

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫМИ МЕТОДАМИ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ПРОИЗВОДНЫЕ КОТОРЫХ ИМЕЮТ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

© 2007 Т.Ю. Шерстюк¹

Операторы Баскакова определены в 2001 году В.А. Баскаковым. В настоящее время аппроксимативные свойства операторов изучаются такими математиками, как Ю.Г. Абакумов, Е.С. Коган, Т.В. Дубровина и др.

В предлагаемой статье доказан результат, содержащий решение задачи об оценке приближения тригонометрическими операторами Баскакова функций, имеющих непрерывную $(i-1)$ -ю — производную, при этом i -ая производная имеет разрыв первого рода. Приведены с доказательством вспомогательные утверждения, на которых основана теорема. Кроме того, рассмотрены некоторые характеристики операторов Баскакова.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Аппроксимирующие последовательности операторов

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x) = \frac{2^{m-1} \prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi k_j}{n}}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) \sin^2 \frac{nt}{2} dt}{\sin^2 \frac{t}{2} \prod_{j=1}^m \left(\cos t - \cos \frac{2\pi k_j}{n} \right)}, \quad (1.1)$$

где m, k_j — целые параметры ($m > 0, 0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m < n/2$), введены В.А. Баскаковым [1], [2]. Аппроксимативные свойства операторов (1) изучались в ряде работ, из которых отметим [3–6].

Операторы (1) являются методами суммирования рядов Фурье, то есть представляются в виде:

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-m-1} \lambda_{j,n}^{[m](k_1, \dots, k_m)} \cos jt \right) dt.$$

Аналитическое выражение для $\lambda_{j,n}^{[m](k_1, \dots, k_m)}$ найдено В.А. Баскаковым [2] (ввиду того, что в дальнейшем эти формулы нам не понадобятся, мы их приводить не будем).

¹Шерстюк Татьяна Юрьевна (chitatatyana@mail.ru), кафедра математики Читинского государственного университета, 672039, Россия, г. Чита, ул. Александровская, 30.

Если целое $r \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ удовлетворяют ограничению $r + \alpha < 2m + 1$, то операторы $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}$ приближают 2π -периодические функции класса $W^r H^\alpha$ с порядком $O(n^{-r-\alpha})$, то есть с наилучшим порядком (если $f(t)$ имеет производную r -го порядка и $f^{(r)}(t) \in Lip \alpha$, то говорят, что $f(t) \in W^r H^\alpha$).

В предлагаемой статье мы рассматриваем задачу об оценке приближения операторами (1.1) функций, имеющих непрерывную $(i-1)$ -ю производную, при этом $f^{(i)}(t)$ может иметь изолированные точки разрыва первого рода, $i \geq 1$. Если $i = 1$, то под 0-й производной понимается сама функция $f(t)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть $i > 0$ -целое, $f(t) \in C_{2\pi}^{i-1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ — произвольным образом фиксированная точка действительной оси; существует $c > 0$, такое, что $f^{(i)}(t)$ непрерывна на $[x - c, x]$ и на $[x, x + c]$, $\rho \geq 0$ — действительное число, тогда (при $i \leq 2m$)

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x + 2\rho n^{-1}) = f(x + 2\rho n^{-1}) + \frac{1}{i!}(-1)^{i+1}\Phi_i(\rho)(f_+^{(i)}(x) - f_-^{(i)}(x))n^{-i} + o(n^{-i}), \quad (1.2)$$

где

$$f_+^{(i)}(x) = \lim_{t \rightarrow x+} f^{(i)}(t), f_-^{(i)}(x) = \lim_{t \rightarrow x-} f^{(i)}(t), \quad (1.3)$$

$$\Phi_i(\rho) = 2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_{\rho}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^i \frac{t^{i-2} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}. \quad (1.4)$$

Заметим, при $i = 1$ результат получен Е.С. Коган [4].

Доказательство теоремы основано на вспомогательных утверждениях, которые мы докажем в п. 2. В п. 4 приведем некоторые свойства функций $\Phi_i(\rho)$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $i > 0$ — целое, $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(t) \in L_{2\pi}^{\infty}$ и существует $c > 0$ такое, что $f^{(i)}(t)$ непрерывна на $[x - c, x + c]$, кроме того $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(i)}(x) = 0$, тогда для любого $\rho \geq 0$ выполняется

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x + 2\rho n^{-1}) = o(n^{-i}). \quad (2.1)$$

Прежде, чем приступить к изложению доказательства, оговорим некоторые обозначения.

