

О ПОДВИЖНЫХ ОБЛАСТЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА ТЕМЛЯКОВА I РОДА С ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОБЛАСТЬЮ ЕДИНИЧНЫМ ГИПЕРШАРОМ

© 2007 О.А. Якубовская¹

В работе В.И. Боганова [1] показано, что интеграл типа Темлякова I рода при определенных условиях, наложенных на функцию плотности, определяет в единичном гипершаре аналитическую функцию. Вне этого гипершара функция, представимая таким интегралом, вообще говоря, аналитической не является. В настоящей работе даны достаточные условия, которым должна удовлетворять функция плотности, чтобы функция, представимая интегралом типа Темлякова I рода, была аналитической и в некоторых других областях, помимо рассматриваемого гипершара. Кроме того, даны полные описания возникающих таким образом подвижных областей аналитичности.

1. Предварительные сведения

В данной работе в качестве определяющей области B будем рассматривать единичный гипершар:

$$B = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 < 1\} \quad (1.1)$$

и для интеграла Темлякова I рода

$$f(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(\tau, t, \xi)}{\xi - u} d\xi, \quad (1.2)$$

$$u = \sqrt{\tau}w + \sqrt{1-\tau}ze^{it}.$$

Плотность интеграла (1.2) — функция $F(\tau, t, \xi)$ непрерывная по совокупности действительных переменных τ и t ($\tau \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$), 2π -периодическая по t , и удовлетворяющая по комплексной переменной ξ на единичной окружности $|\xi| = 1$ условию Гельдера с показателем γ ($0 < \gamma \leq 1$), независимо от τ и t .

Из результатов работы [1] следует, что интеграл (1.2) определяет аналитическую функцию в области:

$$B = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 < 1\}.$$

¹Якубовская Ольга Анатольевна (modul911@yandex.ru), кафедра математического анализа Московского государственного педагогического университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

Вне ее функция, представимая интегралом типа Темлякова I рода, вообще говоря, не является аналитической. Там же получены формулы, представляющие интеграл (1.2) в областях:

$$\begin{aligned} B_0 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w| \geq 1, |z| \geq 1, |w| + |z| > 2\}, \\ B_1 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w| > 1, |z| < 1\}, \\ B_2 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w| < 1, |z| > 1\}, \\ B_3 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 \geq 1, |w| < 1, |z| < 1\}, \end{aligned}$$

а именно:

если $(w, z) \in B_0$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\tau_3} d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_{\tau_3}^{\tau_2} H(\tau, u) d\tau + \int_{\tau_2}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (1.3)$$

если $(w, z) \in B_1$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_{\tau_0}^{\tau_2} H(\tau, u) d\tau + \int_{\tau_2}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (1.4)$$

если $(w, z) \in B_2$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\tau_3} d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_{\tau_3}^{\tau_2} H(\tau, u) d\tau + \int_{\tau_1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (1.5)$$

если $(w, z) \in B_3$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_{\tau_0}^{\tau_1} H(\tau, u) d\tau + \int_{\tau_1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt \right], \quad (1.6)$$

где

$$\Phi(\tau, t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{F(\tau, t, \eta)}{\eta - u} d\eta, \quad \text{если } |u| < 1,$$

$$\Psi(\tau, t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{F(\tau, t, \eta)}{\eta - u} d\eta, \quad \text{если } |u| > 1,$$

$$H(\tau, u) = \int_{\alpha+\beta}^{2\pi-\alpha+\beta} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_{-\alpha+\beta}^{\alpha+\beta} \Psi(\tau, t, u) dt,$$

$$\alpha = \arccos \frac{1 - \tau|w|^2 - (1 - \tau)|z|^2}{2\sqrt{\tau}\sqrt{1 - \tau}|w||z|},$$

$$\beta = \arg w - \arg z,$$

τ_0, τ_1 — корни функции $h_1 = \sqrt{\tau}|w| - \sqrt{1 - \tau}|z| - 1$, причем в B_3 $\tau_0 < \tau_1$;

τ_2 — корень функции $h_2 = \sqrt{\tau}|w| - \sqrt{1 - \tau}|z| - 1$;

τ_3 — корень функции $h_3 = \sqrt{\tau}|w| - \sqrt{1 - \tau}|z| + 1$.

При этом в области B_0 : $0 \leq \tau_3 < \tau_2 < 1$, в области B_1 : $0 < \tau_0 < \tau_2 < 1$, в области B_2 : $0 < \tau_3 < \tau_2 < 1$, в области B_3 : $0 < \tau_0 < \tau_1 < 1$; функции h_2, h_3 строго возрастают на $[0, 1]$; функция h_1 строго возрастает при $\tau \in \left[0; \frac{|w|^2}{|w|^2 + |z|^2}\right)$ и строго убывает при $\tau \in \left(\frac{|w|^2}{|w|^2 + |z|^2}; 1\right]$.

2. Основные результаты

Перейдем к рассмотрению подвижных областей аналитичности интеграла (1.2), которые будут "заметать" часть областей B_0, B_1, B_2 , и B_3 .

