УДК 517.956.4

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ПОЛНОЙ МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ

© 2007 М.С. Туласынов[1]

В данной работе устанавливается корректность в классах Гельдера краевой задачи для одного сингулярного параболического уравнения с оператором Бесселя в случае полной матрицы склеивания.

В области $Q = (-\infty, +\infty) \times (0, T)$ рассматривается сингулярное параболическое уравнение переменного типа

$$u_t \operatorname{sgn} y = u_{yy} + \frac{k}{y} u_y, \tag{1}$$

где $|k| < 1$. Решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H_k^{2l+\gamma,\ l+\frac{\gamma}{2}}(Q)(l \in N, \gamma \in (0,1))$ [1. С. 25], которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(y,0) = \varphi_1(y), y > 0, \qquad u(y,T) = \varphi_2(y), y < 0 \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u(-0,\ t) \\ D_y u(-0,\ t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(+0,\ t) \\ D_y u(+0,\ t) \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < T, \tag{3}$$

где a_{ij} — заданные постоянные и $D_y u = |y|^k \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Предполагается, что матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является невырожденной, т.е. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. В противном случае поставленная задача распадется на две независимые подзадачи. Действительно, вырожденность матрицы A влечет за собой существование связи между $u(-0,t)$ и $u_x(-0,t)$, и тогда в области $Q^- = (-\infty, 0) \times (0, T)$ возникает независимая подзадача. Отметим, что аналогичная краевая задача для единичной матрицы A рассматривалась в монографии С.А. Терсенова [1].

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему уравнений

$$\begin{cases} u_{1t} = u_{1yy} + \dfrac{k}{y} u_{1y}, \\ -u_{2t} = u_{2yy} + \dfrac{k}{y} u_{2y} \end{cases} \tag{4}$$

[1] Туласынов Михаил Станиславович (sakhaneo@mail.ru), математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета, 677011, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

в области $Q^+ = (0,\infty)\times(0,T)$, где $k = 2\alpha - 1, 0 < \alpha < 1$. Тогда поставленная задача (1)–(3) для системы (4) переформулируется следующим образом: найти ограниченные решения $u_1(y,t)$ и $u_2(y,t)$ системы (4) в области Q^+ из пространства $H_k^{2l+\gamma,\ l+\frac{\gamma}{2}}(Q^+)$, которые удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(y,0) = \varphi_1(y), \qquad u(y,T) = \varphi_2(-y), \ \ y > 0 \tag{5}$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u_2(0,t) \\ -D_y u_2(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(0,t) \\ D_y u_1(0,t) \end{pmatrix}, 0 < t < T. \tag{6}$$

Единственность решения. Пусть поставленная задача имеет два отличных друг от друга решения (u_1,u_2) и $(\tilde u_1,\ \tilde u_2)$. Тогда функции $v_1 = u_1 - \tilde u_1$ и $v_2 = u_2 - \tilde u_2$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} v_{1t} = v_{1yy} + \dfrac{k}{y} v_{1y}, \\ v_{2t} = v_{2yy} + \dfrac{k}{y} v_{2y}, \end{cases} \tag{7}$$

начальным условиям

$$v_1(y,0) = v_2(y,T) = 0, \qquad y > 0, \tag{8}$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} v_2(0,t) \\ -D_y v_2(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(0,t) \\ D_y v_1(0,t) \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < T. \tag{9}$$

Тогда, интегрируя тождества

$$\begin{cases} v_1 y^k \left(v_{1t} - v_{1yy} - \dfrac{k}{y} \nu_{1y} \right) = \dfrac{y^k}{2} \dfrac{\partial v_1^2}{\partial t} - \nu_1 \dfrac{\partial (y^k v_{1y})}{\partial y} = 0, \\ v_2 y^k \left(-v_{2t} - v_{2yy} - \dfrac{k}{y} \nu_{2y} \right) = -\dfrac{y^k}{2} \dfrac{\partial v_2^2}{\partial t} - \nu_2 \dfrac{\partial (y^k v_{2y})}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

