УДК 517.928.1

АППРОКСИМАЦИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

© 2007 О.П.Филатов[1]

Рассматривается задача вычисления пределов максимальных средних для вещественнозначной функции. Точная верхняя граница значений функции вычисляется по всем решениям системы дифференциальных включений с разнотемповыми переменными. Скорость изменения переменных характеризуется малыми параметрами. Это позволяет свести задачу к более простым. Получена оценка погрешности аппроксимации пределов максимальных средних.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных включений

$$\dot\gamma_j \in \mu_1\mu_2\cdots\mu_j G(\gamma_j), \qquad \gamma_j(0) = y_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k, \tag{1.1}$$

где $\gamma_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $G_j(\gamma_j) \subset \mathbb{R}^{m_j}$, μ_1, μ_2, $\ldots$, $\mu_k \in (0,1)$, $\mu_0 = 1$. Норму в пространстве $\mathbb{R}^{m_j}$ обозначим $\|\cdot\|_j$. В системе (1.1) параметры μ_0, μ_1, $\ldots$, μ_k ранжируют зависимые переменные γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_k по их скорости изменения: переменная с большим номером более медленная по отношению к переменной с меньшим номером. Отметим, что при $j = 0$ дифференциальное включение в системе (1.1) имеет вид $\dot\gamma_0 \in G(\gamma_0)$. Вектор $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{m_0} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} = Y$ является произвольным начальным вектором. Предполагается,что система (1.1) для любого начального вектора имеет решения, определенные при $t \in [0,\infty)$. Множество всех решений системы (1.1) (в смысле Каратеодори) обозначим $\Gamma(\mu, y)$, где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in (0,1) \times \cdots \times (0,1) = K$. Кроме того, пусть $\Gamma_j(\overline{\mu}_j, y_j)$ обозначает множество всех решений j-ого дифференциального включения системы (1.1) с начальным условием $\gamma_j(0) = y_j$, где $\overline{\mu}_j = \mu_1\mu_2\cdots\mu_j$, при этом $\overline{\mu}_0 = 1$. Условимся для множества решений $\Gamma_0(\overline{\mu}_0, y_0)$ использовать более краткое обозначение $\Gamma_0(y_0)$. Теперь рассмотрим функцию

$$f : Y \to \mathbb{R}, \quad (y_0, y_1, \ldots, y_k) \to f(y_0, y_1, \ldots, y_k),$$

для которой задачу (1.1) будем считать допустимой. Это означает, что композиция $f\circ\gamma$ является локально интегрируемой (по Лебегу) для любого решения $\gamma \in \Gamma(\mu, y)$, где $y \in Y$ и $\mu \in K$ — произвольные.

Далее, определим максимальное среднее на отрезке $[0,\Delta]$

$$M_f(\mu, y, \Delta) = \sup_{\gamma\in\Gamma(\mu,y)} \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(\gamma(t))\,dt$$

и введем множество предельных точек $\Omega(\mu, y)$ функции $M_f(\mu, y, \Delta)$ при $\Delta \to \infty$.

[1]Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова 1.

В задачах построения правых частей усредненных дифференциальных включений [1, 1] с использованием усредненной опорной функции [1], приходится вычислять пределы максимальных средних вида

$$M_f(\mu, y) = \lim_{\Delta\to\infty} M_f(\mu, y, \Delta),$$

которые на самом деле не зависят от начального вектора y (в этом случае используем обозначение $M_f(\mu)$). Дело в том, что в таких задачах система дифференциальных включений (1.1) играет роль порождающей системы для быстрых переменных, которая получается из исходной системы при нулевом значении малого параметра. При усреднении зависимость от начальных условий по быстрым переменным исчезает.

Вычисление пределов максимальных средних не является простой задачей даже в одномерном случае [1]. В [1] для почти периодических функций рассматривался приближенный метод вычисления пределов максимальных средних в случае, когда в системе (1.1) $k = 1$, а правые части были постоянными компактами из соответствующих пространств. То есть имелись два вектора быстрых переменных, которые отличались по скорости их изменения. Параметр μ в такой постановке скалярный. Оказалось, что предел $M_f(\mu)$ можно вычислять через повторные пределы максимальных средних для задач меньшей размерности, правда с некоторой погрешностью, которая является бесконечно малой при $\mu \to 0$.

