УДК 517.928.1

АППРОКСИМАЦИИ ЭЙЛЕРА И УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2007 О.П. Филатов[1]

Для односторонне липшицевых дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными получена оценка погрешности аппроксимации решений с помощью разностной схемы Эйлера. Из этого результата следует теорема усреднения для дифференциальных включений.

Введение

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \mu F(t,x,y,\mu), \quad x(0) = x_0, \\ &\dot{y} \in G(t,x,y,\mu), \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F, G : D \to Kv(\mathbb{R}^{m_1}), Kv(\mathbb{R}^{m_2})$ — отображения в множество непустых и выпуклых компактов евклидовых пространств $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно, $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times [0,a]$, $a > 0$, μ — малый параметр. Задача рассматривается на отрезке времени $I_\mu = [0, 1/\mu]$, $\mu > 0$. Решением задачи (1) называется пара абсолютно непрерывных функций $x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot)$, определенных на отрезке I_μ, которые почти всюду удовлетворяют системе (1). Скалярное произведение в каждом из пространств $\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$ обозначается одинаково — $\langle\cdot,\cdot\rangle$, также как и соответствующая норма — $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x в любом из пространств $\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$ обозначается $B(x,r)$. Отклонение по Хаусдорфу для множеств A и C из пространства R^{m_1} или R^{m_2} будем обозначать $h(A,C) = \max\{ex(A,C), ex(C,A)\}$, где полуотклонение множества A от множества C определяется соотношением

$$ex(A,C) = \inf\{r > 0 : A \subset C + B(0,r)\}.$$

Здесь сумма множеств $C + B = \{x : x = c + b, c \in C, b \in B\}$. Евклидово расстояние между множествами A, B обозначается $\rho(A,B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$.

Системе (1) сопоставим порождающую задачу

$$\begin{aligned} &\dot{a} = 0, \quad a(t_0) = a_0, \\ &\dot{b} \in G(t,a,b,0), \quad b(t_0) = b_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где начальные данные $t_0 \geqslant 0$, $a_0 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ являются произвольными. Обозначим

$$S_T(t_0, a_0, b_0, b(\cdot)) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} F(t, a_0, b(t), 0)\, dt,$$

[1]Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru.), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова 1.

где $(a_0, b(\cdot))$ — некоторое решение задачи (2), и введем объединение по всем $b(\cdot)$ конечных средних

$$M_T(t_0, a_0, b_0) = \bigcup_{b(\cdot)} S_T(t_0, a_0, b_0, b(\cdot)).$$

Допустим, что для отображения $F_0 : R^{m_1} \to Kv(R^{m_1})$ выполняется соотношение

$$\lim_{T\to\infty} h\Big(M_T(t_0, a_0, b_0), F_0(a_0)\Big) = 0 \tag{3}$$

равномерно по $t_0 \geqslant 0$, $a_0 \in B(x_0, r_0)$, $b_0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ для некоторого $r_0 > 0$, которое выбирается таким образом, чтобы любая фазовая кривая усредненной задачи

$$\dot u \in \mu F_0(u), \quad u(0) = x_0 \tag{4}$$

принадлежала шару $B(x_0, r_0)$ на отрезке определения решения I_μ вместе с некоторой ε_0-окрестностью, где $\varepsilon_0 > 0$.

Определение 1. Будем говорить, что задача (4) взаимно аппроксимирует задачу (1) по медленным переменным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для произвольного $\mu \in (0, \mu_0]$ и любого решения $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$ задачи (1) найдется решение $u_\mu(\cdot)$ задачи (4), для которого

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in I_\mu. \tag{5}$$

Более того, для произвольного решения $u_\mu(\cdot)$ задачи (4) должно существовать решение $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$ задачи (1) с оценкой (5).

Заметим, если в определении 1 ограничиться только первым требованием, то есть для любого решения задачи (1) потребовать существование решения задачи (4) с оценкой (5), то получим определение *аппроксимации сверху.* Если ограничиться только вторым требованием, то получим определение *аппроксимации снизу.*

Теоремы о взаимной аппроксимации относятся к *принципу усреднения* для систем дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными и являются естественным обобщением классических результатов теории усреднения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2].

В [3] модификация принципа усреднения рассматривалась для вырожденных систем.

Целью данной статьи является доказательство теоремы о взаимной аппроксимации в классе односторонне липшицевых систем дифференциальных включений (1). Заметим, что для липшицевых дифференциальных включений доказательства теорем усреднения для задач с медленными переменными приведены в [4], а для систем вида (1) в [5, 6]. Для односторонне липшицевых дифференциальных включений с медленными переменными теорема усреднения приведена в [8]; для систем дифференциальных включений (1) доказана теорема об аппроксимации сверху [9]. В [12] был рассмотрен частный случай системы (1), когда отображения F и G не зависели от малого параметра μ, при этом с позиций разностных схем Эйлера в этой работе удалось получить доказательство теоремы усреднения о взаимной аппроксимации. Основными результатами данной работы являются теоремы 4 и 7.

1. Общие условия

Введем класс $L_1^b \subset L_1^{loc}$ локально интегрируемых функций $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для каждой из которых найдутся числа $T = T(\lambda) > 0$ и $l = l(\lambda) > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+\Delta} \lambda(s)\, ds \leqslant l\Delta, \quad t \in R_+, \quad \Delta \geqslant T.$$

Кроме того, введем класс K непрерывных строго монотонных функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = 0$. Норму множества A обозначаем символом $\|A\| = \sup_{a\in A} \|a\|$.

Сформулируем теперь общие свойства отображений

$$F, G : D \to Kv(\mathbb{R}^{m_1}), Kv(\mathbb{R}^{m_2}), \quad (t, z, \mu) \to F(t, z, \mu), G(t, z, \mu),$$

где $z = (x, y)$. Пусть также $r_x = \|x_1 - x_2\|$, $r_y = \|y_1 - y_2\|$.

1) функции $F(\cdot, z, \mu), G(\cdot, z, \mu)$ являются измеримыми для любых $z \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$, $\mu \in [0, a]$, при этом выполняются неравенства

$$|F(t, z, \mu)| \leqslant c_1(t)(1 + \|x\|), \quad (t, z, \mu) \in D,$$

$$|G(t, z, \mu)| \leqslant c_2(1 + \|x\| + \|y\|), \quad (t, z, \mu) \in D,$$

где $c_1 \in L_1^b$, c_2 — постоянная;
2) отображения $F(t, \cdot, \cdot)$, $G(t, \cdot, \cdot)$ равномерно непрерывны

$$h(F(t, z_1, 0), F(t, z_2, \mu)) \leqslant \alpha_1(t)(\sigma_1(r_x) + \sigma_2(r_y) + \omega_1(\mu)),$$
$$h(G(t, z_1, \mu), G(t, z_2, \mu)) \leqslant \alpha_2(t)(\sigma_3(r_x) + \sigma_4(r_y) + \omega_2(\mu)),$$

где (t, z_1, μ), $(t, z_2, \mu) \in D$, $\sigma_s, \omega_l \in K$, $\alpha_1, \alpha_2 \in L_1^b$, $s = 1, 2, \ldots, 4$, $l = 1, 2$;
3) для любых (t, z_1, μ), $(t, z_2, \mu) \in D$, $u_1 \in F(t, z_1, \mu)$, $u_2 \in G(t, z_1, \mu)$ найдутся векторы $v_1 \in F(t, z_2, \mu)$ и $v_2 \in G(t, z_2, \mu)$ такие, что

$$\langle x_1 - x_2, u_1 - v_1\rangle \leqslant \alpha_3(t)(r_x + r_y)r_x,$$
$$\langle y_1 - y_2, u_2 - v_2\rangle \leqslant \alpha_4(t)(r_y + r_x)r_y,$$

где $\alpha_3, \alpha_4 \in L_1^b$.