Для сокращения будем обозначать $2\rho n^{-1} = \rho_n$.

Символом t^i обозначаем 2π -периодическую функцию, равную t^i при $t \in (-\pi, \pi]$, t_+^i обозначаем 2π -периодическую функцию равную нулю при $t \in (-\pi, 0]$ и равную t^i при $t \in [0, \pi]$, 2π -периодическая функция t_-^i определяется равенством $t^i = t_+^i + t_-^i$. Запись $(t-x)^i$ означает 2π -периодическую функцию равную $(t-x)^i$ при $(x-\pi, x+\pi]$. Аналогично определяется $(t-x)_+^i$ и $(t-x)_-^i$.

Заметим, нам придется раскрывать выражение $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t + \rho_n)^i, 0)$. При этом надо учитывать, что формула $(t + \rho_n)^i = \sum_{j=0}^i t^j \rho_n^{i-j} C_i^j$ выполняется только

при $t \in (-\pi, \pi - \rho_n]$. Отсюда

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t + \rho_n)^i, 0) = M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}\left(\sum_{j=0}^i t^j \rho_n^{i-j} C_i^j, 0\right) + O(n^{-2m-1})$$

Почему порядок остатка $O(n^{-2m-1})$ будет понятно из доказательства.

Доказательство леммы 1.

При доказательстве ограничимся случаем $x = 0$. Это можно сделать так как $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}$ — операторы типа свертки, следовательно, они сдвигинвариантны.

Будем доказывать методом от противного.

Предположим, что существует константа $a > 0$, такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^i |M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), 2rn^{-1})| = a. \quad (2.2)$$

Из того, что $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(i)}(0) = 0$, следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для $t \in [-\delta; \delta]$ выполняется $|f(t)| < \epsilon |t|^i$.

Положим при $t \in (-\pi; \pi]$

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [-\delta; \delta], \\ 0, & t \in (-\pi; \pi] \setminus [-\delta; \delta]. \end{cases}$$

За пределы $(-\pi; \pi]$ продолжим $\varphi_\delta(t)$ так, чтобы она была 2π -периодической.

Положим, далее, $\psi_\delta(t) = f(t) - \varphi_\delta(t)$.

Известно ([5], см. также [3, 4]), что для любого $\delta > 0$ из того, что $g(t) = 0$ при $t \in [-\delta; \delta]$, следует (если при этом $g(t)$ ограничена) $|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(g(t), x)| = O(n^{-2m-1})$.

Отсюда следует, что

$$|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\psi_\delta(t), \rho_n)| \leq \gamma_n = O(n^{-2m-1}). \quad (2.3)$$

Дадим оценку величины $|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\psi_\delta(t), \rho_n)|$. Обозначим $u_n(t) = u_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t)$ — ядро оператора $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}$.

Имеем

$$\begin{aligned} |M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\varphi_\delta(t), \rho_n)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\delta(t + \rho_n) u_n(t) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\delta(t + \rho_n)| |u_n(t)| dt \leq \\ &\leq \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |t + \rho_n| |u_n(t)| dt + O(n^{-2m-1}) \leq 2\epsilon \int_{-\rho_n}^{\pi} (t + \rho_n)^i |u_n(t)| dt + O(n^{-2m-1}). \end{aligned}$$

Но

$$\int_{-\rho_n}^0 (t + \rho_n)^i |u_n(t)| dt \leq \|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}\| \cdot \int_{-\rho_n}^0 (t + \rho_n)^i dt = O(n^{-i-1}) = o(n^{-i}).$$

Таким образом,

$$|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\varphi_\delta(t), \rho_n)| \leq 2\epsilon \int_0^{\pi} (t + \rho_n)^i |u_n(t)| dt + o(n^{-i}).$$

Воспользуемся оценкой (см. [5]), которая выполняется при $0 \leq \alpha < 2m + 1$

$$2 \int_0^{\pi} t^\alpha |u_n(t)| dt = 2^{1+\alpha} \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-2} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m |k_j^2 \pi^2 - t^2|} n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}).$$

Считая фиксированными m и k_j , обозначим

$$A(\alpha) = 2^{1+\alpha} \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-2} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m |k_j^2 \pi^2 - t^2|}.$$

(очевидно, при $0 \leq \alpha < 2m+1$ фигурирующий в равенстве интервал сходится).

