МЕХАНИКА

УДК 539.374

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ УСЛОВИЯХ ОТРЫВА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА[1]

© 2007 А.Н. Роштова[2]

В работе рассматриваются статически определимые предельные условия отрыва в случае, когда предельные условия отрыва зависят от среднего давления и направления отрыва. Для пространственной задачи рассмотрены два случая: равенство двух главных напряжений предельному значению отрыва p и равенство одного главного напряжения предельному значению p. Рассмотрены свойства напряженного и деформированного состояния при отрыве. Исследован тип уравнений, определены характеристические поверхности.

1. Условие отрыва запишем в виде [1]

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 \leqslant p. \tag{1.1}$$

Рассмотрим соотношения связи главных компонент напряжений σ_i и компонент напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат xyz

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \\ (xyz,\ 123,\ lmn),\end{gathered} \tag{1.2}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, определяющие ориентацию осей тензора напряжения в декартовой системе координат xyz, скобки означают, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов и косинусов.

Для направляющих косинусов имеют место соотношения нормировки ортогональности

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \ \ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \ \ (123,\ lmn). \tag{1.3}$$

Из (1.1)–(1.3) получим

$$\begin{aligned}&\sigma_x = p + 3(\sigma - p)\, n_1^2, \quad \tau_{xy} = 3(\sigma - p)\, n_1 n_2,\\ &\sigma_y = p + 3(\sigma - p)\, n_2^2, \quad \tau_{yz} = 3(\sigma - p)\, n_2 n_3,\\ &\sigma_z = p + 3(\sigma - p)\, n_3^2, \quad \tau_{xz} = 3(\sigma - p)\, n_1 n_3,\\ &\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Из (1.4) находим, что

$$(\sigma_x - p)\left(\sigma_y - p\right) - \tau_{xy}^2 = 0 \qquad (xyz). \tag{1.5}$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Д.Д. Ивлевым.

[2]Роштова Алена Николаевна (roshtova@mail.ru), кафедра математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, 428000, Россия, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38.

А также следует
$$\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} = 3\,(\sigma - p)\,. \tag{1.6}$$
Положим далее
$$p = p\,(\sigma, n_1, n_2, n_3)\,. \tag{1.7}$$
Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (xyz)\,. \tag{1.8}$$
Из (1.4), (1.7), (1.8) получим
$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + 3\left(1 - \frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)n_1^2\frac{\partial\sigma}{\partial x} + 3\left(1 - \frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)n_1n_2\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \\
+3\left(1 - \frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)n_1n_3\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \left(1 - 3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial x} - 3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial y} - \\
-3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial z} + 3\,(\sigma - p)\left(2n_1\frac{\partial n_1}{\partial x} + n_2\frac{\partial n_1}{\partial y} + n_3\,\frac{\partial n_1}{\partial z}\right) + \\
+\left(1 - 3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial x} - 3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial y} - 3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial z} + \\
+3\,(\sigma - p)\,n_1\frac{\partial n_2}{\partial y} + \left(1 - 3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial x} - 3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial y} - \\
-3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial z} + 3\,(\sigma - p)\,n_1\frac{\partial n_3}{\partial z} = 0 \qquad (xyz,\ 123)\,, \\
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.
\end{gathered} \tag{1.9}$$
Уравнение характеристической поверхности примем в виде
$$\Psi\,(x, y, z) = 0, \quad \Psi_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad \Psi_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \Psi_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z}. \tag{1.10}$$
Характеристический определитель системы уравнений (1.9) имеет вид
$$\begin{gathered}
\Theta\left[(\sigma - \mathrm{p})\left[3\left(1 - \frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\Theta^2 - \frac{\partial p}{\partial\sigma}\left(\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_x^2\right)\right] + \right. \\
+\Theta\left[\frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x + \frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y + \frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z - \right. \\
\left.\left. -\Theta\left(\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1 + \frac{\partial p}{\partial n_2}n_2 + \frac{\partial p}{\partial n_3}n_3\right)\right]\right] = 0,
\end{gathered} \tag{1.11}$$
где $\Theta = \Psi_x n_1 + \Psi_y n_2 + \Psi_z n_3$.