В данной работе обобщаются полученные ранее результаты, при этом не предполагается почти периодичность функции f и постоянство правых частей системы (1.1). Платой за это будут предположения о существовании некоторых пределов максимальных средних, которые для почти периодических функций существовали автоматически [1, 1]. Кроме того, здесь не предполагается существование предела $M_f(\mu)$. Все оценки проводятся для множества предельных точек $\Omega(\mu, y)$. Полученные результаты представляют интерес не только для теории усреднения дифференциальных включений.

2. Обозначения и основные условия

Для функции $f : Y \to R$ введем операцию вычисления предела максимального среднего по переменным y_j, $j = l, l+1 \dots, s$, где $l \leqslant s$, следующим образом:

$$M_l^s f(y) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(y_0, \dots, \gamma_l(\overline{\mu}_l t), \dots, \gamma_s(\overline{\mu}_s t), \dots, y_k)\, dt,$$

где остальные переменные являются фиксированными, а точная верхняя грань вычисляется по всем $\gamma_j \in \Gamma_j(\overline{\mu}_j, y_j)$, $j = l, l+1 \dots, s$. В частности, $M_f(\mu, y) = M_0^k f(\mu, y)$. Кроме того, обозначим $M_j = M_j^j$.

С помощью введенных операций определим повторные пределы максимальных средних

$$f_{j+1} = M_j f_j, \quad j = 0, 1, \dots, k, \tag{2.1}$$

где $f_0 = f$, предполагая, что соответствующие пределы существуют равномерно по $y \in Y$, при этом функция $f_j : Y \to R$ не зависит от переменных $y_0, y_1, \dots, y_{j-1}$. Последнее условие формализует роль быстрых переменных: при усреднении желательно, чтобы функция не зависела от начального вектора быстрой переменной. В таком случае, функция f_1 не должна зависеть от начального условия задачи

$\dot\gamma_0 \in G(\gamma_0)$, $\gamma_0(0) = y_0$. Функция f_2 не зависит от начального вектора y_1 и автоматически от вектора y_0 в силу рекуррентного соотношения (2.1). Наконец, функция $\Psi_f = f_{k+1}$ является постоянной.

Кроме того, будем предполагать, что существуют пределы максимальных средних

$$\Psi_f^j(\mu_{j+1}, \dots, \mu_k) = (M_j^k f_j)(\mu_{j+1}, \dots, \mu_k), \quad j = 1, \dots, k, \tag{2.2}$$

равномерно по $y \in Y$, которые не зависят от y. Заметим, что $\Psi_f^k = \Psi_f$ согласно принятых обозначений.

Модуль непрерывности функции $f : Y \to R$ по переменным $y_1, \dots, y_k$ обозначим

$$\omega_1(\delta) = \sup\{|f(y_0, y_1 + h_1, \dots, y_k + h_k) - f(y_0, y_1, \dots, y_k)|\}, \tag{2.3}$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем $y \in Y$, $\|h_j\|_j \leqslant \delta$, $j = 1, 2, \dots, k$. Для функции f_j из (2.1) введем аналогичный модуль по переменным $y_{j+1}, \dots, y_k$, который обозначим $\omega_{j+1}(\delta)$, $j = 0, \dots, k-1$.

Ограниченность в среднем для функции f на решениях системы (1.1) означает существование таких постоянных $c_f > 0$, $\Delta_f > 0$, что для любых $y \in Y$, $\mu \in K$ и любых решений $\gamma \in \Gamma(\mu, y)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(\gamma(t))\,dt\right| \leqslant c_f \Delta,$$

если $\Delta \geqslant \Delta_f$, $t_0 \geqslant 0$. Кроме того, будем использовать норму $\|A\|_j = \sup_{a \in A} \|a\|_j$ множества $A \subset \mathbb{R}^{m_j}$.