Заметим, что если для отображений F и G выполняется условие 3), то отображение $(\mu F) \times G$ удовлетворяет условию односторонней липшицевости [7] по совокупности переменных (x, y), так как в этом случае

$$\langle x_1 - x_2, \mu u_1 - \mu v_1\rangle + \langle y_1 - y_2, u_2 - v_2\rangle \leqslant \gamma_\mu(t)(\|r_x\|^2 + \|r_y\|^2),$$

где $\gamma_\mu(t) = 3(\mu\alpha_3(t) + \alpha_4(t))/2$.

Нетрудно проверить, что условие 3) выполняется для отображения F, удовлетворяющего по переменным x условию односторонней липшицевости, а по переменным y — условию Липшица. Более того, отображение $F(t, \cdot, \mu)$ может быть и разрывным. В качестве примера рассмотрим случай $m_1 = m_2 = 1$ и $F(x, y) = \{f(x, y)\}$, где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R$ определяется соотношениями:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0 \text{ или } x = 0 \text{ и } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x > 0 \text{ или } x = 0 \text{ и } y < 0. \end{cases}$$

Тогда $(x_1 - x_2)(f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)) \leqslant 0$ для любых x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому условие 3) будет выполнено, если принять $\alpha_3 = 0$. В данном примере отображение $F(\cdot, y)$ разрывно при $x = 0$ и любом фиксированном $y \in \mathbb{R}$, а отображение $F(0, \cdot)$ разрывно по второй переменой в точке $y = 0$.

2. Определения, оценки и лемма

Нам потребуются разностные аппроксимации решений дифференциальных включений. Поэтому на отрезке I_μ введем сетку $\Pi_\mu = \{t_i : t_i = i\Delta, i = 0, 1, \ldots, m\}$ с шагом $\Delta > 0$, $\mu m\Delta = 1$, и более мелкую сетку $\Omega_\mu = \{t_{i,j} : t_{i,j} = t_i + j\tau, i = 0, 1, \ldots, m - 1, \ j = 0, 1, \ldots, n\}$ с шагом $\tau > 0$. Обозначим $I_i = [t_i, t_{i+1}], I_{i,j} = [t_{i,j}, t_{i,j+1}]$. Далее мы будем рассматривать сетки Π_μ и Ω_μ, у которых целые m и n зависят от малого параметра μ, при этом шаг $\Delta = \Delta_\mu$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu\to 0} \Delta_\mu = \infty. \tag{6}$$

Задаче (1) сопоставим разностную схему

$$\begin{aligned} \dot\xi &\in \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad \xi(0) = x_0, \\ \dot\eta &\in G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad \eta(0) = y_0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $t \in I_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Здесь $\xi_i = \xi_\mu(t_i)$, $\eta_{i,j} = \eta_\mu(t_{i,j})$, $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ — решение задачи (7). Нетрудно убедиться на примере, что при выполнении условия (6) для сеток Π_μ и Ω_μ невозможно, вообще говоря, для данного решения задачи (1) и заданной точности в равномерной метрике подобрать решение задачи (7), которое бы гарантировало требуемую точность приближения по медленным переменным x (тем более и по быстрым y) при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ на отрезке I_μ. Поэтому расширим множество решений задачи (7) до класса *квазирешений* и попытаемся решить задачу аппроксимации в этом классе.

Определение 2. Квазирешением задачи (7) будем называть функцию $\zeta_\mu(\cdot) = (\xi_\mu(\cdot), \eta_\mu(\cdot))$, определенную на отрезке I_μ, для которой выполняются следующие условия:

a) $\zeta_\mu(\cdot)$ является решением системы (7) в любом промежутке $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$;

b) функция $\xi_\mu(\cdot)$ непрерывна в узлах сетки Π_μ;

c) функция $\eta_\mu(\cdot)$ в узлах сетки Π_μ может иметь разрывы первого рода (существуют конечные левый и правый пределы), при этом функция непрерывна справа, т.е. $\eta_\mu(t_i) = \eta_\mu(t_i + 0)$.

В частности, любое решение задачи (7) является и квазирешением этой задачи.

Определение 3. Квазирешение $\zeta_\mu(\cdot)$ задачи (7) будем называть допустимым, если существует такое решение $z_\mu(\cdot) = (x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot))$ задачи (1), называемое направляющим, для которого имеют место равенства

$$\eta_\mu(t_i) = y_\mu(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Направляющее решение задачи (1) для данного допустимого квазирешения задачи (7) определено, вообще говоря, неоднозначно.

Определение 4. Будем говорить, что задача (7) аппроксимирует сверху задачу (1) по медленным переменным в классе квазирешений, если для любого решения $z_\mu(\cdot)$ задачи (1) и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что если $\mu \in (0, \mu_0]$, то найдутся сетки Π_μ, Ω_μ, удовлетворяющие условию (6), и допустимое квазирешение $\zeta_\mu(\cdot)$ задачи (7), для которого выполняется неравенство

$$\|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \qquad t \in I_\mu.$$

Если, кроме того, аналогичное неравенство имеет место и для быстрых переменных

$$\|y_\mu(t) - \eta_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \qquad t \in I_\mu,$$

то будем говорить, что задача (7) аппроксимирует сверху задачу (1) в классе квазирешений.

На основании формулы Ньютона–Лейбница, леммы Гроноулла–Беллмана и условия 1 нетрудно получить оценки для произвольного решения $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$ задачи (1):

$$\|x_\mu(t)\| \leqslant M_1, \quad \|y_\mu(t)\| \leqslant M_2, \quad t \in I_\mu,$$

где $\mu \leqslant 1/T_1$. Здесь постоянные $T_1 = T(c_1)$ и $l_1 = l(c_1)$ получены из условия $c_1 \in L_1^b$,

$$M_1 = M_1(x_0) = (\|x_0\| + l_1)e^{l_1},$$

$$M_2 = M_2(x_0, y_0, \mu) = (\|y_0\| + c_2(1 + M_1)/\mu)e^{c_2/\mu},$$

где постоянная c_2 из условия 1).

Для произвольного квазирешения $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ задачи (7), используя условие 1, также нетрудно получить оценку для медленных переменных $\|\xi_\mu(t)\| \leqslant M_1$, $t \in I_\mu$, где $\mu \leqslant 1/T_1$. Кроме того, если квазирешение является допустимым и шаг сетки $\Delta \geqslant T_1$, то справедлива оценка для быстрых переменных $\|\eta_\mu(t)\| \leqslant M_3$, $t \in I_\mu$, где $\mu \leqslant 1/T_1$. Здесь $M_3 = M_3(x_0, y_0, \Delta, \mu) = (M_2 + c_2\Delta(1 + M_1))e^{c_2\Delta}$.

