

УДК 517.987.1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОЙ ПОЛУГРУППЕ¹

© 2007 Т.А. Срибная²

Доказана теорема о продолжении непрерывной сверху в нуле, исчерпывающей квазитреугольной субмеры со значениями в частично упорядоченной полугруппе с m -класса Σ на σ -кольцо $\bar{\Sigma} \supset \Sigma$ до квазитреугольной субмеры, непрерывной в нуле на $\bar{\Sigma}$.

В качестве следствий получены теоремы о продолжении векторной субмеры Добракова и о продолжении квазитреугольной субмеры со значениями в $\bar{R}^+$.

Введение

В предлагаемой работе рассматривается вопрос о продолжении векторной квазитреугольной субмеры.

Теоремы о продолжении векторных аддитивных функций множества с класса множеств $\mathcal{P}$ на класс $\Sigma \supset \mathcal{P}$ с сохранением основных свойств доказаны в работах [1–3].

Для простейших классов неаддитивных функций множества задача о продолжении функции множества решена в работах [4–6].

Очень общие теоремы о продолжении жордановых внешних мер получены Л.Я. Савельевым [7] и С.А. Малюгиным [8]. Функция множества φ , заданная на кольце множеств Σ и принимающая значения в равномерном пространстве (S, ω) , называется жордановой внешней мерой, если $\varphi(\emptyset) = e$ и для любого окружения $W \in \omega$ существует окружение $V \in \omega$ такое, что если $B \in \Sigma$, $\{\varphi(F), F \subset B, F \in \Sigma\} \subset V[e]$, то $(\varphi(A \cup B), \varphi(A)) \in W$ для любого $A \in \Sigma$.

При изучении вопроса о продолжении квазитреугольной субмеры результаты работ [7] и [8] неприменимы, так как определенная на кольце квазитреугольная субмера, вообще говоря, не является жордановой внешней мерой.

Отметим, что Л.Я. Савельев и С.А. Малюгин при доказательстве теорем о продолжении функций множества используют общий топологический принцип продолжения по непрерывности.

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

²Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnaya@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В примере 2.3 будет показано, что рассматриваемая в работе квазитреугольная субмера может не быть непрерывной в порожденной топологии. Поэтому при решении вопроса о продолжении квазитреугольной субмеры φ , заданной на классе множеств Σ , нужно либо строить топологию на Σ , относительно которой φ была бы равномерно непрерывной, либо строить искомое продолжение конструктивно.

В предлагаемой работе выбран второй путь, то есть продолжение квазитреугольной субмеры строится конструктивно.

1. Основные определения и обозначения. Примеры

Определение 1.1. Пусть $X = (X, +, 0, \leq)$ — частично упорядоченная полугруппа [9]. Базисом частично упорядоченной полугруппы будем называть такое множество элементов $H \subset \{x \in X : x > 0\}$, что

- 1) $\forall (h \in H) \exists (h_1 \in H) (h_1 + h_1 < h)$;
- 2) $\forall (h_i \in H), i = 1, 2, \exists (h \in H) (h < h_i, i = 1, 2)$;
- 3) $\inf H = 0$.

Для любого $z \in X$ положим

$$\varepsilon(z) = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y + z, y \leq x + z\}.$$

Тогда семейство $\{\varepsilon(h), h \in H\}$ образует базу некоторой равномерности на X . Топологию на X , определяемую этой равномерностью, обозначим $\Gamma(H)$. Если направленность $(x_\alpha, \alpha \in A)$ из X $\Gamma(H)$ — сходится к некоторому $x \in X$, то будем писать $H - \lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$. Отметим, что

$$H - \lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x \leftrightarrow \forall (h \in H) \exists (\alpha' \in A)$$

$$\forall (\alpha \in A) (\alpha > \alpha' \Rightarrow (x_\alpha, x) \in \varepsilon(h)).$$

Базис H будем называть C -базисом, если для любого элемента $x \in H$ существует и равна x нижняя грань множества $\{x+h, h \in H\}$. Если H — C -базис, то топология $\Gamma(H)$ — отделима и выполняется следующее свойство: если x_α^1, x_α^2 — направленности из X с одним множеством индексов A , $x_\alpha^1 \leq x_\alpha^2, \alpha \in A$, и $H - \lim_{\alpha \in A} x_\alpha^i = x^i, i = 1, 2, \dots$ то $x^1 \leq x^2$.