Перечислим теперь основные условия:

(a) любое решение задачи (1.1) для любых начальных условий и $\mu \in K$ определено в промежутке $[0, \infty)$;

(b) множество $G_j(y_j) \subset \mathbb{R}^{m_j}, j = 1, \dots, k$, из системы (1.1) равномерно ограничено постоянной $g_j > 0$, т.е. $\|G_j(y_j)\|_j \leqslant g_j$ для любого $y_j \in \mathbb{R}^{m_j}$;

(c) задача (1.1) является допустимой для функции $f : Y \to R$, у которой ее модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ является бесконечно малой величиной при $\delta \to 0$, при этом функция f ограничена в среднем на решениях задачи (1.1) с соответствующими постоянными $c_f > 0$ и $\Delta_f > 0$;

(d) существует предел максимального среднего (2.1) f_j равномерно по $y \in Y$, не зависящий от переменных $y_0, y_1, \dots, y_{j-1}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k+1$;

(e) существует предел максимального среднего (2.2) $\Psi_f^j(\mu_{j+1}, \dots, \mu_k)$ равномерно по $y \in Y$, не зависящий от $y \in Y$, для любого $j = 1, 2, \dots, k-1$, где $k \geqslant 1$.

Нетрудно показать, что при выполнении условия (d) имеют место соотношения для модулей непрерывности

$$\omega_{j+1}(\delta) \leqslant \omega_j(\delta), \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \tag{2.4}$$

Таким образом, равномерные пределы максимальных средних не увеличивают соответствующие модули непрерывности функций, которые определяются по рекуррентной формуле (2.1). Введем для этих функций максимальные средние на отрезке $[0, \Delta]$

$$f_j^\Delta(y_{j-1}, \dots, y_k) = \sup \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f_{j-1}(\gamma_{j-1}(t), y_j, \dots, y_k)\,dt, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем $\gamma_{j-1} \in \Gamma_{j-1}(\overline{\mu}_{j-1}, y_{j-1})$ при фиксированных значениях остальных переменных. Если выполняется условие (d), то функция

$$\varphi_j(\Delta) = \sup_{y \in Y} |f_j(y_j, \ldots, y_k) - f_j^{\Delta}(y_{j-1}, \ldots, y_k)|$$

является бесконечно малой при $\Delta \to \infty$ при любом $j = 1, 2, \ldots, k$.

3. Теоремы об аппроксимации

Первая из теорем формулируется для $k = 1$. В этом случае для удобства записи введем следующие обозначения:

$$\Phi(y_1) = f_1(y_1) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma_0(t), y_1)\, dt, \tag{3.1}$$

$$\Psi_f = f_2 = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma_1 \in \Gamma_1(y_1)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \Phi(\gamma_1(t))\, dt. \tag{3.2}$$

Множество предельных точек максимального среднего $M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta)$ при $\Delta \to \infty$ обозначим $\Omega(\mu, y_0, y_1) \subset R$. Пусть

$$M(y_0, y_1, \Delta) = f_1^{\Delta}(y_0, y_1) = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma_0(t), y_1)\, dt,$$

$$M(y_1, \Delta) = \sup_{y_0 \in \mathbb{R}^{m_0}} M(y_0, y_1, \Delta),$$

$$\varphi(\Delta) = \varphi_1(\Delta) = \sup_{y_0 \in \mathbb{R}^{m_0}} \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} |\Phi(y_1) - M(y_0, y_1, \Delta)|.$$

Как уже отмечалось, из условия (d) следует, что $\varphi(\Delta)$ является бесконечно малой при $\Delta \to \infty$, при этом

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \|\Phi(y_1) - M(y_1, \Delta)\| \leqslant \varphi(\Delta). \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$\mu = \mu_1, \qquad r_1(\alpha, \mu) = 2\omega_1(\delta_\mu), \qquad r_2(\alpha, \mu) = \varphi(\mu^{-\alpha}) + 2\omega_1(\delta_\mu),$$

где $\delta_\mu = g_1 \mu^{1-\alpha}$. Здесь параметр $\alpha \in (0, 1)$, а постоянная g_1 из условия (b).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (a)–(d) при $k = 1$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует $\mu^0 \in (0, 1)$ такое, что если $\mu \in (0, \mu^0]$, то

$$\Omega(\mu, y_0, y_1) \subset [\Psi_f - r_1(\alpha, \mu), \Psi_f + r_2(\alpha, \mu)]$$

для произвольных начальных условий $y_0 \in \mathbb{R}^{m_0}, y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$.