Учитывая эти обозначения, получим

$$\begin{aligned} |M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\varphi_\delta(t), \rho_n)| &\leq 2\epsilon \int_0^\pi \left(\sum_{j=0}^i C_i^j t^j \rho_n^{i-j} \right) |u_n(t)| dt + o(n^{-i}) = \\ &= \epsilon \sum_{j=0}^i C_i^j A(j) n^{-j} \rho_n^{i-j} + o(n^{-i}). \end{aligned}$$

Порядок остатка определяется тем, что в слагаемом $\int_0^\pi C_i^j t^j \rho_n^{i-j} |u_n(t)| dt$ остаток $o(n^{-j})$ умножается на ρ_n^{i-j} , а $\rho_n = O(n^{-1})$.
Далее, $n^{-j} \rho_n^{i-j} = 2^{i-j} \rho^{i-j} n^{-i}$. Окончательно получим

$$|M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\varphi_\delta(t), \rho_n)| \leq \epsilon \left(\sum_{j=0}^i C_i^j A(j) (2\rho)^{i-j} n^{-i} + o(n^{-i}) \right).$$

В силу произвольности ϵ , полученное неравенство вместе с (2.3) противоречит (2.2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого $x \in (-\infty, \infty)$ и целого $i > 0$ выполняются асимптотические равенства

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t-x)_-, x + 2\rho n^{-1}) = (-1)^i \Phi_i(\rho) n^{-i} + o(n^{-i}), \quad (2.4)$$

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t-x)_+, x + 2\rho n^{-1}) = n^{-i} (2^i \rho^i - (-1)^i \Phi_i(\rho)) + o(n^{-i}), \quad (2.5)$$

где $\Phi_i(\rho)$ определяется равенством (1.3).

Доказательство. Представим операторы Баскакова $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}$ в виде $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x) = \mu_n \int_{-\pi}^\pi f(t+x) \omega_n(t) dt$, где

$$\mu_n = \frac{\prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi(k_j)}{n}}{2\pi n}, \quad \omega_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2} \prod_{j=1}^m \left(\sin \left(\frac{\pi(k_j)}{n} - \frac{t}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi(k_j)}{n} + \frac{t}{2} \right) \right)}$$

Получим сначала оценку $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t_-^i, \rho_n)$. Имеем $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t_-^i, \rho_n) = M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t + \rho_n)_-, 0)$. Далее, в силу четности ядра получим $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t + \rho_n)_-, 0) = (-1)^i M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t - \rho_n)_+, 0) = (-1)^i \mu_n \int_{2\rho n^{-1}}^\pi (t - 2\rho n^{-1})^i \omega_n(t) dt$.

Обозначим $J_n = \mu_n \int_{2\rho n^{-1}}^\pi (t - 2\rho n^{-1})^i \omega_n(t) dt$. Делаем замену $\tau = \frac{nt}{2}$ (или $t = 2\tau n^{-1}$)

$$J_n = \mu_n \int_{\rho}^{0,5\pi n} (2\tau n^{-1} - 2\rho n^{-1})^i \omega_n(2\tau n^{-1}) d\tau.$$

Преобразуем, переходя вновь к обозначению t вместо τ

$$J_n = \mu_n 2^i n^{-i-1} \int_{\rho}^{0,5\pi n} (1 - \frac{\rho}{t})^i t^i \omega_n(\frac{2t}{n}) dt.$$

Положим

$$z_n(t) = \mu_n 2^i n^{-i-1} t^i \omega_n(\frac{2t}{n}) = \frac{2^i \prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi k_j}{n}}{\pi n^{i+2}} \frac{t^i \sin^2(t)}{\sin^2 \frac{t}{n} \prod_{j=1}^m (\sin(\frac{\pi k_j}{n} - \frac{t}{n}) \sin(\frac{\pi k_j}{n} + \frac{t}{n}))}.$$

Для множителя не зависящего от t имеем

$$\frac{2^i \prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi k_j}{n}}{\pi n^{i+2}} = \frac{2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2}{n^{2m+2+i}} + o(n^{-2m-i-2}).$$

Далее, при любом $t \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-2m-2} \cdot \frac{t^i \sin^2(t)}{\sin^2 \frac{t}{n} \prod_{j=1}^m (\sin(\frac{\pi k_j}{n} - \frac{t}{n}) \sin(\frac{\pi k_j}{n} + \frac{t}{n}))}) = \frac{t^{i-2} \sin^2 t}{\prod_{j=1}^m (k_j^2 \pi^2 - t^2)}.$$

Отсюда получаем, что при любом $t \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i z_n(t) = 2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \frac{t^{i-2} \sin^2 t}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}.$$

Кроме того, существует $c > 0$, такое, что при достаточно больших n

$$n^i |z_n(t)| \leq c \frac{t^{i-2} \sin^2 t}{\prod_{j=1}^m |\pi^2 k_j^2 - t^2|}. \quad (2.6)$$

При $i \leq 2m$ правая часть неравенства (2.6) суммируемая при $t \in [0, \infty)$.