по области Q^+ и применяя начальные условия (8), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^\infty y^k v_1^2(y,T)dy + \int_{Q^+} y^k v_{1y}^2 dydt + \int_0^T v_1(0,t) D_y v_1(0,t)dt = 0, \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^\infty y^k v_2^2(y,0)dy + \int_{Q^+} y^k v_{2y}^2 dydt + \int_0^T v_2(0,t) D_y v_2(0,t)dt = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В силу условий склеивания (9) из системы уравнений (10) имеем

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty y^k v_1^2(y,T)dy + \int_{Q^+} y^k v_{1y}^2 dydt \right) + \frac{1}{2} \int_0^\infty y^k v_2^2(y,0)dy +$$
$$+ \int_{Q^+} y^k v_{2y}^2 dydt - a_{11}a_{21} \int_0^T v_1^2(0,t)dt - a_{12}a_{22} \int_0^T D_y^2 v_1(0,t)dt = 0.$$

Откуда при выполнении условий

$$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0, \qquad a_{11}a_{21} \leqslant 0, \qquad a_{12}a_{22} \leqslant 0 \tag{11}$$

получаем, что $v_i \equiv 0, \ i = 1, \ 2.$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (11), то краевая задача (4)–(6) может иметь не более одного ограниченного решения.

Существование решения. Будем считать, что функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(-y)$ принадлежат пространству $H^{2l+\gamma}(0,\infty)$. Без ограничения общности будем считать, что эти функции продолжены на значения $y<0$ с сохранением пространству $H^{2l+\gamma}(-\infty,\infty)$ [2. С. 343] и пусть

$$D_y^{2s+1}\varphi_i(0)=D_y^{2s}\varphi_i(T)=0,\quad s=0,1,...,l,\quad i=1,2. \tag{12}$$

Решения u_1 и u_2 системы (4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1(y,t)&=-\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{-\frac{y^2}{4(t-\tau)}}(t-\tau)^{-\alpha}\nu(\tau)d\tau+\omega_1(y,t),\\ u_2(y,t)&=-\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^T e^{-\frac{y^2}{4(\tau-t)}}(\tau-t)^{-\alpha}\mu(\tau)d\tau+\omega_2(y,t), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\omega_1(y,t)=\int\limits_0^\infty \Gamma(y,\eta,t;2\alpha-1)\varphi_1(\eta)d\eta, \omega_2(y,t)=\int\limits_0^\infty \Gamma(y,\eta,T-t;2\alpha-1)\varphi_2(-\eta)d\eta,$$

$$\Gamma(y,\eta,t;2\alpha-1)=(2t)^{-1}y^{1-\alpha}\eta^\alpha e^{-\frac{y^2+\eta^2}{4t}}I_{\alpha-1}\left(\frac{y\eta}{2t}\right),$$

где $I_\nu(x)$ — модификационная функция Бесселя.

Тогда функции, представленные формулами (13), удовлетворяют системе уравнений (4) и начальным условиям (5) соответственно. Нужно найти функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$ из пространства $H^{l-1+\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$, которые удовлетворяют условиям (см. [1, гл. 2, §2])

$$\nu^{(s)}(0)=\mu^{(s)}(T)=0,\quad s=0,1,...,l-1. \tag{14}$$

Если функции, представленные формулами (13), удовлетворить условию склеивания (6), то получим

$$\begin{cases} a_{12}\nu(t)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t\frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau+\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^T\frac{\mu(\tau)}{(\tau-t)^\alpha}d\tau=\Phi_0(t),\\ \mu(t)=-a_{22}\nu(t)+\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t\frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau+\Phi_1(t), \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\Phi_0(t)=\omega_2(0,t)-a_{11}\omega_1(0,t)-a_{12}D_y\omega_1(0,t),$$
$$\Phi_1(t)=-D_y\omega_2(0,t)-a_{21}\omega_1(0,t)-a_{22}D_y\omega_1(0,t),$$

причем $\Phi_i\in H^{l-1+\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)\quad(i=0,1)$.