Доказательство. Пусть $t_j = j\Delta_0$, $j = 0, 1, \ldots$, $\Delta_0 = \mu^{-\alpha}$. Для произвольного решения $\gamma_1 \in \Gamma_1(\mu, y_1)$ получим оценку сверху функции

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_0(t), x_j)\, dt, \qquad x_j = \gamma_1(\mu t_j).$$

Поскольку

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} M(x_j, \Delta_0),$$

то на основании (3.3) получим

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi(x_j) + \varphi(\Delta_0).$$

Из условия (b) следует неравенство $\|\gamma_1(\mu t) - x_j\| \leqslant \delta_\mu$ для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$, поэтому

$$|\Phi(x_j) - \Phi(\gamma_1(\mu t))| \leqslant \omega_1(\delta_\mu), \qquad t \in [t_j, t_{j+1}], \tag{3.4}$$

для произвольного решения $\gamma_1 \in \Gamma_1(\mu, y_1)$. В таком случае,

$$\begin{aligned} S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) \leqslant \frac{1}{n\Delta_0}\int_0^{n\Delta_0}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt+ \\ +\frac{1}{n\Delta_0}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(\Phi(x_j) - \Phi(\gamma_1(\mu t)))\,dt + \varphi(\Delta_0) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{n\Delta_0}\int_0^{n\Delta_0}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt + \varphi(\Delta_0) + \omega_1(\delta_\mu). \end{aligned}$$

Из условия (d) следует, что для данного $\varepsilon > 0$ существует $n_1(\mu, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\sup_{\gamma_1\in\Gamma_1(\mu,y_1)}\frac{1}{n\Delta_0}\int_0^{n\Delta_0}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt - \Psi_f\right| \leqslant \varepsilon, \tag{3.5}$$

если $n \geqslant n_1(\mu, \varepsilon)$. Следовательно, имеют место неравенства

$$\frac{1}{n\Delta_0}\int_0^{n\Delta_0}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt \leqslant \sup_{\gamma_1\in\Gamma_1(\mu,y_1)}\frac{1}{n\Delta_0}\int_0^{n\Delta_0}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt \leqslant \Psi_f + \varepsilon.$$

В результате получим оценку сверху

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) \leqslant \Psi_f + \varphi(\Delta_0) + \omega_1(\delta_\mu) + \varepsilon, \quad n \geqslant n_1(\mu, \varepsilon). \tag{3.6}$$

Переходим к построению оценки снизу для функции $S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1)$. По теореме о существовании экстремального решения $\gamma_1^* \in \Gamma_1(\mu, y_1)$ дифференциального включения [1, Теорема 2] (в указанной теореме условие ограниченности функции f можно заменить на условие ограниченности в среднем этой функции из условия (c)) имеет место равенство

$$\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{\gamma_1\in\Gamma_1(\mu,y_1)}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}\Phi(\gamma_1(\mu t))\,dt = \lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}\Phi(\gamma_1^*(\mu t))\,dt = \Psi_f. \tag{3.7}$$

Обозначим $x_j^* = \gamma_1^*(\mu t_j)$ и построим решение $\gamma_0^* \in \Gamma_0(y_0)$ последовательно на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots$. На первом отрезке $[0, t_1]$, используя условие (d), определим такое решение $\beta_0 \in \Gamma_0(y_0)$, чтобы при $\Delta_0 \geqslant \Delta_*(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(x_0) - \frac{1}{\Delta_0}\int_0^{\Delta_0} f(\beta_0(t), x_1^*)\,dt| \leqslant \varepsilon.$$