Введем векторы
$$\begin{gathered}
\mathbf{\Psi} = \Psi_x\mathbf{i} + \Psi_y\mathbf{j} + \Psi_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{P} = \frac{\partial p}{\partial n_1}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial n_2}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial n_3}\mathbf{k}, \\
\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k},
\end{gathered} \tag{1.12}$$
где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты вдоль осей x, y, z.

Тогда
$$\begin{gathered}
\Theta = |\mathbf{\Psi}|\cdot|\mathbf{n}|\cos\theta, \qquad \frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x + \frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y + \frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z = |\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{\Psi}|\cos\theta_1, \\
\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1 + \frac{\partial p}{\partial n_2}n_2 + \frac{\partial p}{\partial n_3}n_3 = |\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{n}|\cos\alpha, \quad |\mathbf{n}| = 1.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

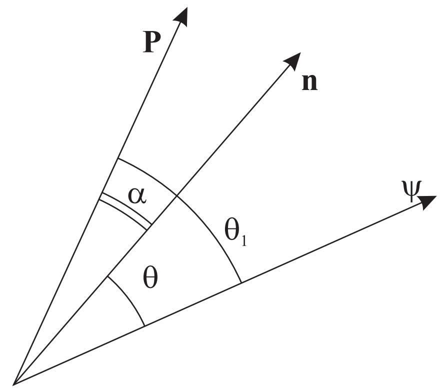

Рис. 1

На рис. 1 показаны вектора $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{n}$ и углы между ними. Уравнение (1.11) с учетом (1.13) примет вид

$$\cos\theta\left[(p-\sigma)\left(3\cos^2\theta\left(1-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+|\mathbf{P}|\cos\theta\,(\cos\theta_1-\cos\theta\cos\alpha)\right]=0. \tag{1.14}$$

В частных случаях из (1.14) следует:

1) $p=\mathrm{const},\ |\mathbf{P}|=0,\ \cos\theta=0;$

2) $p=p(\sigma),\ |\mathbf{P}|=0,\ \cos\theta=0,\ \cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\partial p}{\partial\sigma}}{1-\dfrac{\partial p}{\partial\sigma}}}\ ;$

3) $p=p(n_1,n_2,n_3),\ \dfrac{\partial p}{\partial\sigma}=0,\ \cos\theta=0,\ \cos\theta=\dfrac{|\mathbf{P}|\cos\theta_1}{|\mathbf{P}|\cos\alpha-3\,(\sigma-p)}.$

2. Условие отрыва запишем в виде [2]

$$\sigma_3=p,\quad \sigma_1=\sigma_2. \tag{2.1}$$

Предположим, что выполняется условие (1.7).
Из (1.2), (1.3), (1.7) получим

$$\begin{gathered}
\sigma_x=\frac{3\sigma-p}{2}+\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_1^2,\quad \tau_{xy}=\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_1n_2,\\
\sigma_y=\frac{3\sigma-p}{2}+\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_2^2,\quad \tau_{yz}=\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_2n_3,\\
\sigma_z=\frac{3\sigma-p}{2}+\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_3^2,\quad \tau_{xz}=\frac{3\,(p-\sigma)}{2}n_1n_3,\\
\sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right).
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Из (2.2) находим

$$\left(\sigma_x-\frac{3\sigma-p}{2}\right)\left(\sigma_y-\frac{3\sigma-p}{2}\right)-\tau_{xy}^2=0\quad (xyz)\,. \tag{2.3}$$

Из (2.2) также следует

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}}+\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}+\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}=\frac{3\,(p-\sigma)}{2}. \tag{2.4}$$