Предположим, что функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$ принадлежат пространству $H^{l-1+\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$. Тогда в силу (14) из системы (15) следует, что

$$\begin{cases} a_{12}\nu(T)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^T\frac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau=\Phi_0(T),\\ -a_{22}\nu(T)+\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^T\frac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau+\Phi_1(T)=0. \end{cases} \tag{16}$$

При выполнении условий (16) систему (15) можно переписать так:

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu(t)-\nu(T)\right)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\left(\displaystyle\int_0^t \frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T \frac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_t^T \frac{\mu(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}}d\tau=\Phi_0(t)-\Phi_0(T), \\ \mu(t)=-a_{22}\left(\nu(t)-\nu(T)\right)+\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\left(\displaystyle\int_0^t \frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T \frac{\nu(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)+ \\ \qquad\qquad +\Phi_1(t)-\Phi_1(T). \end{cases} \tag{17}$$

Далее, если $l>1$, то возьмем первую производную в системе уравнений (17):

$$\begin{cases} a_{12}\nu'(t)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau+\dfrac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T \frac{\mu'(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}}d\tau=\Phi_0^{(1)}(t), \\ \mu'(t)=-a_{22}\nu'(t)+\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau+\Phi_1^{(1)}(t). \end{cases} \tag{18}$$

Из системы (18) следует, что

$$\begin{cases} a_{12}\nu'(T)-\dfrac{a_{11}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \frac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau=\Phi_0^{(1)}(T), \\ -a_{22}\nu'(T)+\dfrac{a_{21}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^T \frac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau+\Phi_1^{(1)}(T)=0. \end{cases} \tag{19}$$

При выполнении условий (19) систему (18) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu'(t)-\nu'(T)\right)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\left(\displaystyle\int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T \frac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_t^T \frac{\mu'(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}}d\tau=\Phi_0^{(1)}(t)-\Phi_0^{(1)}(T), \\ \mu'(t)=-a_{22}\left(\nu'(t)-\nu'(T)\right)+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\left(\displaystyle\int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T \frac{\nu'(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)+\Phi_1^{(1)}(t)-\Phi_1^{(1)}(T). \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, получили систему уравнений (20), имеющую вид, что и система уравнений (17). Следовательно, при выполнении условий

$$\begin{cases} a_{12}\nu^{(s)}(T)-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^T \frac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau=\Phi_0^{(s)}(T), \\ -a_{22}\nu^{(s)}(T)+\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^T \frac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau+\Phi_1^{(s)}(T)=0, \qquad s=2,3,\ldots,\, l-1 \end{cases} \tag{21}$$

мы придем к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{12}\left(\nu^{(l-1)}(t)-\nu^{(l-1)}(T)\right)-\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^t \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau\right)+ \\ \qquad +\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^T \frac{\mu^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^\alpha}d\tau=\Phi_0^{(l-1)}(t)-\Phi_0^{(l-1)}(T), \\ \mu^{(l-1)}(t)=-a_{22}\left(\nu^{(l-1)}(t)-\nu^{(l-1)}(T)\right)+\frac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^t \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-\right. \\ \qquad \left.-\int\limits_0^T \frac{\nu^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau\right)+\Phi_1^{(l-1)}(t)-\Phi_1^{(l-1)}(T), \end{cases} \tag{22}$$

где функции $\nu^{(l-1)}(t)$ и $\mu^{(l-1)}(\tau)$ принадлежат пространству $H^{\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$.

Вводя новую искомую функцию $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)=\nu^{(l-1)}(t)-\nu^{(l-1)}(T)\dfrac{t}{T}$, из системы (22) имеем