Положим $\gamma_0^*(t) = \beta_0(t)$, если $t \in [0, t_1]$. Допустим, что на отрезке $[0, t_j]$ при некотором $j \geqslant 1$ функция γ_0^* уже определена. Тогда продолжим ее на отрезок $[t_j, t_{j+1}]$ следующим образом. На основании условия (d) найдем решение β_j задачи $\dot\gamma_0 \in G_0(\gamma_0)$, $\gamma_0(t_j) = \gamma_0^*(t_j)$, для которого

$$|\Phi(x_j^*) - \frac{1}{\Delta_0}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\beta_j(t), x_j^*)\,dt| \leqslant \varepsilon, \tag{3.8}$$

если $\Delta_0 \geqslant \Delta_*(\varepsilon)$. Тогда функция γ_0^* на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ по определению совпадает с функцией β_j. Следовательно, функция γ_0^* определена на всем отрезке $[0, t_{j+1}]$, а значит по индукции и на всем промежутке $[0, \infty)$. По построению $\gamma_0^* \in \Gamma_0(y_0)$. Далее, с учетом (3.4) (где нужно заменить γ_1 на γ_1^*, а x_j на x_j^*) и (3.8) имеем

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_0^*) \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_0^*(t), x_j^*)\, dt =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(x_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (f(\gamma_0^*(t), x_j^*) - \Phi(x_j))\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(x_j) - \varepsilon \geqslant \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\gamma_1^*(\mu t))\, dt +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\Phi(x_j^*) - \Phi(\gamma_1^*(\mu t)))\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\gamma_1^*(\mu t))\, dt - \omega_1(\delta_\mu) - \varepsilon.$$

Отсюда и (3.5), (3.7) получим оценку снизу

$$S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_0^*) \geqslant \Psi_f - \omega_1(\delta_\mu) - 2\varepsilon, \tag{3.9}$$

если $\Delta_0 \geqslant \Delta_*(\varepsilon), n \geqslant n_1(\mu, \varepsilon)$. Теперь получим оценки для функции $M_f(\mu, y_0, y_1, n\Delta_0)$. Возьмем произвольные решения $\gamma_1 \in \Gamma_1(\mu, y_1), \gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)$, тогда

$$\frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t))\, dt = \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t_j))\, dt +$$
$$+ \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t)) - f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t_j)))\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t_j))\, dt + \omega_1(\delta_\mu) =$$
$$= S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1) + \omega_1(\delta_\mu).$$

Отсюда и (3.6) после перехода к точной верхней границе по всем $\gamma_1 \in \Gamma_1(\mu, y_1)$ и $\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)$ в левой части полученного неравенства, следует оценка сверху

$$M_f(\mu, y_0, y_1, n\Delta_0) \leqslant \Psi_f + \varphi(\Delta_0) + 2\omega_1(\delta_\mu) + \varepsilon, \tag{3.10}$$

если $n \geqslant n_1(\mu, \varepsilon)$. На основании (3.9) аналогично получается оценка снизу

$$M_f(\mu, y_0, y_1, n\Delta_0) \geqslant \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0(y_0)} \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} f(\gamma_0(t), \gamma_1^*(\mu t),)\, dt \geqslant$$
$$\geqslant S_n(\mu, y_0, y_1, \gamma_1^*) - \omega_1(\delta_\mu) \geqslant \Psi_f - 2\omega_1(\delta_\mu) - 2\varepsilon.$$

Таким образом,

$$M_f(\mu, y_0, y_1, n\Delta_0) \geqslant \Psi_f - 2\omega_1(\delta_\mu) - 2\varepsilon. \tag{3.11}$$