Зафиксируем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим следующие области:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_3(\alpha) > 0\}, \\ G_2 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_1(0) > 0, h_1(\alpha) < 0\}, \\ G_3 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_1(\alpha) < 0, h_1(1) > 0\}, \\ G_4 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_2(\alpha) > 0\}. \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 1. Если плотность $F(\tau, t, \eta)$ интеграла (1.2) тождественно равна нулю при всех $\tau \in (\alpha, 1)$, то функция $f(w, z)$, представимая этим интегралом, аналитична в областях G_1 и G_3 , причем если $(w, z) \in G_1$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt; \quad (2.1)$$

если $(w, z) \in G_3$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt. \quad (2.2)$$

Если плотность $F(\tau, t, \eta)$ интеграла (1.2) тождественно равна нулю при всех $\tau \in (0, \alpha)$, то функция $f(w, z)$, представимая этим интегралом, аналитична в областях G_2 и G_4 , причем если $(w, z) \in G_2$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt; \quad (2.3)$$

если $(w, z) \in G_4$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt. \quad (2.4)$$

Доказательство. Если $(w, z) \in G_3 \subset B_1$, то $h_1(\alpha) < 0 = h_1(\tau_0)$. Но функция $h_1(\tau)$ строго возрастает в некоторой окрестности точки τ_0 . Поэтому $0 < \alpha < \tau_0 < 1$. Перепишем формулу (1.4) в следующем виде:

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_\alpha^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0}^{\tau_2} H(\tau, u) dt + \int_{\tau_2}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right].$$

Так как по условию $F(\tau, t, \eta) = 0$, $\forall \tau \in (\alpha, 1)$, то второе, третье и четвертое слагаемые правой части обращаются в ноль. В результате получаем нужную формулу (2.2), что и доказывает аналитичность функции $f(w, z)$ в области G_3 . Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

Зафиксируем теперь произвольные $\alpha, \beta \in (0, 1)$, где $\alpha < \beta$. Рассмотрим следующие области:

$$G_5 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_3(\alpha) < 0, h_2(\beta) > 0\}, \\ G_6 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_3(\beta) < 0, h_1(\beta) < 0\}, \\ G_7 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_1(\alpha) < 0, h_2(\beta) > 0\}, \\ G_8 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : h_1(\alpha) < 0, h_1(\beta) < 0\}.$$

Теорема 2. Если плотность $F(\tau, t, \eta)$ интеграла (1.2) тождественно равна нулю при всех $\tau \in (\alpha, \beta)$, то функция $f(w, z)$, представимая этим интегралом, аналитична в областях G_5 , G_6 , G_7 и G_8 , причем если $(w, z) \in G_5$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (2.5)$$

если $(w, z) \in G_6$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (2.6)$$

если $(w, z) \in G_7$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right]; \quad (2.7)$$

если $(w, z) \in G_8$, то

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt \right]. \quad (2.8)$$

Доказательство. а) Рассмотрим случай области G_5 . Итак, пусть $(w, z) \in G_5 \subset B_0$. Так как $h_3(\alpha) < 0 = h_3(\tau_3)$ и функция $h_3(\tau)$ строго возрастает, то $\alpha < \tau_3$. Совершенно также получаем $\beta > \tau_2$. Имеем: $0 < \alpha < \tau_3 < \tau_2 < \beta < 1$. Перепишем формулу (1.3) в виде:

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_\alpha^{\tau_3} d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau_3}^{\tau_2} H(\tau, u) dt + \int_{\tau_2}^\beta d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Psi(\tau, t, u) dt \right].$$

Замечаем, что в силу условия, второе, третье и четвертое слагаемые правой части обращаются в ноль. В результате получаем формулу (2.5), что и доказывает аналитичность функции $f(w, z)$ в области G_5 .

б) Рассмотрим случай области G_8 . Итак, пусть $(w, z) \in G_8 \subset B_3$. Так как $h_1(\alpha) < 0 = h_1(\tau_0)$ и функция $h_1(\tau)$ строго возрастает в некоторой окрестности точки τ_0 , то $\alpha < \tau_0$. Так как $h_1(\beta) < 0 = h_1(\tau_1)$ и функция строго убывает в некоторой окрестности точки τ_1 , получаем $\beta > \tau_1$. Таким образом $0 < \alpha < \tau_0 < \tau_1 < \beta < 1$. Перепишывая формулу (1.6) в виде:

$$f(w, z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\alpha d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_\alpha^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0}^{\tau_1} H(\tau, u) dt + \int_{\tau_1}^\beta d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt + \int_\beta^1 d\tau \int_0^{2\pi} \Phi(\tau, t, u) dt \right]$$

замечаем, что в силу условия, второе, третье и четвертое слагаемые правой части обращаются в ноль. В результате получаем формулу (2.8), что и доказывает аналитичность функции $f(w, z)$ в области G_8 . Доказательство двух других утверждений теоремы аналогично.

Литература

- [1] Боганов, В.И. Об интегралах типа Темлякова и "подвижных" областях голоморфности / В.И. Боганов // "Ученые записки" Моск. обл. пед. ин-та им. Н.К. Крупской. – 1969. – Т. 225. – С. 59–71.

Поступила в редакцию 3/XI/2006;
в окончательном варианте — 3/XI/2006.

MOVING ANALYTICAL DOMAINS OF THE TEMLYAKOV I-KIND INTEGRAL WITH UNIT HYPERSPHERE AS A DEFINING DOMAIN

© 2007 O.A. Yakubovskaya²

It is shown [1], that the Temlyakov I-kind integral defines an analytic function on a unit hypersphere, if the density function satisfies some special conditions. Outside this hypersphere, the function is represented by the integral, not analytic in the usual sense. In the paper such sufficient conditions for density function, that the function represented by Temlyakov I-kind integral would be analytic in some other domains, not only in unit hypersphere are obtained. Besides, full descriptions of such moving analytical domains are given in the paper.

Paper received 3/XI/2006.

Paper accepted 3/XI/2006.

²Yakubovskaya Olga Anatolyevna (modul911@yandex.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russia.