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$J_n = n^{-i} 2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_{\rho}^{\infty} (1 - \frac{\rho}{t})^i \frac{t^{i-2} \sin^2 t}{\prod_{j=1}^m (k_j^2 \pi^2 - t^2)} dt + o(n^{-i}).$$

Отсюда получим (2.4).

Для доказательства (2.5) оценим сначала $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^i, \rho_n)$.

Имеем

$$\begin{aligned} M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^i, \rho_n) &= M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t + \rho_n)^i, 0) = \\ &= M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\sum_{j=0}^i C_i^j \rho_n^j t^{i-j}, 0) + O(n^{-2m-1}). \end{aligned}$$

Далее

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\sum_{j=0}^i C_i^j \rho_n^j t^{i-j}, 0) = \sum_{j=0}^i C_i^j \rho_n^j M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^{i-j}, 0) = \rho_n^i + O(n^{-2m-1}).$$

Поясним, что при $i = j$ получаем слагаемое $\rho_n^i M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(1, 0) = \rho_n^i$, при нечетном $i - j$ получим $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^{i-j}, 0) = 0$, при $i - j > 0$ четном (см. [3]) $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^{i-j}, 0) = O(n^{-2m-1})$.

Таким образом, $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^i, \rho_i) = \rho_n^i + o(n^{-i})$. Отсюда получаем что

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t_+, \rho_n) = \rho_n^i - (-1)^i \Phi_i(\rho) n^{-i} + o(n^{-i}) = (2^i \rho^i - (-1)^i \Phi_i(\rho)) n^{-i} + o(n^{-i})$$

Переходя к произвольному x получаем (2.5).

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство основного результата

Считаем, что зафиксированы $x \in (-\infty, \infty)$ и целое $i > 0$.

Положим

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - \sum_{\eta=1}^{i-1} \frac{f^{(\eta)}(x)}{\eta!} (t-x)^\eta - \frac{1}{i!} f_-^{(i)}(x) (t-x)_-^i - \frac{1}{i!} f_+^{(i)}(x) (t-x)_+^i.$$

Функция $\varphi(t)$ и точка x удовлетворяют условию леммы 1, поэтому

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(\varphi(t), x + \rho_n) = o(n^{-i}).$$

Раскрывая $\varphi(t)$ и учитывая, что $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}((t-x)^\eta, x + \rho_n) = \rho_n^\eta + O(n^{-2m-1})$, получим

$$\begin{aligned} M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f(t), x + \rho_n) &= f(x) + \sum_{\eta=1}^{i-1} f^{(\eta)}(x) \rho_n^\eta + (-1)^i \frac{1}{i!} f_-^{(i)}(x) \Phi_i(\rho) n^{-i} + \\ &+ \frac{1}{i!} f_+^{(i)}(x) \rho_n^i - (-1)^i \frac{1}{i!} f_+^{(i)}(x) \Phi_i(\rho) n^{-i} + o(n^{-i}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$f(x + \rho_n) = f(x) + \sum_{\eta=1}^{i-1} \frac{1}{\eta!} f^{(\eta)}(x) \rho_n^\eta + \frac{1}{i!} f_+^{(i)}(x) \rho_n^i + o(n^{-i}),$$

получаем (1.2). Теорема доказана.

4. Некоторые свойства функций $\Phi_i(\rho)$

Считаем (в общем случае), что каким-либо образом зафиксированы m и $\{k_j\}_{j=1}^m$, $0 < k_1 < \dots < k_m$ (все параметры целые) и для целого положительного $i \leq 2m$ функция $\Phi_i(\rho)$ определена согласно (1.3).

Предложение 1. При $i > 1$ имеет место равенство

$$\Phi_i'(\rho) = -2i \Phi_{i-1}(\rho). \quad (4.1)$$

Доказательство. Обозначим $E_i(\rho) = (2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2)^{-1} \Phi_i(\rho)$.