Осталось получить оценки сверху и снизу для функции $M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta)$ в случае произвольного $\Delta \geqslant 2\Delta_0$. Поскольку $\Delta = s\Delta_0 + r$ для некоторого целого s и $r \in [0, \Delta_0)$, то имеем

$$I = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t))\, dt = \frac{1}{\Delta} \int_0^{(s-1)\Delta_0} f(\gamma_0(t), \gamma_1(\mu t))\, dt +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\int_{(s-1)\Delta_0}^{\Delta} f(\gamma_0(t),\gamma_1(\mu t))\,dt.$$

Следовательно, используя условие ограниченности в среднем из (c), получим

$$|I-\frac{1}{(n-1)\Delta_0}\int_0^{(n-1)\Delta_0} f(\gamma_0(t),\gamma_1(\mu t))\,dt| \leqslant$$

$$\leqslant (\frac{1}{(n-1)\Delta_0}-\frac{1}{\Delta})|\int_0^{(n-1)\Delta_0} f(\gamma_0(t),\gamma_1(\mu t))\,dt|+$$

$$+\frac{1}{\Delta}|\int_{(n-1)\Delta_0}^{\Delta} f(\gamma_0(t),\gamma_1(\mu t))\,dt| \leqslant \frac{4\Delta_0 c_f}{\Delta}=\rho(\Delta),$$

если $\Delta_0 \geqslant \Delta_f$. Здесь постоянные Δ_f, c_f из условия (c). Отсюда и (3.10), (3.11) следует

$$-r_1(\alpha,\mu)-2\varepsilon-\rho(\Delta) \leqslant M_f(\mu,y_0,y_1,\Delta)-\Psi_f \leqslant r_2(\alpha,\mu)+\rho(\Delta)+\varepsilon \tag{3.12}$$

при условии, что $\Delta_0=\mu^{-\alpha} \geqslant \max\{\Delta_*(\varepsilon),\Delta_f\}$, $\Delta \geqslant \max\{2,n_1(\mu,\varepsilon)\}\Delta_0$. Далее, если $a \in \Omega(\mu,y_0,y_1)$, то существует последовательность $\Delta_s \to \infty$ при $s \to \infty$, для которой $\lim_{s\to\infty} M_f(\mu,y_0,y_1,\Delta_s)=a$. Выполним переход к пределу по данной последовательности в неравенствах (3.12), а затем предельный переход по $\varepsilon \to 0$, получим требуемое включение

$$a \in [\Psi_f-r_1(\alpha,\mu),\Psi_f+r_2(\alpha,\mu)].$$

Остается заметить, условия $\Delta_0=\mu^{-\alpha} \geqslant \max\{\Delta_*(\varepsilon),\Delta_f\}$, $\mu \in (0,1)$ для любого выбранного $\alpha \in (0,1)$ будет выполнено, если

$$\mu \leqslant \mu^0 < \min\{(\max\{\Delta_*(\varepsilon),\Delta_f\})^{-1/\alpha},1\}.$$

Теорема 1 доказана.

В следующей теореме рассматривается произвольный случай $k \geqslant 1$. Введем следующие обозначения:

$$\delta_j=\mu_j^{1-\alpha_j}c_j,\quad r_1^j=2\omega_j(\delta_j),\quad r_2^j=2\omega_j(\delta_j)+\varphi_j(\mu_j^{-\alpha_j}),$$

$$c_j=\max\{g_j,\mu_{j+1}g_{j+1},\dots,\mu_{j+1}\cdots\mu_k g_k\},\quad r_i=\sum_{j=1}^k r_i^j,\quad i=1,2,$$

где $\alpha_j \in (0,1)$, постоянная g_j из условия(b), $j=1,\dots,k$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (a) – (e). Тогда для любого $\alpha \in K$ существует $\mu^0 \in (0,1)$ такое, что если $|\mu_j| \leqslant \mu^0$, $j=1,\dots,k$, то множество предельных точек максимального среднего при $\Delta \to \infty$ удовлетворяет включению

$$\Omega(\mu,y) \subset [\Psi_f-r_1(\mu,\alpha),\Psi_f+r_2(\mu,\alpha)]$$

для любого начального вектора $y \in Y$.