Из (1.8), (2.2) следует

$$\begin{gathered}
\left(3-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+3\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)n_1^2\frac{\partial\sigma}{\partial x}+3\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)n_1n_2\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\\
+3\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)n_1n_3\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial x}+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial y}+\\
+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial z}+3\,(p-\sigma)\left(2n_1\frac{\partial n_1}{\partial x}+n_2\frac{\partial n_1}{\partial y}+n_3\;\frac{\partial n_1}{\partial z}\right)\\
+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial x}+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial y}+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial z}+\\
+3\,(p-\sigma)\,n_1\frac{\partial n_2}{\partial y}+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial x}+\\
+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial y}+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial z}++3\,(p-\sigma)\,n_1\frac{\partial n_3}{\partial z}=0\\
(xyz,\ 123),\\
n_1^2+n_2^2+n_3^2=1.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Характеристический определитель системы уравнений (2.5) имеет вид

$$\begin{gathered}
\Theta\left[(\sigma-\mathrm{p})\left[3\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\Theta^2+\left(3-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\left(\Psi_x^2+\Psi_y^2+\Psi_x^2\right)\right]+\right.\\
+2\Theta\left[\Theta\left(\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1+\frac{\partial p}{\partial n_2}n_2+\frac{\partial p}{\partial n_3}n_3\right)-\right.\\
\left.\left.-\frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x+\frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y+\frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z\right]\right]=0,
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\Theta=\Psi_xn_1+\Psi_yn_2+\Psi_zn_3$.

Уравнение (2.6) с учетом (1.13) примет вид

$$\begin{gathered}
\cos\theta\left[(p-\sigma)\left(3\cos^2\theta\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)+\left(3-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\right)+\right.\\
+2\,|\mathbf{P}|\cos\theta\,(\cos\theta\cos\alpha-\cos\theta_1)]=0.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Отметим, что при $p=\mathrm{const}$ из (2.6) следует, что $\cos\theta=0$, $\cos\theta=\pm1$.

3. В случае условия отрыва (1.1) для определения соотношений связи между напряжениями σ_{ij} и компонентами скоростей деформации ε_{ij} в качестве обобщенного потенциала используем соотношения (1.5).

Из (1.5) следует

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x=-\lambda_1\frac{\partial p}{\partial\sigma_x}\left(\sigma_y+\sigma_z-2p\right)-\lambda_2\frac{\partial p}{\partial\sigma_x}\left(\sigma_x+\sigma_z-2p\right)-\\
-\lambda_3\frac{\partial p}{\partial\sigma_x}\left(\sigma_x+\sigma_y-2p\right)+\lambda_2\left(\sigma_z-p\right)+\lambda_3\left(\sigma_y-p\right),\\
\varepsilon_{xy}=-\lambda_3\tau_{xy}\quad(xyz,\ 123).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Из (3.1) получим

$$\begin{gathered}\varepsilon_x - \frac{\partial p}{\partial \sigma_x}\left[\frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}}\left(\sigma_y + \sigma_z - 2p\right) + \frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}}\left(\sigma_x + \sigma_z - 2p\right) + \right.\\ \left. + \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}}\left(\sigma_x + \sigma_y - 2p\right)\right] + \frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}}\left(\sigma_z - p\right) + \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}}\left(\sigma_y - p\right) = 0 \quad (xyz),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{3}\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial \sigma_x} \quad (xyz). \tag{3.3}$$

Для определения выражений $\dfrac{\partial n_i}{\partial \sigma_{jk}}$, согласно (1.4), аналогично [3] найдем

$$\begin{gathered}2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = 3\left(\sigma - p\right)\left(3n_1^2 - 1\right),\\ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = 9\left(\sigma - p\right)^2 n_1^2\left(1 - n_1^2\right) \qquad (xyz,\ 123).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Из (3.4) получим

$$\frac{\left(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z\right)^2}{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\left(3n_1^2 - 1\right)^2}{n_1^2\left(1 - n_1^2\right)} \qquad (xyz,\ 123). \tag{3.5}$$