Базис H будем называть σ -базисом, если существует последовательность элементов $\{h_n\} \subset H$ такая, что

$$H - \lim_n h_n = 0.$$

Приведем примеры частично упорядоченных полугрупп с базисом.

Пример 1.1. Полугруппа $[0; +\infty]$ с обычными операциями сложения и отношением порядка и с базисом $H = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Пример 1.2. Пусть G — топологическая абелева группа. Обозначим через $\mathcal{A}(G)$ семейство всех непустых подмножеств G , через $\mathcal{G}(G)$ — семейство всех замкнутых подмножеств $\mathcal{A}(G)$.

Замыкание множества $A \subset G$ обозначим $\overline{A}$. Определим отношение эквивалентности "р" на $\mathcal{A}(G)$:

$$ApB \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.$$

Тогда фактор-полугруппа $(\mathcal{A}(G), +)/\rho$, где "+" — обычная операция сложения (для любых $A, B \in \mathcal{A}(G)$ $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$) может быть отождествлена с полугруппой $(\mathcal{G}(G), *)$, где сложение "*" определяется формулой:

$$A * B = \overline{A + B}.$$

Множества $(\mathcal{A}(G), +, \subset, \{0\})$ и $(\mathcal{G}(G), *, \subset, \{0\})$ являются частично упорядоченными полугруппами с базисом $\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в топологической абелевой группе G , состоящая из замкнутых симметричных множеств.

Если топологическая абелева группа G полна и метризуема, то $(\bar{\mathcal{G}}(G), *, \subset, \{0\})$ является частично упорядоченной полугруппой с C — σ -базисом, полной в топологии $\Gamma(H)$.

Пусть T — некоторое множество, Σ — непустой класс подмножеств множества T , $\emptyset \in \Sigma$. Через Σ_σ будем обозначать класс счетных объединений множеств класса Σ ; через $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ — наследственное σ — кольцо, порожденное классом Σ_σ , через $R(\Sigma)$ — кольцо множеств, порожденное классом Σ , через $S(\Sigma)$ — σ -кольцо, множеств, порожденное классом Σ .

Последовательность попарно непересекающихся множеств будем называть спектром, убывающую последовательность множеств с пустым пересечением — локализатором.

Будем говорить, что функция множества $\varphi : \Sigma \rightarrow X$

- монотонна, если для любых $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ справедливо $\varphi(A) \leq \varphi(B)$;
- исчерпывающая на Σ , если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$H - \lim_n \varphi(E_n) = 0; \quad (1.1)$$

- непрерывная сверху в нуле на Σ , если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполняется соотношение (1.1);
- непрерывная в нуле на Σ , если для любой последовательности $\{E_n\} \subset \Sigma$, сходящейся к пустому множеству, выполняется соотношение (1.1).

Монотонную функцию множества $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ будем называть квазитреугольной субмерой, если для любого элемента $h \in H$ существует элемент $f \in H$, такой что для любых $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \in \Sigma$, справедливо: если $\varphi(A) < f$, $\varphi(B) < f$ то $\varphi(A \cup B) < h$.

Покажем, что рассматриваемая в работе квазитреугольная субмера может не быть непрерывной в порожденной топологии.

Следуя [5], топологию Γ на кольце множеств Σ будем называть топологией Фреше–Никодима (FN -топологией), если (Σ, Δ, Γ) является топологической группой и отображение $(A, B) \rightarrow A \cap B$ множества $\Sigma \times \Sigma$ в Σ равномерно непрерывно.

Каждой квазитреугольной субмере, заданной на кольце Σ , со значениями во множестве $[0; +\infty]$ соответствует некоторая FN -топология на Σ .

Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ положим $\mathcal{U}_\varepsilon = \{E \in \Sigma : \varphi(E) < \varepsilon\}$. Так как каждый класс множеств $\mathcal{U}_\varepsilon$ нормален и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$\{A \cup B, A \in \mathcal{U}_\delta, B \in \mathcal{U}_\delta\} \subset \mathcal{U}_\varepsilon,$$

то, в силу предложения 1.5.[5], классы множеств $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}$, определяют базу окрестностей $\{\emptyset\}$ некоторой FN -топологии.

Такую топологию называют топологией порожденной субмерой φ и обозначают $\Gamma(\varphi)$. Предел последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ в топологии $\Gamma(\varphi)$ обозначают $\Gamma(\varphi) \lim_n E_n$.