Доказательство. В системе (1.1) выделим вектор быстрых переменных $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ и вектор медленных переменных

$$(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \in \mathbb{R}^{m_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{m_k}.$$

Тогда по теореме 1 существует $\mu_1^0 \in (0,1)$ такое, что если $\mu_1 \in (0,\mu_1^0]$, то имеет место включение

$$\Omega(\mu,y) \subset [\Psi_f^1-r_1^1,\Psi_f^1+r_2^1)], \tag{3.13}$$

где $\Psi_f^1=M_1^k(f_1)$, $f_1=M_0(f)$. Здесь

$$r_1^1=2\omega_1(\delta_1),\quad r_1^2=2\omega_1(\delta_1)+\varphi_1(\mu_1^{-\alpha_1}),\quad \delta_1=c_1\mu_1^{1-\alpha_1},$$

$$c_1 = \max\{g_1, \mu_2 g_2, \ldots, \mu_2 \cdots \mu_k g_k\}.$$

Так как $\Psi_f^1 = M_1^k(f_1)$ (множество предельных точек сводится к одной точке), то можно заменить функцию f на функцию f_1 и для нее повторить только что приведенные рассуждения. В результате получим включение предела максимального среднего

$$\Psi_f^1 \in [\Psi_f^2 - r_1^2, \Psi_f^2 + r_1^2)], \tag{3.14}$$

если $\mu_2 \in (0, \mu_2^0]$ для некоторого $\mu_2^0 \in (0,1)$, где $\Psi_f^2 = M_2^k(f_1)$. Этот предел, как и Ψ_f^1, существует в силу условия (e). Заметим, что функция f_1 оказывается непрерывной в силу условия (c) и (2.4), поскольку $\lim_{\delta\to 0}\omega_1(\delta) = 0$. Поэтому задача (1.1) будет допустима для f_1. Из (3.13) и (3.14) следует

$$\Omega(\mu, y) \subset [\Psi_f^2 - r_1^1 - r_1^2, \Psi_f^2 + r_2^1 + r_2^2)].$$

После конечного числа шагов получаем требуемый результат, при этом $\mu^0 = \min\{\mu_1^0, \ldots, \mu_k^0\}$. Заметим, что согласно (2.4), модуль непрерывности $\omega_j(\delta)$ функции f_{j-1} во всех оценках можно заменить на модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ функции f, который вычисляется по формуле (2.3). Теорема 2 доказана.

Следующий пример ($k = 1$) показывает, что существование предела максимального среднего (3.1) и повторного предела (3.2) не гарантирует существование предела максимального среднего $M_f(\mu, y_0, y_1)$. Другими словами, множество предельных точек $\Omega(\mu, y_0, y_1)$, вообще говоря, содержит более одной точки.

Пусть $m_0 = m_1 = 1$, $f(y_0, y_1) = g(y_0 + y_1)$, где $y_0, y_1 \in R$, а непрерывная и ограниченная функция $g : R \to R$ равна 0 при отрицательных значениях аргумента. Пусть также множества $G_0(\gamma_0)$ и $G_1(\gamma_1)$ в (1.1) (при $k = 1$) равны соответственно $\{1\}$ и $[1, 2]$. Тогда в данном примере

$$M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta) = \sup_{\gamma_1 \in \Gamma_1(\mu, y_1)} \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta g(y_0 + t + \gamma_1(\mu t))\,dt,$$

где $\Gamma_1(\mu, y_1)$ множество решений задачи

$$\dot\gamma_1 \in \mu[1, 2], \quad \gamma_1(0) = y_1.$$

Если положить $g(z) = \sin(z)$ при $z \geqslant 0$, то согласно [1]

$$\lim_{\Delta\to\infty} M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta) = \Phi_1(l_\mu) > 0,$$