Обозначим $\xi_i = \xi_\mu(t_i)$, $\eta_\mu(t_{i,j}) = \eta_{i,j}$, $\kappa_1 = \kappa_1(x_0, \Delta, \mu) = \mu\Delta l_1(1 + M_1)$, $\kappa_2 = \kappa_2(x_0, y_0, \tau, \mu) = c_2\tau(1 + M_1 + M_2)$. Тогда, если шаг сетки $\Delta \geqslant T_1$, то для любого допустимого квазирешения $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ задачи (7) стандартными рассуждениями получаются неравенства

$$\begin{aligned} &\|\xi_\mu(t) - \xi_i\| \leqslant \kappa_1, \quad t \in I_i,\\ &\|\eta_\mu(t) - \eta_{i,j}\| \leqslant \kappa_2, \quad t \in [t_{i,j}, t_{i,j+1}), \end{aligned} \tag{9}$$

где $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Введем обозначения $b_1 = b_1(t, \kappa_1, \kappa_2) = \alpha_1(t)(\sigma_1(\kappa_1) + \sigma_2(\kappa_2))$, $b_2 = b_2(t, \kappa_1, \kappa_2) = \alpha_2(t)(\sigma_3(\kappa_1) + \sigma_4(\kappa_2))$, где κ_1, κ_2 из соотношений (9). Из условия 2 и неравенств (9) непосредственно следует

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1, 2 и шаг сетки $\Delta \geqslant T_1$. Тогда для любого допустимого квазирешения $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ задачи (7) выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &h\Big(\mu F(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu), \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu)\Big) \leqslant \mu b_1,\\ &h\Big(G(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu), G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu)\Big) \leqslant b_2, \end{aligned}$$

где $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $t \in [t_{i,j}, t_{i,j+1})$.

3. Правильные пары решений и квазирешений

В этом разделе вводятся некоторые понятия, которые лежат в основе теорем аппроксимации в классе квазирешений для задач (1) и (7). Для данного решения $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$ задачи (1) отвечающее ему допустимое квазирешение $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ определено, вообще говоря, неоднозначно. Среди всех таких квазирешений мы выделим те, которые аппроксимируют решение задачи (1) с достаточной точностью. Соответствующую пару — решение задачи (1) и квазирешение задачи (7) — мы будем называть правильной (см. определение 4 ниже). Построение квазирешения задачи (7) проведем индуктивно, используя технику доказательства теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального включения от исходных данных из [7]. Допустим, что на отрезке $[0, t_{i,j}]$ решение построено. Продолжим его на отрезок $I_{i,j}$. Для этой цели фиксируем $t \in I_{i,j}$, векторы $\xi \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\eta \in \mathbb{R}^{m_2}$ и определим множества

$$A_1(t, \xi, \eta, \mu) = \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu) \cap E_1(t, \xi, \eta, \mu),$$

$$\leqslant A_2(t, \xi, \eta, \mu) = G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu) \cap E_2(t, \xi, \eta, \mu).$$

Здесь

$$E_1(t, \xi, \eta, \mu) = \{w_1 \in R^{m_1} : \langle x_\mu(t) - \xi, \dot{x}_\mu(t) - w_1\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \mu\alpha_3(t)r_x^\xi(r_x^\xi + r_y^\eta) + \mu r_x^\xi b_1\},$$

$$E_2(t,\xi,\eta,\mu) = \{w_2 \in R^{m_2} : \langle y_\mu(t) - \eta, \dot y_\mu(t) - w_2\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_4(t)r_y^\eta(r_y^\eta + r_x^\xi) + r_y^\eta b_2\},$$

где b_1, b_2 из леммы 4, $r_x^\xi = \|x_\mu(t) - \xi\|, r_y^\eta = \|y_\mu(t) - \eta\|$. Покажем, что множества A_1 и A_2 не являются пустыми. Действительно, для произвольных t, ξ, η по условию 3) найдутся $w_1 \in \mu F(t,\xi,\eta)$ и $w_2 \in G(t,\xi,\eta)$ такие, что

$$\langle x_\mu(t) - \xi, \dot x_\mu(t) - w_1\rangle \leqslant \mu\alpha_3(t)r_x^\xi(r_x^\xi + r_y^\eta),$$

$$\langle y_\mu(t) - \eta, \dot y_\mu(t) - w_2\rangle \leqslant \alpha_4(t)r_y^\eta(r_y^\eta + r_x^\xi).$$

Для найденных векторов w_1 и w_2 возьмем такие векторы

$$v_1 \in \mu F(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu), v_2 \in G(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu),$$

чтобы выполнялись равенства

$$\rho(w_1, \mu F(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) = \|w_1 - v_1\|, \quad \rho(w_2, G(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) = \|w_2 - v_2\|.$$

Так как

$$\rho(w_1, \mu F(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) \leqslant h(\mu F(t,\xi,\eta,\mu), \mu F(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) \leqslant \mu b_1,$$
$$\rho(w_2, G(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) \leqslant h(G(t,\xi,\eta,\mu), G(t,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)) \leqslant b_2,$$

то получим

$$\langle x_\mu(t) - \xi, \dot x_\mu(t) - v_1\rangle = \langle x_\mu(t) - \xi, \dot x_\mu(t) - w_1\rangle + \langle x_\mu(t) - \xi, w_1 - v_1\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \mu\alpha_3(t)r_x^\xi(r_x^\xi + r_y^\eta) + \mu r_x^\xi b_1,$$
$$\langle y_\mu(t) - \eta, \dot y_\mu(t) - v_2\rangle = \langle y_\mu(t) - \eta, \dot y_\mu(t) - w_2\rangle + \langle y_\mu(t) - \eta, w_2 - v_2\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_4(t)r_y^\eta(r_y^\eta + r_x^\xi) + r_y^\eta b_2.$$

Отсюда следует, что $w_k \in E_k$, $k = 1, 2$, а значит $w_k \in A_k$, $k = 1, 2$. Таким образом, $A_1, A_2 \neq \emptyset$. Следовательно, имеет смысл задача

$$\begin{aligned} &\dot\xi \in A_1(t,\xi,\eta,\mu), \quad \xi(t_{i,j}) = \xi_{i,j},\\ &\dot\eta \in A_2(t,\xi,\eta,\mu), \quad \eta(t_{i,j}) = \eta_{i,j}, \end{aligned} \tag{10}$$

где векторы $\xi_{i,j} \in R^{m_1}$, $\eta_{i,j} \in R^{m_2}$ определены по индуктивному предположению с учетом равенств (8), если $j = 0$. Для правой части системы (10) выполнены условия существования решения на отрезке времени $I_{i,j}$ [?, теорема 5.2]. Возьмем теперь произвольное решение этой системы и будем его считать продолжением квазирешения системы (7) на отрезок $I_{i,j}$. Таким образом, можно считать, что допустимое квазирешение $\zeta_\mu(\cdot) = (\xi_\mu(\cdot),\ \eta_\mu(\cdot))$ задачи (7) построено на всем отрезке I_μ. Из результатов построения следует, что функции

$$u_\mu(t) = \|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\|, \quad v_\mu(t) = \|y_\mu(t) - \eta_\mu(t)\| \tag{11}$$

в каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, удовлетворяют (почти всюду) системе дифференциальных неравенств

$$\begin{aligned} &\dot u_\mu(t) \leqslant \mu\alpha_3(t)(u_\mu(t) + v_\mu(t)) + \mu b_1,\\ &\dot v_\mu(t) \leqslant \alpha_4(t)(u_\mu(t) + v_\mu(t)) + b_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Построенное квазирешение $\zeta_\mu(\cdot)$, как будет показано в п. 5, позволяет с требуемой точностью аппроксимировать соответствующее решение $z_\mu(\cdot) = (x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot))$ задачи (1) при достаточно малом параметре μ.

Определение 4. Пару $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ будем называть правильной, если $z_\mu(\cdot)$ является направляющим решением для квазирешения $\zeta_\mu(\cdot)$, а функции (11) почти всюду удовлетворяют системе дифференциальных неравенств (12) в любом промежутке $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1)–3). Тогда для любого решения $z_\mu(\cdot)$ задачи (1) существует допустимое квазирешение $\zeta_\mu(\cdot)$ задачи (7) такое, что пара $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ является правильной.