Пример 1.3. Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность непрерывных, строго возрастающих функций $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, таких что $f(0) = 0$, $f(x) \geq x$, $x \in [0; +\infty)$. Пусть $f, g \in \mathcal{F}$, причем $g(x) > x$ и $g(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$, $x, x_1, x_2 \in [0; +\infty)$

Зафиксируем некоторое число $a > 0$ и число $b \in (a; g(a))$. Положим

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < a; \\ b, & x = a; \\ g(x), & a < x < +\infty. \end{cases}$$

Пусть λ — мера Лебега на прямой, Σ — кольцо измеримых по Лебегу множеств. Для каждого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = f_0(\lambda(E)).$$

Тогда для любых $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$, имеем

$$\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$$

Отсюда следует, что функция множества φ — квазитреугольная субмера на Σ .

Пусть $E = [0; a]$; $E_n = [0; a - \frac{a}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$. Так как $\lim_n \varphi(E \Delta E_n) = 0$, то $\Gamma(\varphi) \lim_n E_n = E$. В то же время $\lim_n \varphi(E_n) = a$, а $\varphi(E) = b$.

Таким образом, квазитреугольная субмера φ не является непрерывной в топологии $\Gamma(\varphi)$.

Определение 1.2. Пусть X — частично упорядоченная полугруппа с базисом. Будем говорить, что частично упорядоченная полугруппа X и функция множества $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ согласованы, если для любого множества $E \in \Sigma_\sigma$ существует $\sup\{\varphi(F), F \subset E, F \in \Sigma\}$ (обозначим его $\varphi'(E)$) и для любого множества $G \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ существует предел

$$H - \lim\{\varphi'(E), E \supset G, E \in \Sigma_\sigma\}.$$

Пример 1.4. Частично упорядоченная полугруппа $[0; +\infty]$ и квазитреугольная субмера $\varphi : \Sigma \rightarrow [0; +\infty]$ согласованы.

Примеру 1.5 предположим следующее

Определение 1.3. Пусть X — частично упорядоченная полугруппа с базисом H . Следуя [10], монотонную, непрерывную сверху в нуле функцию множества $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ будем называть векторной субмерой Добракова, если $\varphi(\emptyset) = 0$ и для любого $h \in H$ и для любого множества $A \in \Sigma$ существует такой элемент $f \in H$, что для любого $B \in \Sigma$ для которого $\varphi(B) \leq f$, $A \cup B \in \Sigma$, $A \setminus B \in \Sigma$ справедливо:

$$\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + h; \quad \varphi(A) \leq \varphi(A \setminus B) + h.$$

Важным примером векторной субмеры Добракова является непрерывная сверху в нуле многозначная мера.

Пример 1.5 [11]. Пусть Σ — кольцо множеств, X — частично упорядоченная полугруппа с C — σ -базисом H , полная в топологии $\Gamma(H)$. Пусть $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ — исчерпывающая векторная субмера Добракова, удовлетворяющая условиям:

(i) если $\Sigma \ni A_n \uparrow$, то для любого элемента $h \in H$ существует элемент $f \in H$ такой что, если $B \in \Sigma$, $\varphi(B) \leq f$, то $\varphi(A_n \cup B) \leq \varphi(A_n) + h$ для любого $n \in N$.

(ii) если $\Sigma_\sigma \ni A_n \downarrow$, то для любого элемента $h \in H$ существует элемент $f \in H$, такой, что если $B \in \Sigma$, $\varphi(B) \leq f$, то $\varphi'(A_n) \leq \varphi(A_n \setminus B) + h$ для любого $n \in N$.

Тогда частично упорядоченная полугруппа X и векторная субмера Добракова $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ — согласованы.

2. Продолжение квазитреугольной субмеры в частично упорядоченной полугруппе с базисом

Непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности, называют мультипликативным классом множеств, или кратко, m -классом.

В леммах 2.1–2.3 будем предполагать, что функция множества φ задана на m -классе Σ , принимает значения в частично упорядоченной полугруппе X с базисом и для любого $E \in \Sigma_\sigma$ существует $\sup\{\varphi(F), F \subset E, F \in \Sigma\}$ (обозначим его через $\varphi'(E)$).