где $l_\mu = (1 + 2\mu)/(1 + \mu)$ — отношение максимальной скорости к минимальной для функции $t + \gamma_1(\mu t)$. Если принять $g(z) = v(z)$ при $z \geqslant 0$, где $v(z)$ — "пилообразная" 2π-периодическая функция, которая на отрезке $[0, 2\pi]$ определяется следующим образом:

$$v(z) = \begin{cases} 2z/\pi, & \text{если } z \in [0, \pi/2], \\ 1 - 2(z - \pi/2)/\pi, & \text{если } z \in (\pi/2, 3\pi/2], \\ -1 + 2(z - 3\pi/2)/\pi, & \text{если } z \in (3\pi/2, 2\pi], \end{cases}$$

то аналогичный предел будет равен $\Phi_2(l_\mu)$, при этом $\Phi_1(l_\mu) \neq \Phi_2(l_\mu)$ при любом достаточно малом $\mu > 0$. Используя эти соображения, определим теперь функцию $g(z)$ при $z \geqslant 0$ следующим образом. На отрезке $[0, \Delta_1]$ положим $g(z) = \sin(z)$, где $\Delta_1 = 2k_1\pi$. Целое k_1 выберем настолько большим, чтобы $|M_f(\mu, x_0, y_0, \Delta_1) - \Phi_1(l_\mu)| \leqslant 2^{-1}$. Далее, на отрезке $[\Delta_1, \Delta_2]$ примем $g(z) = v(z)$, где $\Delta_2 = 2k_2\pi$, а целое k_2 выбирается настолько большим, чтобы $|M_f(\mu, x_0, y_0, \Delta_2) - \Phi_2(l_\mu)| \leqslant 2^{-2}$. Рассуждая аналогично, получим, что на нечетном отрезке $[0, \Delta_{2s-1}]$ реализуется неравенство

$|M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta_{2s-1}) - \Phi_1(l_\mu)| \leqslant 2^{-(2s-1)}$, а на четном отрезке $[0, \Delta_{2s}]$ выполняется соотношение $|M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta_{2s}) - \Phi_2(l_\mu)| \leqslant 2^{-2s}$. Отсюда следует, что для любого фиксированного достаточно малого $\mu > 0$ справедливы предельные равенства

$$\lim_{s\to\infty} M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta_{2s-1}) = \Phi_1(l_\mu), \qquad \lim_{s\to\infty} M_f(\mu, x_0, y_0, \Delta_{2s}) = \Phi_2(l_\mu).$$

Поскольку $\Phi_1(l_\mu) \neq \Phi_2(l_\mu)$, то предел $\lim_{\Delta\to\infty} M_f(\mu, y_0, y_1, \Delta)$ не существует. В то же время предел (3.1) равен 0, так как $\gamma_0(t) = y_0 + t$ является единственным решением задачи $\dot\gamma_0 = 1$, $\gamma_0(0) = y_0$, а функция g имеет нулевое среднее. Повторный предел Ψ_f (3.2), естественно, также равен 0.

Литература

[1] Филатов, О.П. Усреднение систем дифференциальных включений / О.П. Филатов, М.М. Хапаев. – Изд-во Московского университета, 1998.

[1] Плотников, В.А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999.

[1] Филатов, О.П. Вычисление пределов максимальных средних / О.П. Филатов // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59. – Вып. 5. – С. 759–767.

[1] Филатов, О.П. Асимптотический метод в задачах вычисления пределов максимальных средних / О.П. Филатов // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66. – Вып. 3. – С. 431–438.

[1] Филатов, О.П. Существование пределов максимальных средних / О.П. Филатов // Математ. заметки. – 2000. – Т. 67. – №3. – С. 433–440.

Поступила в редакцию 3/*IV*/2007;
в окончательном варианте — 3/*IV*/2007.

APPROXIMATION OF LIMITS OF MAXIMAL MEANS

© 2007 O.P. Filatov[2]

The problem of the limits of maximal means for the real functions is considered. The supremum for means is evaluated over all solutions of the system of the differential inclusions with the heterogeneous variables. The rate of change of the variables is characterized by small parameters. So the problem of the evaluation of the limits is reduced to some more simple problems. The accuracy of the approximation of the limits of maximal means is found.

Paper received 3/*IV*/2007.
Paper accepted 3/*IV*/2007.

[2]Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.