Из (3.5) будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\partial n_1}{\partial \sigma_x} = \frac{2n_1\left(1 - n_1^2\right)}{1 + n_1^2}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_z} = -\frac{n_1\left(1 - n_1^2\right)}{1 + n_1^2}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{yz}} = 0,\\ \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{xy}} = -\frac{n_2\left(3n_1^2 - 1\right)}{1 + n_1^2}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{xz}} = -\frac{n_3\left(3n_1^2 - 1\right)}{1 + n_1^2} \quad (xyz,\ 123).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Переходя в уравнениях (3.2) к компонентам перемещения с помощью формул Коши

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\end{gathered} \tag{3.7}$$

с учетом выражений (1.4), (3.3), (3.6), получим три уравнения относительно трех неизвестных компонент скоростей перемещений u, v, w:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{n_2}{2n_1}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{n_3}{2n_1}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{n_2}{2n_1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{n_3}{2n_1}\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} + \right.\\ + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{n_1^2 + n_3^2}{2n_1 n_3} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{n_2^2 + n_3^2}{2n_2 n_3} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{n_1^2 + n_3^2}{2n_1 n_3} + \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{n_2^2 + n_3^2}{2n_2 n_3}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{2n_1\left(1 - n_1^2\right)}{1 + n_1^2} - \right.\\ \left. - \frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{2n_2\left(1 - n_2^2\right)}{1 + n_2^2} - \frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{2n_3\left(1 - n_3^2\right)}{1 + n_3^2}\right) = 0 \qquad (uvw,\ xyz,\ 123).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Система уравнений (3.8) принадлежит гиперболическому типу. Характеристические поверхности для уравнений относительно компонент скоростей перемещений (3.8) совпадают с характеристическими поверхностями уравнений относительно компонент напряжения (1.14).

Отметим, что при $p = \mathrm{const}$ из (3.8) следует [1]

$$n_1\varepsilon_x + n_2\varepsilon_{xy} + n_3\varepsilon_{xz} = 0 \qquad (xyz,\ 123)\,.$$

4. В случае условия отрыва (2.1) для определения соотношений между напряжениями σ_{ij} и компонентами скоростей деформации ε_{ij} в качестве обобщенного потенциала используем соотношение (2.3).

Из (2.3) следует

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x = \lambda_1\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma_x} - 1\right)&\left(\sigma_y + \sigma_z - 3\sigma + p\right) + \\
&+\lambda_2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma_x} - 1\right)(\sigma_x + \sigma_z - 3\sigma + p) + \\
&\qquad+\lambda_3\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma_x} - 1\right)\left(\sigma_x + \sigma_y - 3\sigma + p\right) + \\
&+\lambda_2\left(\sigma_z - \frac{3\sigma - p}{2}\right) + \lambda_3\left(\sigma_y - \frac{3\sigma - p}{2}\right), \\
\varepsilon_{xy} = -\lambda_3\tau_{xy} \qquad (xyz,\ 123)\,.&
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\dfrac{\partial p}{\partial\sigma_x}$ определяется соотношением (3.3).

Из (4.1) следует

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\partial p}{\partial\sigma_x}\right)&\left[\frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}}(\sigma_x - p) + \frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}}\left(\sigma_y - p\right) + \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}}(\sigma_z - p)\right] + \\
&+\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}}\left(\sigma_z - \frac{3\sigma - p}{2}\right) + \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}}\left(\sigma_y - \frac{3\sigma - p}{2}\right) = 0 \qquad (xyz)\,.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Для определения выражений $\dfrac{\partial n_i}{\partial\sigma_{jk}}$ согласно (2.2) найдем

$$\begin{aligned}
&2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = \frac{3\,(p - \sigma)}{2}\left(3n_1^2 - 1\right), \\
&\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{9\,(p - \sigma)^2}{4}\,n_1^2\left(1 - n_1^2\right) \qquad (xyz,\ 123)\,.
\end{aligned}$$

Справедливы соотношения (3.5), (3.6).