Заметим, что правильную пару $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ можно строить, исходя из произвольного решения $\zeta_\mu(\cdot)$ задачи (7), определенного на начальном отрезке I_0. На последующих отрезках $I_i, i = 1, 2, \ldots, m-1$ решение задачи (7) также выбирается произвольно, исходя из начальных условий на этом отрезке, выбор которых производится в соответствии с определением допустимого квазирешения задачи (7). Это построение будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)–3). Тогда для любого решения $\zeta_\mu(\cdot)$ задачи (7), определенного на отрезке I_i при некотором $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, существует решение $z_\mu(\cdot)$ задачи (1) на этом же отрезке, для которого функции (11) удовлетворяют почти всюду по $t \in I_i$ системе дифференциальных неравенств (12).

Доказательство. Схема рассуждений похожа на доказательство теоремы 1. Для полноты изложения приведем основные этапы. Построение решения $z_\mu(\cdot)$ задачи (1) проводится индуктивно. Допустим, что на отрезке $[t_i, t_{i,j}]$ решение построено. Продолжим его на отрезок $I_{i,j}$. Для этого фиксируем $t \in I_{i,j}$, векторы $x \in R^{m_1}, y \in R^{m_2}$ и определим множества

$$B_1(t, x, y, \mu) = \mu F(t, x, y, \mu) \cap D_1(t, x, y, \mu),$$

$$B_2(t, x, y, \mu) = G(t, x, y, \mu) \cap D_2(t, x, y, \mu).$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_1(t, x, y, \mu) = \{w_1 \in R^{m_1} : \langle \xi_\mu(t) - x, \dot{\xi}_\mu(t) - w_1 \rangle \leqslant \\ \leqslant \mu\alpha_3(t) r_\xi^x (r_\xi^x + r_\eta^y) + \mu r_\xi^x b_1\}, \\ D_2(t, x, y, \mu) = \{w_2 \in R^{m_2} : \langle \eta_\mu(t) - y, \dot{\eta}_\mu(t) - w_2 \rangle \leqslant \\ \leqslant \alpha_4(t) r_\eta^y (r_\eta^y + r_\xi^x) + r_\eta^y b_2\}, \end{aligned}$$

где b_1, b_2 из леммы 1, $r_\xi^x = \|\xi_\mu(t) - x\|$, $r_\eta^y = \|\eta_\mu(t) - y\|$. Покажем, что множества B_1 и B_2 не являются пустыми. По условию

$$\dot{\xi}_\mu(t) \in \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad \dot{\eta}_\mu(t) \in G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad t \in I_{i,j}.$$

По лемме 1 выполняются неравенства

$$h(\mu F(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu), \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu)) \leqslant \mu b_1, h(G(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu),$$

$$G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu)) \leqslant b_2.$$

Поэтому можно выбрать селектор $v_1(t) \in \mu F(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu)$ и селектор $v_2(t) \in G(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\dot{\xi}_\mu(t) - v_1(t)\| = \rho(v_1(t), \mu F(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu)) \leqslant \mu b_1, \\ \|\dot{\eta}_\mu(t) - v_2(t)\| = \rho(v_2(t), G(t, \xi_\mu(t), \eta_\mu(t), \mu)) \leqslant b_2, \end{aligned}$$

где $t \in I_{i,j}$. Для данных t, x, y по условию 3) найдутся векторы $w_1 \in \mu F(t, x, y, \mu)$ и $w_2 \in G(t, x, y, \mu)$, для которых

$$\begin{aligned} \langle \xi_\mu(t) - x, v_1(t) - w_1 \rangle \leqslant \mu\alpha_3(t) r_\xi^x (r_\xi^x + r_\eta^y), \\ \langle \eta_\mu(t) - y, v_2(t) - w_2 \rangle \leqslant \alpha_4(t) r_\eta^x (r_\eta^x + r_\xi^x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\langle \xi_\mu(t) - x, \dot\xi_\mu(t) - w_1\rangle = \langle \xi_\mu(t) - x, v_1(t) - w_1\rangle + \langle \xi_\mu(t) - x, \dot\xi_\mu(t) - v_1(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \mu\alpha_3(t) r^x_\xi (r^x_\xi + r^y_\eta) + \mu r^x_\xi b_1,$$
$$\langle \eta_\mu(t) - y, \dot\eta_\mu(t) - w_2\rangle = \langle \eta_\mu(t) - y, v_2(t) - w_2\rangle + \langle \eta_\mu(t) - y, \dot\eta_\mu(t) - v_2(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_4(t) r^y_\eta (r^y_\eta + r^x_\xi) + r^y_\eta b_2.$$

Отсюда следует, что $w_k \in D_k$, $k = 1,2$, а значит $w_k \in B_k$, $k = 1,2$. Таким образом, $B_1, B_2 \neq \emptyset$. Задача

$$\dot x \in B_1(t, x, y, \mu), \quad x(t_{i,j}) = x_{i,j},$$
$$\dot y \in B_2(t, x, y, \mu), \quad y(t_{i,j}) = y_{i,j},$$

где $x_{i,j} = x_\mu(t_{i,j})$, $y_{i,j} = y_\mu(t_{i,j})$, согласно [**?**, Теорема 5.2] имеет решение на отрезке $I_{i,j}$, которое мы и рассматриваем в качестве продолжения уже построенного решения. Следовательно, на всем отрезке I_i решение $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$ задачи (1) можно считать определенным. Далее, как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно убедиться, что функции (11) на отрезке I_i удовлетворяют (почти всюду) системе дифференциальных неравенств (12). Теорема доказана.

4. Теоремы эйлеровой аппроксимации для системы

Следующая теорема оправдывает введение правильных пар $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ с точки зрения вопросов аппроксимации.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)–3) и задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для некоторых сеток Π_μ, Ω_μ, где $\mu \in (0, \mu_0]$, выполняется условие (6), при этом $\mu\Delta_\mu \to 0$ при $\mu \to 0$, и для произвольной правильной пары $(z_\mu(\cdot),\ \zeta_\mu(\cdot))$ выполняются неравенства

$$\|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad \|y_\mu(t) - \eta_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in I_\mu.$$

Доказательство. Обозначим $w(t) = u_\mu(t) + v_\mu(t)$. Тогда, складывая неравенства системы (12), получим

$$\dot w \leqslant \alpha(t) w + b(t), \tag{13}$$

где $\alpha(t) = \mu\alpha_3(t) + \alpha_4(t)$, $b = \mu b_1 + b_2$. На основании (12) и (13) получим оценки для функций u_μ и v_μ на отрезке I_0, используя начальные условия $u_\mu(0) = 0$, $v_\mu(0) = 0$. Из (13) имеем

$$w(t) \leqslant \int_0^t b(s) e^{\int_s^t \alpha(z)\,dz} ds.$$

Далее будем считать

$$\Delta \geqslant T_0 = \max\{T(c_1), T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_4)\}, \tag{14}$$

где функции $c_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_4$ из условий 1–3. С учетом соотношения (14) (которое будет выполнено, как мы увидим ниже, за счет параметра μ) имеем

$$\int_s^t \alpha(z)\,dz \leqslant \int_0^\Delta \alpha(z)\,dz \leqslant (\mu l_3 + l_4)\Delta,$$

где $l_k = l(\alpha_k)$, $k = 3,4$. Кроме того, $\int_0^t b(s)\,ds \leqslant \mu\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2$, где

$$\psi_1 = \psi_1(\kappa_1, \kappa_2) = l_1(\sigma_1(\kappa_1) + \sigma_2(\kappa_2)), \ \ \psi_2 = \psi_1(\kappa_1, \kappa_2) = l_2(\sigma_3(\kappa_1) + \sigma_4(\kappa_2)).$$