Лемма 2.1. Если φ — квазитреугольная субмера на Σ , то φ' — квазитреугольная субмера на $R(\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Найдем элемент $f \in H$ по условию квазитреугольности субмеры φ на Σ . Пусть A, B — такие непересекающиеся множества из $R(\Sigma)$, что

$$\varphi'(A) < f, \quad \varphi'(B) < f. \quad (2.1)$$

Так как любой m -класс множеств является полукольцом, то в силу теоремы о строении кольца множеств, порожденного полукольцом (см., например [12], теорема 1.4.2) имеем

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{p=1}^m B_p,$$

где $\{A_k\}_{k=1}^n$ и $\{B_p\}_{p=1}^m$ — конечные семейства попарно непересекающихся множеств из Σ .

Пусть $C \subset A \cup B$, $C \in \Sigma$. Тогда

$$C = \left(\bigcup_{k=1}^n A_k C\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^m B_p C\right), \quad (2.2)$$

причем

$$\bigcup_{k=1}^n A_k C \in \Sigma \text{ и } \bigcup_{p=1}^m B_p C \in \Sigma.$$

Отсюда, в силу (2.1) и (2.2), получим

$$\varphi(C) < h.$$

Следовательно,

$$\varphi'(A \cup B) \leq h.$$

Лемма 2.2. Если φ — квазитреугольная субмера, непрерывная сверху в нуле на Σ , то функция множества φ' является σ -квазитреугольной субмерой на Σ_σ , то есть для любого элемента $h \in H$ существует такая последовательность элементов $\{f_n\} \subset H$, что для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma_\delta$, для которой $\varphi'(E_n) < f_n$, $n \in N$, справедливо

$$\varphi'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < h.$$

Доказательство. Для произвольного элемента $h \in H$, в силу квазитреугольности функции множества φ , найдем элемент $f_0 \in H$.

Для элемента $f_0 \in H$ в силу квазитреугольности функции множества φ^+ на $R(\Sigma)$, найдем элемент $g(f_0) \in H$. Построим последовательность элементов $\{f_n\} \subset H$

$$f_n < f_{n-1}, \quad f_n < g(f_{n-1}), \quad n \in N. \quad (2.3)$$

Пусть $\{E_n\}$ — некоторая последовательность множеств из Σ_σ , для которой

$$\varphi'(E_n) < f_n, \quad n \in N. \quad (2.4)$$

Для любого множества E_n , $n \in N$, возьмем возрастающую последовательность множеств $\{A_k^n\}_{k=1}^\infty$ из $R(\Sigma)$, для которой

$$E_n = \bigcup_{k=1}^\infty A_k^n, \quad n \in N.$$

Положим

$$\mathcal{D}_1 = A_1^1, \dots, \mathcal{D}_k = \bigcup_{n=1}^k A_k^n, \dots; \quad E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n.$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\varphi'(\mathcal{D}_k) < f_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Пусть множество $F \subset E$, $F \in \Sigma$. По построению

$$\mathcal{D}_k \nearrow E.$$

Следовательно,

$$F\mathcal{D}_k \nearrow E.$$

Так как Σ — m -класс, то $F\mathcal{D}_k \in \Sigma$, $k \in N$. Из (2.5) следует, что

$$\varphi(F\mathcal{D}_k) < f_0, \quad k \in N.$$

Отсюда, в силу выбора элемента $f_0 \in H$, получим

$$\varphi(F) < h$$

и, следовательно,

$$\varphi'(E) \leq h.$$

Лемма 2.3. Если φ — квазитреугольная субмера, непрерывная сверху в нуле и исчерпывающая на Σ , то функция множества φ непрерывная в нуле на Σ_σ .

Доказательство. Если выполнены условия леммы, то функция множества φ является непрерывной в нуле на Σ .

Предположим, что лемма не верна. Тогда существуют элемент $h \in H$ и последовательность $\{E_n\} \subset \Sigma_\sigma$, для которых

$$E_n \rightarrow \emptyset, \quad \varphi'(E_n) \not\leq h, \quad n \in N,$$

и, следовательно, существует последовательность множеств $\{A_n\} \subset \Sigma$:

$$A_n \subset E_n, \quad A_n \rightarrow \emptyset, \quad \varphi(A_n) \not\leq h, \quad n \in N,$$

что противоречит непрерывности в нуле функции φ на Σ .

