beta^2-1)^3} \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} \frac{1}{\rho^4} \left[\left(\left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{1}{6} \right) \rho^2 - \frac{2}{3}\alpha^3 + \frac{1}{6} \right) \beta^4 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\alpha^3 - \frac{1}{2} \right) \rho^4 + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^3 \rho^2}{3} \right) \beta^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{1}{6} - \frac{\alpha^3}{3} \right) \rho^4 + \frac{\rho^2}{6} \right) \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\rho^2-1)(\beta^4+3(\rho^2+1)\beta^2+\rho^2)(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1) \right] \sin 2\theta, \\
\sigma_{\theta}^{'e} &= \frac{(1-\alpha^2)}{\beta^2-1} \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2} \left[-1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right] - \\
&\quad - \frac{2(1-\alpha^2)\beta}{\beta^4-1} \left(3\frac{\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left[\frac{A}{a^2} \cos \theta + \frac{B}{b^2} \sin \theta \right] + \\
&\quad + \frac{1}{(\beta^2-1)^3} \frac{a^2-b^2}{a^2b^2\rho^4} \left[\left(\left(\frac{1}{6} - \frac{2\alpha^3}{3} \right) \beta^6 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2\alpha^3}{3} \right) \rho^4 + \frac{1}{2} \right) \beta^4 + \right. \\
&\quad \left. + \left((2\alpha^3-1)\rho^6 + \frac{\rho^4}{6} \right) \beta^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{2\alpha^3}{3} \right) \rho^6 + \frac{\rho^4}{6} \right) \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \\
&\quad \left. + \left(\frac{\beta^6}{2} + (\rho^4 + \frac{3}{2})\beta^4 + (-3\rho^6 + \frac{1}{2}\rho^4)\beta^2 - \rho^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\rho^4}{2} \right) (\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1) \right] \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{21}$$

Радиус упругопластической области в первом приближении определяется из соотношений:

$$\rho_s' = M [N + P \cos(\theta - \mu) + Q \cos 2\theta], \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{((\beta^4 - 1)a^2b^2(2\beta^2 \ln \alpha - 1 + (p + 1)\beta^2))}, \\
N &= \frac{1}{16}(\beta^4 - 1) \left[((a^2 + b^2)\alpha^2 - 2a^2(B^2 + 1) - 2b^2(A^2 + 1))\beta^2 + \right. \\
&\quad \left. + a^2(1 + 2B^2) + b^2(1 + 2A^2) \right], \\
P &= 2(\beta^2 - 1) \left((\alpha^2 - 2)\beta^4 + \alpha^2 \right) \sqrt{B^2a^4 + A^2b^4}, \\
Q &= (a^2 - b^2)(1 + \beta^2) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}(\beta^4\alpha^3 + 2(\alpha^3 - 1)\beta^2 - \alpha^3) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \frac{1}{4}(\beta^4 + 6\beta^2 + 1)(\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 1) \right), \\
\operatorname{tg} \mu &= \frac{Ab^2}{Ba^2}.
\end{aligned}$$

На рис. 2 контур пластической зоны в нулевом приближении обозначен ρ_s^0 , контур пластической зоны в первом приближении — ρ_s' , при $\delta = 0, 2$, $A = -1$; $B = -2$; $a = 1$; $b = 2$.

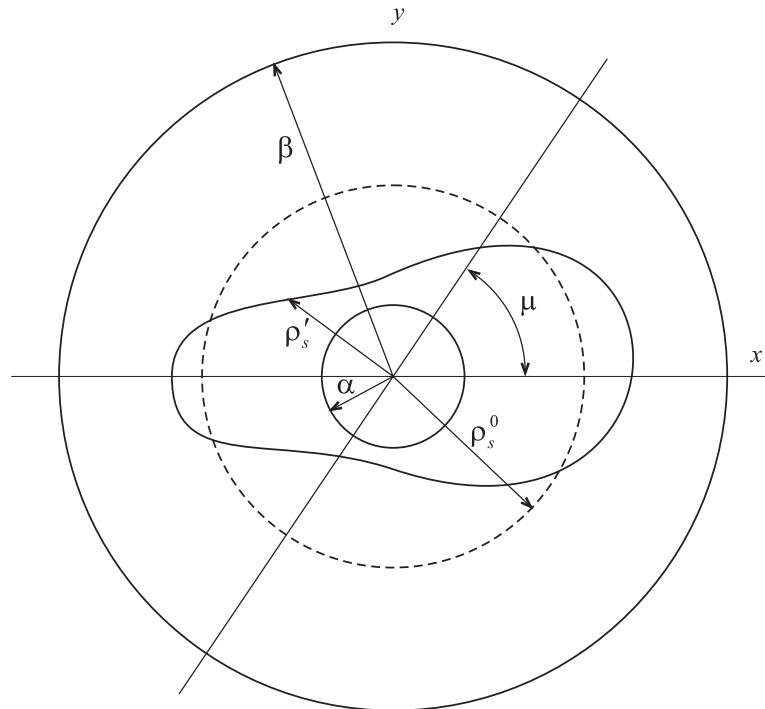


Рис. 2

Литература

- [1] Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных сред / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. – М.: Мир, 1964. – 156 с.
- [2] Друянов, Б.А. Вдавливание жесткого штампа в толстую пластически неоднородную пластинку / Б.А. Друянов // Изв. АН СССР, Механика и машиноведение. – 1959. – №3. – С. 161–166.
- [3] Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М.: Наука, 1978.
- [4] Кузнецов, А.И. Плоская деформация неоднородных пластических тел / А.И. Кузнецов // Вестник Ленинградского университета. – 1958. – №13. – С. 112–131.
- [5] Целистова, Е.А. Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала / Е.А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 1999. – №7. – С. 45–47.
- [6] Spencer, A.J.M. Perturbation methods in plasticity, I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids / A.J.M. Spencer // J. Mech. and Phys. Solids. – 1961. – №4.

Поступила в редакцию 24/V/2007;
в окончательном варианте — 24/V/2007.

ON AN ELASTIC-PLASTIC STATE OF THICK-WALLED INHOMOGENEOUS TUBE UNDER INTERNAL PRESSURE³

© 2006 S.V. Tikhonov⁴

In this paper an elastic-plastic state of a thick-walled tube under internal pressure is considered. The tube is isotropic, inhomogeneous, keeping constant value of a yield strength to constants along lines of concentric ellipses. The effect of inhomogeneity on a stress state of the tube is analyzed. A method of identification of material heterogeneity properties on an example of concentric ellipses can be extended to other various curves along which the yield strength keeps constant value. It is demonstrated by an example given in the paper.

Paper received 24/V/2007.

Paper accepted 24/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. D.D.Ivlev.

⁴Tikhonov Sergey Vladimirovich (strangcheb@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, 428000, Russia.