Следовательно, $w(t) \leqslant v_0$, где

$$v_0 = v_0(\mu, \Delta) = (\mu\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2) e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta}. \tag{15}$$

Поскольку $v_\mu(t) \leqslant w(t)$, то $v_\mu(t) \leqslant v_0$, $t \in [t_0, t_1)$. Отсюда и первого неравенства в (12) получим уточненную оценку для функции $u_\mu(\cdot)$ (грубая оценка $u_\mu(t) \leqslant w(t)$)

$$u_\mu(t) \leqslant \mu \int_0^t (b_1(s) + \alpha_3(s)v_0)e^{\mu\int_s^t \alpha_3(z)\,dz} ds \leqslant u_0,$$

где

$$u_0 = \mu\Delta e^{\mu l_3 \Delta}(\psi_1 + l_3 v_0). \tag{16}$$

В частности, $u_\mu(\Delta) = u_\mu(t_1) \leqslant u_0$. Переходим теперь к оценкам на отрезке I_1. Поскольку $w(t_1) = u_\mu(t_1) + v_\mu(t_1) = u_\mu(t_1) \leqslant u_0$, то из (13) получим

$$w(t) \leqslant u_0 e^{\int_{t_1}^t \alpha(s)\,ds} + \int_{t_1}^t b(s)e^{\int_s^t \alpha(z)\,dz} ds, \qquad t \in I_1.$$

Следовательно,

$$v_\mu(t) \leqslant w(t) \leqslant u_0 e^{\int_{t_1}^{t_2} \alpha(s)\,ds} + \int_{t_1}^{t_2} b(s)e^{\int_{t_1}^{t_2} \alpha(z)\,dz} ds \leqslant v_1,$$

где $v_1 = u_0 e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta} + v_0$. Отсюда и первого неравенства в (12) получим уточненную оценку для функции $u_\mu(\cdot)$ на отрезке I_1 :

$$u_\mu(t) \leqslant \mu \int_{t_1}^t (b_1(s) + \alpha_3(s)v_1)e^{\mu\int_s^t \alpha_3(z)\,dz} ds + u_0 e^{\mu\int_{t_1}^t \alpha_3(s)\,ds} \leqslant u_1,$$

где $u_1 = u_0 e^{\mu l_3 \Delta} + \mu\Delta e^{\mu l_3 \Delta}(\psi_1 + l_3 v_1)$. В общем случае, по индукции, приходим к выводу, что на отрезке I_k выполняются неравенства

$$u_\mu(t) \leqslant u_k, \qquad v_\mu(t) \leqslant v_k, \qquad k = 1, \ldots, m-1, \tag{17}$$

где

$$u_k = u_{k-1}e^{\mu l_3 \Delta} + \mu\Delta e^{\mu l_3 \Delta}(\psi_1 + l_3 v_k), \qquad v_k = u_{k-1}e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta} + v_0, \tag{18}$$

а v_0 и u_0 определяются равенствами (15) и (16). Если исключить v_k из первого соотношения в (18) с помощью второго, то получим разностное уравнение первого порядка

$$u_k = a u_{k-1} + u_0, \qquad a = e^{\mu l_3 \Delta}(1 + \mu l_3 \Delta e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta}),$$

где $k = 1, 2, \ldots, m-1$, а значение u_0 известно. Решение этого уравнения определяется формулой

$$u_k = \frac{u_0}{a-1}(a^{k+1} - 1), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{19}$$

Оценим правую часть равенства. Поскольку $e^{\mu l_3 \Delta} = 1 + \mu\Delta l_3 + r_{\mu,\Delta}$, где $r_{\mu,\Delta} \geqslant 0$, то

$$a = 1 + \mu\Delta q, \qquad q = q(\mu, \Delta) = l_3\Big(e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta} + (1 + r_{\mu,\Delta})(1 + \mu\Delta l_3 e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta})\Big).$$

Отсюда и (16) получим

$$\frac{u_0}{a-1} = \frac{\psi_1 + l_3 v_0(\mu, \Delta)}{q} e^{\mu l_3 \Delta}. \tag{20}$$

Далее, поскольку

$$a^{k+1} \leqslant a^m = e^{l_3}(1 + \mu\Delta r)^{1/\mu\Delta}, \quad r = l_3 e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta},$$

где $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то $a^{k+1} \leqslant e^{l_3 + r}$. Поэтому из (19) и (20) следует

$$u_k \leqslant \beta_1, \quad \beta_1 = \beta_1(\mu, \Delta, \psi_1, \psi_2) = \frac{\psi_1 + l_3 v_0(\mu, \Delta)}{q} e^{l_3 + r + \mu l_3 \Delta}, \tag{21}$$

где $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Из второго соотношения в (18) и (21) получим

$$v_k = u_{k-1}e^{(\mu l_3 + l_4)\Delta} + v_0 \leqslant q\beta_1 e^{(\mu l_3+l_4)\Delta}/l_3 + v_0(\mu, \Delta) = \beta_2.$$

В нашем распоряжении шаг $\tau = \Delta/n$ сетки Ω_μ, который мы за счет целого n выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau \leqslant \mu(1 + M_1 + M_2)^{-1}. \tag{22}$$

При таком выборе шага получим $\kappa_2 \leqslant c_2\mu$. Введем теперь непрерывную функцию

$$\beta(\mu, \Delta) = \beta_2(\mu, \Delta, \psi_1(\kappa_1, c_2\mu), \psi_2(\kappa_1, c_2\mu)), \qquad \kappa_1 = \kappa_1(x_0, \Delta, \mu).$$

При условии (22) выполняются оценки

$$u_k, v_k \leqslant \beta(\mu, \Delta), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{23}$$

Заметим теперь, что функция $\beta(\mu, \Delta)$ по любой из переменных является строго возрастающей, бесконечно малой при $\mu \to 0$ и фиксированном $\Delta > 0$ и бесконечно большой при $\Delta \to \infty$ и произвольном заданном $\mu > 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ уравнение

$$\beta(\mu, \Delta) = \varepsilon \tag{24}$$

имеет единственное решение $\Delta = \Delta_*(\mu, \varepsilon)$, при этом

$$\lim_{\mu\to 0} \Delta_*(\mu, \varepsilon) = \infty. \tag{25}$$

Пусть $\Delta_{**}(\mu, \varepsilon) = \min\{1/\sqrt{\mu}, \Delta_*(\mu, \varepsilon)\}$. Выберем целое $m = m(\mu, \Delta)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\mu m} \leqslant \Delta_{**}(\mu, \varepsilon) < \frac{1}{\mu(m-1)}.$$

Так как $(\mu m)^{-1} > (\mu + \Delta_{**}^{-1})^{-1}$, то из (25) следует, что для функции $\Delta_0(\mu, \varepsilon) = 1/(\mu m)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\mu\to 0} \Delta_0(\mu, \varepsilon) = \infty. \tag{26}$$

Следовательно, если шаг Δ_μ сетки Π_μ выбрать равным $\Delta_0(\mu, \varepsilon)$, а малый шаг τ подчинить условию (22), то из (16), (23) и (24) получим оценки

$$u_\mu(t), v_\mu(t) \leqslant \varepsilon, \quad t \in I_\mu,$$

при этом для достаточно малого $\mu_0 > 0$ из (26) и включения $\mu \in (0, \mu_0]$ следует выполнение неравенства (14), которое использовалось при выводе. Кроме того, очевидно, выполняется и предельное равенство $\lim_{\mu\to 0} \mu\Delta_\mu = 0$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 непосредственно следует

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1)–3). Тогда задача (7) в классе допустимых квазирешений аппроксимирует сверху задачу (1), при этом для шага сетки Δ_μ выполняется условие (6) и $\mu\Delta_\mu \to 0$ при $\mu \to 0$.