Пусть $c > k_m \pi$ (c не зависит от ρ). Положим

$$E_i(\rho, c) = \int_{\rho}^c \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^i \frac{t^{i-2} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}. \quad (4.2)$$

При условии $\rho < c$ найдем производную от $E_i(\rho, c)$ по ρ , используя известные правила дифференцирования интеграла, зависящего от параметра.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE_i(\rho, c)}{d\rho} &= -i \int_{\rho}^c \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^{i-1} \frac{t^{i-3} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)} + c'_{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{c}\right)^i \frac{c^i \sin^2 c}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - c^2)} - \\ &\quad - \rho'_{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{\rho}\right)^i \frac{\rho^{i-2} \sin^2 \rho}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - \rho^2)} = -i \int_{\rho}^c \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^{i-1} \frac{t^{i-3} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}. \end{aligned}$$

При $c \rightarrow \infty$ (имея в виду (4.2)) получим

$$\frac{dE_i(\rho)}{dt} = -i \int_{\rho}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^{i-1} \frac{t^{i-3} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}.$$

Отсюда

$$\Phi'_i(\rho) = -i 2^i \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_{\rho}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^{i-1} \frac{t^{i-3} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}. \quad (4.3)$$

Но

$$\Phi_{i-1}(\rho) = 2^{i-1} \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_{\rho}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^{i-1} \frac{t^{i-3} \sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}. \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.3) и (4.4) получим (4.1).

Предложение 1 доказано.

Для того, чтобы распространить (4.1) на случай $i = 1$, формально определим

$$\Phi_0(\rho) = \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m (k_j)^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^m (\pi^2 k_j^2 - t^2)}.$$

Предложение 2. При $i > 0$ имеет место равенство

$$\Phi_{2i}(0) = 0. \quad (4.5)$$

Доказательство. Известно (см., в частности, [5]), что (при $i \leq m$)

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^{2i}, 0) = J(2i)n^{-2i} + o(n^{-2i}), \quad (4.6)$$

где в данном случае $J(2i) = 2\Phi_{2i}(0)$.

Но, с другой стороны, известно, что при любом целом $i > 0$ выполняется

$$M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(t^{2i}, 0) = O(n^{-2m-1}). \quad (4.7)$$

(См. [3], мы уже ссылались ранее на этот факт).

Равенства (4.6) и (4.7) могут одновременно выполняться только в том случае, если выполнено (4.5).

Предложение 2 доказано.

Отметим без доказательства довольно очевидное свойство функций $\Phi_i(\rho)$ и $\Phi'_i(\rho)$.

При любом $m > 0$ и при $0 < i < 2m + 1$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_i(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_i'(\rho) = 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим отдельно случай $m = 1$.

Тогда определяющий $\Phi_i(\rho)$ интеграл сходится (при $\rho > 0$) в случаях $i = 1, 2$. Совокупность параметров $\{k_j\}$ состоит из одного числа k_1 , которое будем обозначать просто k (без индекса).

Предложение 3. При $m = 1$ и любом допустимом значении k выполняется неравенство $\Phi_1(0) > 0$.

Доказательство. Согласно (4.5) $\Phi_2(0) = 4\pi k^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 t dt}{\pi^2 k^2 - t^2} = 0$.

Определим функцию $W(t)$ равенством $W(t) = 4\pi k^2 \frac{\sin^2 t}{t(\pi^2 k^2 - t^2)}$. Тогда $\Phi_1(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty W(t) dt$, $\Phi_2(0) = \int_0^\infty t W(t) dt$.

По теореме о среднем имеем

$$\int_0^{k\pi} t W(t) dt = \xi_1 \int_0^{k\pi} W(t) dt, \quad \xi_1 \in (0, k\pi).$$

На $(k\pi, \infty)$ выполняется $W(t) \leq 0$ (равенство только в точках $t = p\pi$, $p > k$ — целое).

Отсюда $\int_{k\pi}^\infty t W(t) dt = \xi_2 \int_{k\pi}^\infty W(t) dt$, при этом $\xi_2 > \xi_1$. Учитывая, что $\Phi_2(0) = \int_0^\infty t W(t) dt = 0$, имеем $\xi_1 \int_0^{k\pi} W(t) dt = -\xi_2 \int_{k\pi}^\infty W(t) dt$. Так как $\xi_2 > \xi_1$, получим $\int_0^{k\pi} W(t) dt > -\int_{k\pi}^\infty W(t) dt$. Отсюда $\Phi_1(0) > 0$.

Предложение 3 доказано.