$$\begin{cases} a_{12}\left(\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)-\nu^{(l-1)}(T)\frac{T-t}{T}\right)-\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^t \frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-\right. \\ \qquad \left.-\int\limits_0^T \frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau\right)+\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^T \frac{\mu^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^\alpha}d\tau=\Phi_0^{(l-1)}(t)-\Phi_0^{(l-1)}(T)+ \\ \qquad +\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}\nu^{(l-1)}(T)}{T(2-\alpha)(1-\alpha)}\left(T^{2-\alpha}-t^{2-\alpha}\right), \\ \mu^{(l-1)}(t)=-a_{22}\left(\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)-\nu^{(l-1)}(T)\frac{T-t}{T}\right)+ \\ \qquad +\frac{2^{1-2\alpha}a_{21}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^t \frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-\int\limits_0^T \frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^\alpha}d\tau\right)+ \\ \qquad +\Phi_1^{(l-1)}(t)-\Phi_1^{(l-1)}(T)+\frac{2^{1-2\alpha}a_{21}\nu^{(l-1)}(T)}{\Gamma(\alpha)T(2-\alpha)(1-\alpha)}\left(T^{2-\alpha}-t^{2-\alpha}\right). \end{cases} \tag{23}$$

Исключив функцию $\mu^{(l-1)}(\tau)$ из системы уравнений (23), получим

$$a_{12}\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)+\int\limits_0^T \frac{M(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{|t-\tau|^{1/2}}d\tau=R(t), \tag{24}$$

где

$$M(t,\tau)=\begin{cases} -\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^\alpha}-\frac{2^{2-4\alpha}a_{21}(t-\tau)^\alpha(T-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^\alpha}+ \\ \qquad +\frac{2^{2-4\alpha}a_{21}(t-\tau)^\alpha(T-t)^{1-\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)(T-\tau)^\alpha}F\left(1,\alpha,2-\alpha;\frac{T-t}{T-\tau}\right), & 0<\tau<t, \\ -\frac{2^{1-2\alpha}a_{22}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}(\tau-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^\alpha}-\frac{2^{2-4\alpha}a_{21}(\tau-t)^\alpha(T-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^\alpha}+ \\ \qquad +\frac{2^{2-4\alpha}a_{21}(T-\tau)^{1-\alpha}(\tau-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)(T-t)^\alpha}F\left(1,\alpha,2-\alpha;\frac{T-t}{T-\tau}\right), & t<\tau<T, \end{cases}$$

$$R(t)=\Phi_0^{(l-1)}(t)-\Phi_0^{(l-1)}(T)+\frac{2^{1-2\alpha}a_{11}\nu^{(l-1)}(T)}{T(2-\alpha)(1-\alpha)}\left(T^{2-\alpha}-t^{2-\alpha}\right)+$$
$$-a_{12}\nu^{(l-1)}(T)\frac{T-t}{T}-\frac{2^{1-2\alpha}a_{22}\nu^{(l-1)}(T)}{\Gamma(\alpha)T(1-\alpha)(2-\alpha)}(T-t)^{2-\alpha}-$$
$$-\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^T\frac{\Phi_1^{(l-1)}(T)-\Phi_1^{(l-1)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}}d\tau-\frac{2^{2-4\alpha}a_{21}\nu^{(l-1)}(T)}{\Gamma^2(\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)T}\int\limits_t^T\frac{T^{2-\alpha}-t^{2-\alpha}}{(\tau-t)^{1-\alpha}}d\tau,$$

причем $M(t,\ \ t-0)=-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{11}}{\Gamma(\alpha)},\ \ M(t,\ \ t+0)=-\dfrac{2^{1-2\alpha}a_{22}}{\Gamma(\alpha)}.$

Уравнение (24), очевидно, при $a_{12}=0$ является сингулярным интегральным уравнением, иначе говоря неоднородным уравнением Фредгольма. Мы должны показать, что решение данного уравнения принадлежит пространству $H^{\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$, и что оно является неограниченным при $t=T$ (но допускающим при $t=T$ особенность порядка меньше единицы) и ограниченным при $t=0$.

Поэтому далее будем рассматривать два случая.