Допустим теперь, что нам даны сетки Π_μ и Ω_μ из теоремы 3 для заданной точности приближения $\varepsilon > 0$. Можно ли ожидать, что произвольное допустимое квазирешение задачи (7) в условиях теоремы 3 является аппроксимирующим с точностью ε (хотя бы по медленным переменным) для некоторого решения задачи (1)? Ответ отрицателен. Для иллюстрации можно рассмотреть задачу

$$\dot{x} = \mu\cos(y), \quad \dot{y} \in [0, 1], \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

и задать точность приближения $\varepsilon < 1/2$. Допустим, что шаг Δ сетки Π_μ оказался кратен 2π. Разностная задача имеет вид

$$\dot\xi = \mu\cos(\eta_{i,j}),\quad \dot\eta\in[0,1], \xi(0)=0,\quad \eta(0)=0,$$

где $i=0,1,\ldots,m-1$, $j=0,1,\ldots,n-1$. Функции

$$\xi_\mu(t)=\mu\int_0^t\cos(\eta_\mu(s))\,ds,\quad \eta_\mu(t)=i\Delta,\ \ i\Delta\leqslant t<(i+1)\Delta,\quad \eta_\mu(1/\mu)=1/\mu$$

определяют допустимое квазирешение разностной задачи, при этом отвечающее ему решение исходной системы $x_\mu(t)=\mu\sin(t)$, $y_\mu(t)=t$ определено однозначно. В этом случае

$$\xi_\mu(1/\mu)=\mu\Delta\sum_0^{m-1}1=1,\quad x_\mu(1/\mu)=\mu\sin(1/\mu).$$

Поэтому при $\mu\in(0,1/2]$ погрешность $|\xi_\mu(1/\mu)-x_\mu(1/\mu)|\geqslant 1/2$. Таким образом, класс допустимых квазирешений в смысле определения 2 оказывается слишком широким для "обратной" задачи аппроксимации. Оказывается, если ограничиться только дифференциальными включениями с медленными переменными, то теорему 4 можно усилить, оставаясь в классе решений разностной задачи. Этот вопрос рассматривается в п. 6.

5. Теоремы эйлеровой аппроксимации для дифференциального включения с медленными переменными

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с медленными переменными

$$\dot x\in\mu F(t,x),\qquad x(0)=x_0,\tag{27}$$

где $F: D_0\to Kv(R^{m_1}), D_0=R_+\times R^{m_1}$. Задаче (27) сопоставим разностную схему с возмущениями

$$\dot\xi\in\mu F(t,\xi_i)+\mu P(t,\xi_i),\qquad \xi(0)=x_0,\tag{28}$$

где $t\in I_i$, $i=0,1,\ldots,m{-}1$. Здесь измеримое по t отображение $P: D_0\to Kv(\mathbb{R}^{m_1})$ играет роль возмущений. Пусть $X_\mu(t),\Xi_\mu(t)$ интегральные воронки на отрезке $[0,t]$ для задач (27), (28) соответственно. Расстояние между ними $H(X_\mu(t),\Xi_\mu(t))$ определяем по Хаусдорфу, рассматривая воронки как множества из пространства $C([0,t],\mathbb{R}^{m_1})$ непрерывных функций $\varphi:[0,t]\to R^{m_1}$. Далее мы используем следующие свойства отображения $F: D_0\to Kv(\mathbb{R}^{m_1})$.

1_0) функция $F(\cdot,x)$ является измеримой для любого $x\in R^{m_1}$, при этом выполняется оценка линейного роста $|F(t,x)|\leqslant\gamma_1(t)(1+\|x\|)$ для любых $(t,x)\in D_0$, где $\gamma_1\in L_1^b$;
2_0) существуют функции $\gamma_2\in L_1^b,\sigma\in K$ такие, что

$$h(F(t,x_1),F(t,x_2))\leqslant\gamma_2(t)\sigma_1(\|x_1-x_2\|)$$

для любых $(t,x_1),(t,x_2)\in D_0$;
3_0) для некоторой функции $\gamma_3\in L_1^b$ и произвольных $x_1,x_2\in\mathbb{R}^{m_1}, v_1\in F(t,x_1)$ найдется вектор $v_2\in F(t,x_2)$ такой, что $\langle x_1-x_2,v_1-v_2\rangle\leqslant\gamma_3(t)\|x_1-x_2\|$.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $1_0)$–$3_0)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют $\mu_0>0$ и $\delta_0>0$ такие, что если $\mu\in(0,\mu_0]$ и для измеримого отображения $P(\cdot,x)$, $x\in R^{m_1}$ выполняется неравенство $|P(t,x)|\leqslant\gamma_0(t)$, где $\gamma_0\in L_1^b, l(\gamma_0)\leqslant\delta_0$, то

$$H\Big(X_\mu(t),\Xi_\mu(t)\Big)\leqslant\varepsilon,\qquad t\in I_\mu.$$

Доказательство этой теоремы, которая нам потребуется в следующем разделе, приведено в [11]. Заметим теперь, что если рассматривать задачу Коши

$$\dot{x} \in F(t,x), \qquad x(a) = x_0,$$

где $F : D_0 \to Kv(R^{m_1})$, $D_0 = [a,b] \times R^{m_1}$, на отрезке $[a,b]$, и разностную схему

$$\dot{y} \in F(t,y_j) + P(t,y_j), \qquad y(a) = x_0, \qquad t \in [t_j, t_j + \tau),$$

где $t_j = a + j\tau$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, $\tau = (b-a)/n$, то для интегральных воронок $X(t), Y(t)$ соответствующих задач имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполняются условия $1_0)$–$3_0)$ для $D_0 = [a,b]\times\mathbb{R}^{m_1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\tau_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что если шаг сетки $\tau \in (0,\tau_0]$ и для измеримого отображения $P(\cdot,x)$, $x \in \mathbb{R}^{m_1}$ выполняется неравенство $|P(t,x)| \leqslant \gamma_0(t)$, где $\gamma_0 \in L_1([a,b])$ и $\int_a^b \gamma_0(t)\,dt \leqslant \delta_0$, то

$$H\Big(X(t), Y(t)\Big) \leqslant \varepsilon, \qquad t \in [a,b].$$

Доказательство этой теоремы аналогично обоснованию теоремы об эйлеровой аппроксимации из [7] для односторонне липшицевых дифференциальных включений и поэтому опускается.

Замечание 1. В теоремах 3–6 построение соответствующих аппроксимирующих решений, как следует из доказательств, проводится последовательно на отрезках разбиения основного промежутка. Это будет использовано в п. 7 при доказательстве теоремы усреднения.

6. Теорема усреднения

Следующая теорема, наряду с теоремой 4, является основной в данной работе.

Теорема 7. Пусть выполняются условия 1–3 и для односторонне липшицевого полунепрерывного сверху отображения F_0 имеет место соотношение (3). Тогда задача (4) взаимно аппроксимирует задачу (1) по медленным переменным.