Переходя в уравнениях (4.2) к компонентам перемещения с помощью формул Коши (3.7), с учетом соотношений (2.2), (3.3), (3.6) получим систему трех уравнений относительно трех неизвестных компонент скоростей перемещений u, v, w:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{n_2^2-n_1^2}{4n_1n_2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{n_3^2-n_1^2}{4n_1n_3}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{n_2^2-n_1^2}{4n_1n_2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1-n_1^2}{4n_2n_3}\frac{\partial v}{\partial z}+$$
$$+\frac{n_3^2-n_1^2}{4n_1n_3}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1-n_1^2}{4n_2n_3}\frac{\partial w}{\partial y}++\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1-n_3^2}{2n_1n_2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{1-n_2^2}{2n_1n_3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1-n_3^2}{2n_1n_2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{1-n_1^2}{2n_2n_3}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{1-n_2^2}{2n_1n_3}+\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{1-n_1^2}{2n_2n_3}\right)\times \tag{4.3}$$
$$\times\left(\frac{1}{3}\frac{\partial p}{\partial \sigma}-\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{2n_1\left(1-n_1^2\right)}{1+n_1^2}+\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{2n_2\left(1-n_2^2\right)}{1+n_2^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial p}{\partial n_3}\,\frac{2n_3\left(1-n_3^2\right)}{1+n_3^2}\right)=0 \quad (uvw,\ xyz,\ 123)\,.$$

Система уравнений (4.3) принадлежит гиперболическому типу.

Характеристические поверхности для уравнений относительно компонент скоростей перемещений (4.3) совпадают с характеристическими поверхностями уравнений относительно компонент напряжения (2.7).

Отметим, что для изотропного при $p = \mathrm{const}$ из (4.3) следует

$$\varepsilon_x+\frac{n_2^2-n_1^2}{2n_1n_2}\varepsilon_{xy}+\frac{n_3^2-n_1^2}{2n_1n_3}\varepsilon_{xz}-\frac{1-n_1^2}{4n_2n_3}\varepsilon_{yz}=0 \quad (xyz,\ 123)\,. \tag{4.4}$$

Характеристический определитель системы уравнений (4.4) относительно компонент скоростей перемещений имеет вид

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi})[\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi}-\mathbf{\Psi}\cdot\mathbf{\Psi}]=0. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) совпадает с соответствующим уравнением для компонент напряжений [2].

Из (4.5) следует

$$\cos(\mathbf{n},\mathbf{\Psi})=0, \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{\Psi})=1. \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что характеристические поверхности пересекаются вдоль направления третьего главного напряжения $\sigma_3 = p$ и что поверхности отрыва $\sigma_3 = p$ являются характеристическими.

Литература

[1] Ивлев, Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – С. 232.

[2] Ивлев, Д.Д. О предельном состоянии при отрыве / Д.Д. Ивлев Н.М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. – М.: Физматлит, 2006. – С. 288–290.

[3] Ивлев, Д.Д. К теории идеальной пластической анизотропии / Д.Д. Ивлев // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6.

Поступила в редакцию 24/ V/2007;
в окончательном варианте — 24/ V/2007.

ON LIMIT STATICAL DETACHMENT CONDITIONS FOR A COMPRESSIBLE ANISOTROPIC SOLID[3]

© 2007 A.N. Roshtova[4]

In this paper limit statical detachment conditions in the case when this conditions depend on average pressure and detachment direction are considered. A spatial problem is discussed for the case of equating two principal stresses to the limit detachment value [1] and for the case of equating a principal stress to the limit detachment value [2]. Properties of the a stress-strain state observed at a detachment are studied. Analytical type of the involved equations is analyzed and characteristic surfaces are obtained.

Paper received 24/V/2007.
Paper accepted 24/V/2007.

---

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. D.D. Ivlev.

[4]Roshtova Alena Nickolaevna (roshtova@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Chuvash State Pedagogical University, Chebocksary, 428000, Russia.