Выпишем для случая $m = 1$ функции $\Phi_2(\rho)$, $\Phi_1(\rho)$, $\Phi_0(\rho)$:

$$\Phi_2(\rho) = 4\pi k^2 \int_\rho^\infty \left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^2 \frac{\sin^2 t dt}{\pi^2 k^2 - t^2},$$

$$\Phi_1(\rho) = 2\pi k^2 \int_\rho^\infty \left(1 - \frac{\rho}{t}\right) \frac{\sin^2 t dt}{t(\pi^2 k^2 - t^2)},$$

$$\Phi_0(\rho) = \pi k^2 \int_\rho^\infty \frac{\sin^2 t dt}{t^2(\pi^2 k^2 - t^2)}.$$

Исследуем поведение $\Phi_1(\rho)$.

Мы установили, что $\Phi_1(0) > 0$. Известно (см., в частности, [5]), что $\Phi_0(0) = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\Phi_1'(0) < 0$. Далее, $\Phi_0(\rho)$ меняет знак с плюса на минус в некоторой точке $\rho_0 < k\pi$, при этом $\Phi_0(\rho) > 0$ при $\rho \in [0, \rho_0)$, $\Phi_0(\rho) < 0$ при $\rho \in (\rho_0, \infty)$.

Отсюда (так как $2\Phi_0(\rho) = -\Phi_1'(\rho)$), $\Phi_1(\rho)$ убывает на $[0, \rho_0]$, возрастает на $[\rho_0, \infty)$, в точке $\rho = \rho_0$ функция $\Phi_1(\rho)$ имеет минимум. Кроме того, $\Phi_1(\rho_0) < 0$. И, отсюда получаем, что $\Phi_1(\rho)$ меняет знак с плюса на минус в некоторой точке $\rho_1 < \rho_0$.

Из выше изложенного можно извлечь следующую информацию о $\Phi_2(\rho)$: 1) $\Phi_2(\rho) < 0$ при $\rho \in (0, \infty)$, 2) в точке $\rho = \rho_1$ функция $\Phi_2(\rho)$ имеет минимум, убывает на $[0, \rho_1]$, возрастает на $[\rho_1, \infty)$.

Литература

- [1] Баскаков, В.А. Об одном методе построения операторов класса S_{2m} / В.А.Баскаков // Теория функций и приближений. Интерполяция по Лагранжу. – Саратов, 1984. – С. 19–25.
- [2] Баскаков, В.А. Об операторах класса S_{2m} , построенных на ядрах Фейера / В.А.Баскаков // Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь, 2001. – С. 5–11.
- [3] Дубровина, Т.В. Оценка характеристик, определяющих аппроксимативные свойства тригонометрических операторов Баскакова и некоторых других методов суммирования рядов Фурье: автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук / Т.В.Дубровина. – Красноярск, 2005. – 13 с.
- [4] Коган, Е.С. Оценка приближения функций операторами Баскакова в точке разрыва производной и вблизи этой точки / Е.С.Коган // Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: ТвГУ, 2004. – С. 107–115.
- [5] Коган, Е.С. Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов Lip_{α} : автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук / Е.С.Коган. – Красноярск, 2005. – 16 с.
- [6] Шерстюк, Т.Ю. Приближение операторами Баскакова функций вблизи точек разрыва производных / Т.Ю.Шерстюк // IV Всероссийская научно-практическая конференция "Кулагинские чтения" (материалы конференции). – Чита: ЧитГУ, 2006. – Ч. III. – С. 196–200.

Поступила в редакцию 2/XI/2006;
В окончательном варианте —2/XI/2006.

**ON APPROXIMATION OF FUNCTIONS
WITH ORDINARY DISCONTINUITY OF DERIVATIVES
BY SEVERAL SUMMATION METHODS FOR FOURIER
SERIES**

© 2007 T.U. Sherstyuk²

Baskakov's operators were determined by V.A. Baskakov in 2001. At present time approximate properties of operators are studied by such mathematicians U.G. Abakumov, E.S. Kogan, T.V. Dubrovina.

The result including the solution of the evaluation of approximation of function by trigonometric Baskakov's operators problem is proved in the paper. These functions have continuous derivative of the $(i - 1)$ th order. The derivative of the first order have discontinuity of the first kind. The theorem is based on auxiliary propositions, which are given with their proofs.

Some characteristics of Baskakov's operators are studied.

Paper received 2/XI/2006.

Paper accepted 2/XI/2006.

²Sherstyuk Tatyana Yurievna (chitatatyana@mail.ru), Dept. of Mathematics, Chita State University, Chita, 672039, Russia.