Доказательство. Пусть дано число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 из условия (3). Тогда по теореме 4 существует $\mu_1 > 0$ такое, что для произвольного решения $z_\mu(\cdot) = (x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot))$ задачи (1) с параметром $\mu \in (0,\mu_1]$ найдется допустимое квазирешение $\zeta_\mu(\cdot) = (\xi_\mu(\cdot), \eta_\mu(\cdot))$ задачи (7), для которого пара $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ является правильной, при этом

$$\|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon/3, \qquad t \in I_\mu. \tag{30}$$

На сетке Ω_μ разностная задача (7) с учетом условий (8) имеет вид

$$\begin{aligned} &\xi_{i+1} = \xi_i + \mu\Delta f_i, && \xi_0 = x_0,\\ &\eta_{i,j+1} = \eta_{i,j} + \tau g_{i,j}, && \eta_i = y_\mu(t_i), \end{aligned} \tag{31}$$

где $i = 0,1,\ldots,m-1$, $j = 0,1,\ldots,n-2$. Здесь

$$f_i \in \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\xi_i,\eta^{(i)}(s),\mu)\,ds, \qquad g_{i,j} \in \frac{1}{\tau}\int_{t_{i,j}}^{t_{i,j+1}} G(s,\xi_i,\eta_{i,j},\mu)\,ds. \tag{32}$$

Для удобства записи интегралов здесь введена ступенчатая функция $\eta^{(i)}(s) = \eta_{i,j}$, если $s \in [t_{i,j}, t_{i,j+1})$. Заметим теперь, что функция $\eta^{(i)}(\cdot)$ по теореме 6 в промежутке $[t_i, t_{i+1})$ является приближением к некоторому решению задачи

$$\dot{b} \in G(t,\xi_i,b,\mu), \qquad b(t_i) = y_\mu(t_i).$$

Точнее, для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно малого шага τ сетки Ω_μ существует решение $b_\mu^{(i)}(\cdot)$ этой задачи, для которого имеет место неравенство

$$\|\eta^{(i)}(t) - b_\mu^{(i)}(t)\| \leqslant \varepsilon_1/2, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}). \tag{33}$$

На основании [1, Теорема 3.2] аппроксимируем решение $b_\mu^{(i)}(\cdot)$ решением $b^{(i)}(\cdot)$ задачи

$$\dot b \in G(t, \xi_i, b, 0), \qquad b(t_i) = y_\mu(t_i) \tag{34}$$

с точностью $\varepsilon_1/2$:

$$\|b_\mu^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| \leqslant \varepsilon_1/2. \tag{35}$$

Действительно, поскольку

$$\rho(\dot b_\mu^{(i)}(t), G(t, \xi_i, b_\mu^{(i)}(t), 0) \leqslant h(G(t, \xi_i, b_\mu^{(i)}(t), \mu), G(t, \xi_i, b_\mu^{(i)}(t), 0)) \leqslant \alpha_2(t)\omega_2(\mu),$$

то по указанной теореме [1, Теорема 3.2] существует решение $b^{(i)}(\cdot)$ задачи (34), для которого

$$\|b_\mu^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| \leqslant \int_{t_i}^{t} e^{\int_s^t \alpha_4(z)\,dz} \alpha_2(s)\omega_2(\mu)\,ds,$$

где функция $\alpha_4(\cdot)$ из условия 3. Так как

$$e^{\int_s^t \alpha_4(z)\,dz} \leqslant \int_{t_i}^{\Delta} \alpha_4(z)\,dz \leqslant e^{l_4\Delta},$$

если $\Delta \geqslant T(\alpha_4)$, то

$$\|b_\mu^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| \leqslant e^{l_4\Delta}\omega_2(\mu) \int_{t_i}^{t} \alpha_2(s)\,ds \leqslant e^{l_4\Delta}\omega_2(\mu) l_2 \Delta = \beta_3(t, \mu).$$

Следовательно,

$$\|b_\mu^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| \leqslant \beta_3(t, \mu). \tag{36}$$

Заметим, если в теореме 3 принять

$$\beta(t, \mu) = \max\{\beta_2(t, \mu), \beta_3(t, \mu)\},$$

то при некотором $\mu_1 > 0$ и $\mu \in (0, \mu_1]$ будут одновременно выполняться соответствующие неравенства теоремы 3 и неравенство (35). Таким образом, согласно (33), (35), имеем

$$\|\eta^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| \leqslant \varepsilon_1, \qquad t \in [t_i, t_i + \Delta].$$

Отсюда и условия 2 получим

$$h\Big(\frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, \xi_i, \eta^{(i)}(s), \mu)\,ds, \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, \xi_i, b^{(i)}(s), 0)\,ds\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} h\Big(F(s, \xi_i, \eta^{(i)}(s), \mu), F(s, \xi_i, b^{(i)}(s), 0)\Big)\,ds \leqslant l_1(\sigma_2(\varepsilon_1) + \omega_1(\mu)),$$

если $\Delta \geqslant T_1 = T(\alpha_1)$. Пусть задано произвольное $\kappa > 0$. Тогда в силу (3) существует $T_2 > 0$ такое, что из условия $\Delta \geqslant T_2$ следует неравенство

$$h\Big(M_\Delta(t_i, \xi_i, \eta_i), F_0(\xi_i)\Big) \leqslant \kappa.$$

Соотношение $\Delta \geqslant T_2$ будет заведомо выполнено, если $\mu \leqslant \mu_2$ для некоторого $\mu_2 > 0$. Следовательно, с учетом первого включения в (32), получим

$$\rho(f_i, F_0(\xi_i)) \leqslant \kappa + l_1(\sigma_2(\varepsilon_1) + \omega_1(\mu)).$$

Поэтому $f_i = f_i^{(0)} + p_i$, где $f_i^{(0)} \in F_0(\xi_i)$, а вектор $p_i \in R^{m_1}$ удовлетворяет неравенству $\|p_i\| \leqslant \kappa + l_1(\sigma_2(\varepsilon_1) + \omega_1(\mu))$. В таком случае, первое равенство в (31) можно записать в виде

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \mu\Delta(f_i^0 + p_i), \qquad \xi_0 = x_0,$$

при этом на отрезке I_i в качестве решения полученной разностной схемы с возмущениями можно взять функцию $v_\mu(t) = \xi_i + (t - t_i)f_i$. По теореме 5 при достаточно малых κ и ε_1, от которых зависит возмущение p_i, существует решение $u_\mu(\cdot)$ задачи (4), для которого

$$\|v_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon/3. \tag{37}$$

Так как $v_\mu(t_i) = \xi_\mu(t_i), t_i \in \Omega_\mu$, то из (30) и (37) получим оценку

$$\|\xi_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leqslant 2\varepsilon/3, \qquad t \in \Pi_\mu,$$

если $\mu \leqslant \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Поскольку $\mu\Delta_\mu \to 0$ при $\mu \to 0$, то для достаточно малого $\mu_3 > 0$ и условия $\mu \leqslant \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ получим требуемое соотношение $\|\xi_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon$ на всем отрезке I_μ. Рассмотрим теперь произвольное решение $u_\mu(\cdot)$ задачи (4). По теореме 5 решение $u_\mu(\cdot)$ можно аппроксимировать с точностью $\varepsilon/3$ некоторым решением разностной задачи

$$\dot v \in \mu F_0(v_i) + \mu B(0, \delta_0), \qquad v_0 = x_0, \tag{38}$$

где $t \in I_i$, $v_0 = v_\mu(0)$, а число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ достаточно мало. Построение этого решения, а также квазирешения задачи (7) и решения задачи (1) будем проводить последовательно на отрезках I_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, используя *замечание 1.* При $i = 0$ по теореме 5 найдется вектор $f_0^{(0)} \in F_0(v_0)$ такой, что при любом выборе вектора f_0 из множества

$$\{f_0^{(0)}\} + B(0, \delta_0) \tag{39}$$

получим требуемое решение $v_\mu(\cdot)$ задачи (38) на отрезке I_0, которое можно записать, например, в виде

$$v_\mu(t) = v_0 + \mu f_0(t - t_0), \qquad t \in I_0,$$

где $t_0 = 0$. В силу (3) при достаточно большом шаге сетки $\Delta = \Delta_\mu$, что выполняется за счет выбора параметра $\mu \in (0, \mu_4]$ для некоторого $\mu_4 > 0$, существует вектор f_0^*, для которого выполняются соотношения

$$f_0^* \in \{f_0^{(0)}\} + B(0, \delta_0/3), \qquad f_0^* \in \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta F(s, \xi_0, b^0(s), 0)\, ds, \tag{40}$$