Случай 1. Пусть $a_{12}=0$ и выполнены условия (14), т.е. $a_{11}a_{22}>0,\quad a_{11}a_{21}\leqslant 0$. Тогда уравнение (24) представимо в виде:

$$\int\limits_0^T\frac{M(t,t)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}d\tau+\int\limits_0^T k(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)d\tau=R(t),\tag{25}$$

где $k(t,\tau)=\dfrac{M(t,\tau)-M(t,t)}{|t-\tau|^{\alpha}}.$

Из формулы (25) следует, что регулярная часть $k(t,\tau)$ непрерывна всюду на интервале $(0,T)$, кроме точки $\tau=t$, где для нее справедлива оценка $|k(t,\tau)|<\dfrac{A}{|\tau-t|^{\alpha}}.$

Если уравнение (25) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля к эквивалентному сингулярному уравнению [3], то получим:

$$\begin{gathered}(a_{22}-a_{11}\cos\pi\alpha)\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)-\frac{a_{11}\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{T-\tau}{T-t}\right)^{1-\alpha}\frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau=\\ =-\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}{2^{1-2\alpha}\pi}\left(\frac{\tilde{\Phi}'(T)(T-t)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{\tilde{\Phi}(T)}{(T-t)^{1-\alpha}}+\int\limits_t^T\frac{\tilde{\Phi}'(\tau)-\tilde{\Phi}'(T)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}d\tau\right),\end{gathered}\tag{26}$$

где

$$\tilde{\Phi}(t)=R(t)-\int\limits_0^T k(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)d\tau.$$

Введем обозначения $A_1=a_{11}\sin\pi\alpha, A_2=a_{22}-a_{11}\cos\pi\alpha$. При $t=T$ из уравнения (26) имеем

$$a_{11}\int\limits_0^T\frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau=\frac{\Gamma(\alpha)}{2^{1-2\alpha}}\tilde{\Phi}(T),\tag{27}$$

Тогда при выполнении условия (27) уравнение (26) примет вид

$$A_2\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)-\frac{A_1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{T-t}{T-\tau}\right)^{\alpha}\frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau= \\ =-\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}{2^{1-2\alpha}\pi}\left(\frac{\tilde{\Phi}'(T)(T-t)^{\alpha}}{\alpha}+\int\limits_t^T\frac{\tilde{\Phi}'(\tau)-\tilde{\Phi}'(T)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}d\tau\right). \tag{28}$$

Так как $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)\in H^{\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$, то должно выполняться условие

$$A_1\int\limits_0^T\frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{(T-\tau)^{1+\alpha}}d\tau=-\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}{2^{1-2\alpha}\pi}\frac{\tilde{\Phi}'(T)}{\alpha}. \tag{29}$$

Тогда при выполнении (29) уравнение (28) примет вид

$$A_2\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)-A_1\int\limits_0^T\left(\frac{T-t}{T-\tau}\right)^{1+\alpha}\frac{\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau=\tilde{R}(t), \tag{30}$$

где

$$\tilde{R}(t)=-\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}{2^{1-2\alpha}\pi}\int\limits_t^T\frac{\tilde{\Phi}'(\tau)-\tilde{\Phi}'(T)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}d\tau.$$

Уравнение (30) будем рассматривать относительно функции $\nu_0(t)=\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)\,(T-t)^{-1-\alpha}$:

$$A_2\nu_0(t)-\frac{A_1}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\nu_0(\tau)}{\tau-t}d\tau=\tilde{R}(t)\,(T-t)^{-1-\alpha}\,. \tag{31}$$

Каноническая функция $\chi(z)=(z-T)^{-1+\theta}z^{1-\theta}$, $\theta=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{A_1}{A_2}$, а индекс $\chi=0$. Уравнение (31) в этом классе решений однозначно, безусловно разрешимо, и решение дается формулой

$$\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)=\frac{A_2}{A_1^2+A_2^2}\tilde{R}(t)- \\ -\frac{A_1}{A_1^2+A_2^2}(T-t)^{\alpha+\theta}t^{1-\theta}\int\limits_0^T\frac{\tilde{R}(\tau)d\tau}{(T-\tau)^{\alpha+\theta}\tau^{1-\theta}(\tau-t)}. \tag{32}$$

Полученное решение (32) при заданной функции $\tilde{R}(t)$ из пространства $H^{\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$ будет, очевидно, удовлетворять условию Гельдера с показателем $\dfrac{\gamma+2\alpha}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$, отличных от концов [4, с. 58]. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [4, с. 75], легко видеть, что $\tilde{\nu}_0(0)=\tilde{\nu}_0(T)=0$.