Теорема 2.1. Пусть Σ — m -класс подмножеств множества T , X — частично упорядоченная полугруппа с C -базисом, пусть $\varphi: \Sigma \rightarrow X$ — непрерывная сверху в нуле, исчерпывающая квазитреугольная субмера. Если частично упорядоченная полугруппа X и функция множества φ согласованы, то существуют σ -кольцо $\bar{\Sigma}$ и квазитреугольная субмера $\bar{\varphi}$ на $\bar{\Sigma}$ такие, что

- 1) $\bar{\Sigma} \supset S(\Sigma)$;
- 2) $\bar{\varphi}|_\Sigma = \varphi$;
- 3) $\bar{\Sigma}$ нуль полно относительно $\bar{\varphi}^3$
- 4) $\bar{\varphi}$ — σ -квазитреугольная субмера на $\bar{\Sigma}$, сконденсированная⁴ на кольце $R(\Sigma)$ и непрерывная в нуле на $\bar{\Sigma}$;

³Если $E \subset F$, $F \in \bar{\Sigma}$, $\bar{\varphi}(F) = 0$ то $E \in \bar{\Sigma}$.

⁴Для любого $h \in H$ и для любого $E \in \bar{\Sigma}$ существует такое $l \in R(\Sigma)$, что $\bar{\varphi}(E\Delta l) < h$.

5) Если $H - C$ — σ -базис, то множество $E \in \bar{\Sigma}$, тогда и только тогда, когда $E = A\Delta B$, где

$$A \in \Sigma_{\text{од}}^5, \quad B \subset A' \in \Sigma_{\text{од}}, \quad \bar{\varphi}(A') = 0.$$

Доказательство. Для любого множества $E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ положим

$$\bar{\varphi}_0(E) = H - \lim\{\varphi'(F), F \in \Sigma_\sigma, E \subset F\}. \quad (2.6)$$

Справедливы следующие свойства:

1. $\bar{\varphi}_0|_{\Sigma_\sigma} = \varphi'$.
2. $\bar{\varphi}_0$ — монотонная функция множества.
3. $\bar{\varphi}_0$ — σ -квазитреугольная субмера на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$.

Пусть $h \in H$. В силу леммы 2.2 φ' — σ -квазитреугольная субмера на Σ_σ . Возьмем соответствующую последовательность $\{h_n\} \subset H$. Пусть последовательность $\{f_n\} \subset H$ такая, что $f_n + f_n < h_n$, $n \in N$. Рассмотрим некоторую последовательность множеств $\{E_n\}$ из $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, для которой

$$\bar{\varphi}_0(E_n) < f_n, \quad n \in N.$$

В силу 2.6 существуют такие множества $F_n \in \Sigma_\sigma$, что

$$E_n \subset F_n, \quad \varphi'(F_n) \leq \bar{\varphi}_0(E_n) + f_n \leq f_n + f_n < h_n, \quad n \in N.$$

В силу выбора последовательности $\{h_n\} \subset H$, имеем

$$\bar{\varphi}_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) < \varphi'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) < h.$$

Таким образом $\bar{\varphi}_0$ — σ -квазитреугольная и, следовательно, квазитреугольная субмера на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$.

4. Обозначим через $\bar{\Sigma}$ — класс тех и только тех подмножеств σ -кольца $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, на которых функция $\bar{\varphi}_0$ сконденсирована на кольце $R(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} = \{E : E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma) \mid \forall (h \in H) \\ \exists (e \in R(\Sigma)) \quad (\bar{\varphi}_0(E\Delta e) < h)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0|_{\bar{\Sigma}}.$$

Очевидно, что для $\bar{\varphi}$ на $\bar{\Sigma}$ справедливы пункты 2, 3 и $\bar{\varphi}_0|_{\Sigma} = \bar{\varphi}|_{\Sigma} = \varphi$.

5. Для любого множества $E \in \bar{\Sigma}$ и для любого элемента $h \in H$ существует такое множество $M \in \Sigma_\sigma$, что $E \subset M$, $\bar{\varphi}_0(M \setminus E) < h$.

Пусть $h \in H$, $E \in \bar{\Sigma}$. Найдем элемент $h_1 \in H$ такой, что $h_1 + h_1 < h$.