где $b^{(0)}(\cdot)$ некоторое решение задачи

$$\dot b \in G(t, \xi_0, b, 0), \qquad b(t_0) = y_\mu(t_0).$$

Далее, по теореме [1, Теорема 3.2] существует решение $b_\mu^0(\cdot)$ задачи

$$\dot b \in G(t, \xi_0, b, \mu), \qquad b(t_0) = y_\mu(t_0),$$

для которого выполняется неравенство (36) при $i = 0$:

$$\|b_\mu^{(0)}(t) - b^{(0)}(t)\| \leqslant \beta_3(t, \mu) \leqslant \varepsilon_1. \tag{41}$$

По теореме 6 за счет выбора достаточно малого шага τ сетки Ω_μ функцию $b^{(0)}(\cdot)$ на отрезке I_0 можно аппроксимировать в силу (40) соответствующим решением $\eta_\mu(\cdot)$ задачи

$$\dot\eta \in G(t, \xi_0, \eta_{0,j}, \mu), \qquad \eta(t_0) = y_\mu(t_0), \qquad t \in I_{0,j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{42}$$

так, чтобы для некоторого вектора f_0^{**} выполнялись включения

$$f_0^{**} \in \{f_0^{(0)}\} + B(0, 2\delta_0/3), \qquad f_0^{**} \in \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta F(s, \xi_0, \eta_\mu(s), \mu)\, ds.$$

Отсюда следует, что если функцию $\eta_\mu(\cdot)$ в последнем интеграле заменить на кусочно-постоянную $\eta^{(0)}(t) = \eta_{0,j}$, $t_{0,j} \leqslant t < t_{0,j+1}$, то при достаточно малом шаге τ для некоторого вектора f_0 выполняются соотношения

$$f_0 \in \{f_0^{(0)}\} + B(0, \delta_0), \qquad f_0 \in \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta F(s, \xi_0, \eta^{(0)}(s))\, ds.$$

Это означает, что существует решение задачи

$$\dot{\xi} \in \mu F(t, \xi_0, \eta_{0,j}), \qquad \xi(0) = x_0, \qquad t \in I_{0,j},$$

для которого

$$\xi_1 = \xi_0 + \mu\Delta f_0, \qquad \xi_0 = x_0,$$

где $f_0 = f^{(0)} + p_0$, $\|p_0\| \leqslant \delta_0$. Таким образом, с учетом (42), на отрезке I_0 построено решение $\zeta_\mu(\cdot) = (\xi_\mu(\cdot), \eta_\mu(\cdot))$ задачи

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} \in \mu F(t, \xi_0, \eta_{0,j}, \mu), \qquad \xi(0) = x_0, \\ &\dot{\eta} \in G(t, \xi_0, \eta_{0,j}, \mu), \qquad \eta(0) = y_0, \qquad t \in I_{0,j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{43}$$

для которого

$$f_0 = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \dot{\xi}(s)\, ds.$$

Далее, по теореме 2 на отрезке I_0 существует решение $z_\mu = (x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot))$ задачи (1), для которого пара $(z_\mu(\cdot), \zeta_\mu(\cdot))$ является правильной. На следующем отрезке I_1 начальные значения по медленным переменным для задач (38) и (7) совпадают и равны $\xi_\mu(t_1)$, а по быстрым переменным полагаем $\eta_\mu(t_1) = y_\mu(t_1)$. Затем процедура построения решений повторяется. В результате будет построено решение $(x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot))$ задачи (1) на всем отрезке I_μ, которое аппроксимирует с точностью $\varepsilon/3$ соответствующее допустимое квазирешение задачи

$$\begin{aligned} &\xi_{i+1} = \xi_i + \mu\Delta f_i, \qquad \xi_0 = x_0, \\ &\eta_{i,j+1} = \eta_{i,j} + \tau g_{i,j}, \qquad \eta_i = y_\mu(t_i), \end{aligned}$$

где $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$. Одновременно построено и решение $v_\mu(\cdot)$ задачи (38), при этом $\xi_\mu(t_i) = v_\mu(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Следовательно, $\|u_\mu(t) - x_\mu(t)\| \leqslant 2\varepsilon/3$, $t \in \Pi_\mu$. Поскольку $\mu\Delta_\mu \to 0$ при $\mu \to 0$, то для достаточно малого $\mu_5 > 0$ и условия $\mu \leqslant \min\{\mu_4, \mu_5\}$ получим $\|u_\mu(t) - x_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon$ на всем отрезке I_μ. Таким образом, если $\mu \leqslant \mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5\}$, то имеет место взаимная ε-аппроксимация по медленным переменным задач (1) и (4). Теорема доказана.

Литература

[1] Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1963.

[2] Волосов, В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М. Волосов // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17. – Вып. 6. – С. 3–126.

[3] Каменский, М.И. Об одной модификации принципа усреднения для вырожденных уравнений / М.И. Каменский // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – №2. – С. 151–153.

[4] Плотников, В.А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999.

[5] Филатов, О.П. Усреднение систем дифференциальных включений / О.П. Филатов, М.М. Хапаев. – Изд-во Московского университета, 1998.

[6] Филатов, О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений / О.П. Филатов // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2001. – №2(20). – С. 20–33.

[7] Donchev, T. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions / T. Donchev, E. Farhi // SIAM J.Control OPTIM. – 1998. – V. 36. – No. 2. P. 780–796.

[8] Соколовская, Е.В. Обобщение принципа усреднения Крылова–Боголюбова на случай дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью / Е.В. Соколовская // Вестник Самарского государственого университета. Второй специальный выпуск. – 2004. С. 36–51.

[9] Соколовская, Е.В. Аппроксимация сверху систем дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью / Е.В. Соколовская, О.П. Филатов // Математ. заметки. – 2005. – Т. 78. – Вып. 5. – С. 763–772.

[10] Deimling, K. Multivalued differential equations / K. Deimling. – Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

[11] Филатов, О.П. Интегральный метод Эйлера с возмущениями и принцип усреднения для дифференциальных включений / О.П. Филатов // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия – 2005. – №5(39). – С. 79–90.

[12] Филатов, О.П. Разностная аппроксимация и теорема усреднения для дифференциальных включений / О.П. Филатов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. IX. – №2(26). – С. 137–152.

Поступила в редакцию $3/IV/2007$;
в окончательном варианте — $3/IV/2007$.

THE EULER APPROXIMATIONS AND AVERAGING DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2007 O.P. Filatov[2]

The accuracy of the approximation of the solutions of the one-sided Lipschitz differential inclusions with slow and fast variables by means of the Euler integral discrete scheme is found. The averaging theorem for the differential inclusions is derived from the base theorem.

Paper received 3/IV/2007.
Paper accepted 3/IV/2007.

[2]Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.