Для дальнейшего исследования поведения их на концах воспользуемся леммой [1, 4].

Лемма. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем λ вблизи точки C, включая C(C обозначает 0 или T), $0<\mu<1$. Тогда, для точек контура $(0,T)$ интеграл типа Коши

$$\Psi(t) = (t-C)^{\gamma} \int\limits_{0}^{T} \frac{\varphi(t)}{(\tau-C)^{\gamma}(\tau-t)} d\tau \tag{33}$$

удовлетворяет условию Гельдера вблизи точки С, включая С, с показателем $\min\{\lambda,\gamma\}$ при $\lambda \neq \gamma$ и условию Гельдера с показателем $\lambda-\varepsilon$ при $\lambda=\gamma$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

В силу этой леммы получим, что если $\dfrac{A_1}{A_2} \geqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\pi\alpha}{2}$ $\left(\dfrac{A_1}{A_2} \leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)$, то в формуле (32) функция $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\dfrac{\gamma+2\alpha}{2}$ при $0<\gamma<2\theta$ $(0<\gamma<2-2\theta-2\alpha)$, условию Гельдера с показателем $\alpha+\theta$ $(1-\theta)$ при $2\theta<\gamma<1$ $(2-2\theta-2\alpha<\gamma<1)$ и условию Гельдера с показателем $\dfrac{1+\gamma}{2}-\varepsilon$ при $\gamma=2\theta$ $(\gamma=2-2\theta-2\alpha)$.

Таким образом, при выполнении условий (16), (19), (21), которые имеют вид

$$\begin{cases} \nu^{(s)}(T) = \dfrac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|}, \\ \displaystyle\int\limits_0^T \frac{\nu^{(s)}(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}} d\tau = \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|}\sqrt{\pi}, \qquad s=0,.1,\ldots,l-1, \end{cases} \tag{34}$$

мы получили функцию $\nu(t)$ из искомого класса $H^{l-1+\frac{\gamma+2\alpha}{2}}(0,T)$, $0<\gamma<2\theta$ $(1<\gamma<1-2\theta)$, при $\dfrac{A_1}{A_2} \geqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\pi\alpha}{2}$ $\left(\dfrac{A_1}{A_2} \leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)$.

Значения $\nu^{(s)}(t)$ определяем по формуле Тейлора

$$\nu^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-1} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|(k-s)!}(T-t)^{k-s} + \\ + \frac{1}{(l-1-s)!} \int\limits_0^{T-t} (T-t-\tau)^{l-1-s}\nu^{(s)}(\tau)d\tau, \qquad s=0,1,...,l-1.$$

Тогда для выполнения условий $\nu^{(s)}(0)=0, s=0,1,...,l-1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu^{(s)}(0) = \sum_{k=s}^{l-1} \frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T) - a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|(k-s)!}T^{k-s} + \\ + \frac{1}{(l-1-s)!} \int\limits_0^{T} (T-\tau)^{l-1-s}\nu^{(s)}(\tau)d\tau, \qquad s=0,1,...,l-1. \tag{35}$$

Подставив найденные значения функций $\nu^{(s)}(t)$ во второе уравнение системы (34), получим

$$-\sum_{k=s}^{l-1}\frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T)-a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|\,(k-s)!\left(k-s+\frac{1}{2}\right)}(T-t)^{k-s+\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{1}{(l-1-s)!}\int_0^T\frac{d\tau}{(T-\tau)^{1/2}}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)^{l-1-s}\nu^{(s)}(\tau_1)d\tau_1= \tag{36}$$
$$=\frac{a_{11}\Phi_1^{(s)}(T)-a_{21}\Phi_0^{(s)}(T)}{|A|}\sqrt{\pi},\qquad s=0,1,..,l-1.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(-x)$ принадлежат пространству $H^{2l+\gamma}(0,\infty)\,(l\in N)$ и выполнены условия

$$a_{11}a_{22}>0,\quad a_{11}a_{21}\leqslant 0;$$
$$0<\gamma<\min(2-2\theta-2\alpha,\,2\theta),\qquad \theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A_1}{A_2},$$
$$A_1=a_{11}\sin\pi\alpha,\quad A_2=a_{22}-a_{11}\cos\pi\alpha.$$

Тогда при выполнении $2l$ условий (35) и (36) существует единственное решение краевой задачи (4)–(6) из пространства $H_k^{2l+\gamma,l+\frac{\gamma}{2}}(Q^+)$.

Замечание. Приведенные выше рассуждения показывают, что найденное в теореме 2 решение краевой задачи (4)–(6) будет принадлежать пространству:

1) $H_k^{2l+\beta,l+\frac{\beta}{2}}(Q^+)$, если $\beta=\min(2-2\theta-2\alpha,2\theta)<\gamma<1$;

2) $H_k^{2l+\gamma-2\varepsilon,l+\frac{\gamma}{2}-\varepsilon}(Q^+)$($\varepsilon$ — сколь угодно малая положительная постоянная), если $\gamma=\min(2-2\theta-2\alpha,2\theta)$;

Случай 2. Пусть $a_{12}\neq 0$ и выполнены условия (11), т.е. $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}>0$, $a_{11}a_{21}\leqslant 0$, $a_{12}a_{22}\leqslant 0$. Перепишем уравнение (24) в следующем виде:

$$\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)+\int_0^T K(t,\tau)\tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau)d\tau=R_0(t), \tag{37}$$

где $K(t,\tau)=\dfrac{M(t,\tau)}{|\tau-t|^{\alpha}}$.

Уравнение Фредгольма (37) имеет единственное решение. В самом деле, если однородное уравнение (37) имеет нетривиальное решение $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)$, то функция $\nu^{(l-1)}(t)$ будет нетривиальным решением однородной системы (17), т.к. вблизи точки $t=T$ контура (0, T) ведет себя как $O(T-t)^{(1+\gamma)/2}$, то функция $\nu^{(l-1)}(t)(t-T)^{-1/2}$ будет нетривиальным решением однородного уравнения (37). Нетрудно видеть, что $\nu(t)$ и $\nu(t)(t-T)^{-1/2}$ будут нетривиальными решениями однородной системы (17). Тогда, в силу единственности решения поставленной задачи, имеем $\nu(t)=0$. Из общей теории [3, 4] следует, что неоднородное уравнение Фредгольма (37) имеет решение. Как и в случае 1, легко определить значения $\nu^{(s)}(t)$.

Таким образом, доказана основная теорема.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(-x)$ принадлежат пространству $H^{2l+\gamma}(0,\infty)$ и

1) при $a_{12}=0$ выполнены условия $a_{11}a_{22}>0$, $\quad a_{11}a_{21}\leqslant 0$ и $0<\gamma<\min(2-2\theta-2\alpha,2\theta)$, где $\theta=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{a_{11}\sin\pi\alpha}{a_{22}-a_{11}\cos\pi\alpha}$;

2) при $a_{12} \neq 0$ выполнены условия $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21} > 0$, $a_{11}a_{21} \leqslant 0$, $a_{12}a_{22} \leqslant 0$.

Тогда при выполнении $2l$ условий (35) и (36) существует единственное решение краевой задачи (1)–(3) из пространства $H_k^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q)$.

Литература

[1] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов. – Новосибирск: Наука, 1985. – 105 с.

[2] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

[3] Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[4] Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

Поступила в редакцию 9/ *VII*/2007;
в окончательном варианте — 9/ *VII*/2007.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH FULL MATRIX OF PASTING CONDITIONS FOR A SINGULAR PARABOLIC EQUATION WITH VARYING EVOLUTION DIRECTION

© 2007 M.S. Tulasynov[2]

In this paper the author investigates the correctness of boundary value problem for a singular parabolic equation with the Bessel operator in a Hölder classes for the case of full matrix of pasting conditions.

Paper received 9/ *VII*/2007.
Paper accepted 9/ *VII*/2007.

[2]Tulasynov Mikhail Stanislavovich (sakhaneo@mail.ru), Dept. of Mathematical Analyze of Institute of Mathematics and Informatics, Yakut State University n.a. M.K. Ammosov, Yakutsk, Russia.