В силу (2.7), существует такое множество $e \in R(\Sigma)$, что

$$\bar{\varphi}_0(E\Delta e) < h_1.$$

В силу (2.6), существует такое множество $F \in \Sigma_\sigma$, для которого

$$E\Delta e \subset F, \quad \varphi'(F) \leq \bar{\varphi}_0(E\Delta e) + h_1 < h.$$

Множество $M = e \cup F$ — искомое, так как $M \setminus E \subset F$.

6. Класс $\bar{\Sigma}$ является кольцом.

Пусть $E_1, E_2 \in \bar{\Sigma}$, $h \in H$. Для элемента $h \in H$ найдем элемент $f \in H$ из условия квазитреугольности $\bar{\varphi}_0$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$.

⁵Счетные пересечения элементов класса Σ_σ

В силу (2.7) существуют такие множества $e_1, e_2 \in R(\Sigma)$, что

$$\overline{\varphi}_0(E_n \Delta e_n) < f, \quad n = 1, 2.$$

Отсюда и из соотношения

$$(E_1 \cup E_2) \Delta (e_1 \cup e_2) \subset \bigcup_{n=1}^2 (E_n \Delta e_n)$$

следует

$$\overline{\varphi}_0((E_1 \cup E_2) \Delta (e_1 \cup e_2)) < h,$$

то есть

$$E_1 \cup E_2 \in \overline{\Sigma}.$$

Аналогично показывается, что $E_1 \setminus E_2 \in \overline{\Sigma}$.

7. Покажем теперь, что класс $\overline{\Sigma}$ — σ -кольцо.

Пусть $\{E_n\} \subset \overline{\Sigma}$, $h \in H$. Для элемента $h \in H$ найдем элемент $f \in H$, в силу квазитреугольности $\overline{\varphi}_0$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$. Для $f \in H$, в силу σ — квазитреугольности $\overline{\varphi}_0$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, построим последовательность элементов $\{f_n\} \subset H$. В силу пункта 5 построим последовательность множеств $F_n \in \Sigma_\sigma$, для которых

$$E_n \subset F_n, \quad \overline{\varphi}_0(F_n \setminus E_n) < f_n, \quad n \in N. \quad (2.8)$$

Пусть

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Тогда

$$E \Delta F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \Delta F_n).$$

Отсюда и из (2.8) следует, что

$$\overline{\varphi}_0(E \Delta F) < f. \quad (2.9)$$

Пусть $\{e_n\}$ — такая возрастающая последовательность множеств из $R(\Sigma)$, что

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n. \quad (2.10)$$

По лемме 2.2 функция φ' непрерывна в нуле на Σ_σ , следовательно, существует номер n_0 такой, что

$$\varphi'(F \setminus e_{n_0}) < f.$$

Из (2.6) и (2.10) и соотношения

$$(E \Delta e_{n_0}) \subset (E \Delta F) \cup (F \Delta e_{n_0})$$

следует

$$\overline{\varphi}_0(E \Delta e_{n_0}) < h,$$

то есть $E \in \overline{\Sigma}$.

8. Покажем, что $\overline{\varphi}_0$ — непрерывна в нуле на σ — кольце $\overline{\Sigma}$.

Пусть $\{E_n\}$ — некоторый локализатор из $\overline{\Sigma}$, $h \in H$. В силу квазитреугольности субмеры $\overline{\varphi}_0$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, найдем элементы

$$h_1 = f(h), \quad f_2 = f(f_1), \quad f_3 = f(f_2), \quad f_i \in H, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для элемента $f_3 \in H$ в силу σ -квазитреугольности субмеры $\overline{\varphi}$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ найдем последовательность $\{\eta_n\} \subset H$.

Используя пункт 5, построим убывающую последовательность множеств $\{M_n\} \subset \Sigma_\sigma$ такую, что

$$E_n \subset M_n, \quad \overline{\varphi}_0(M_n \setminus E_n) < \eta_n, \quad n \in N. \quad (3.11)$$

Возьмем множества $A_k^n \in R(\Sigma)$, $n, k \in N$, такие что

$$A_k^n \nearrow M_n, \quad k \rightarrow \infty, \quad n \in N.$$

В силу σ -квазитреугольности субмеры φ' на Σ_σ , для элемента $f_1 \in H$ найдем последовательность $\{q_n\} \subset H$.

По лемме 2.3 функция множества φ' непрерывна в нуле на Σ_σ , следовательно, существуют такие номера k_n , что

$$\varphi'(M_n \setminus A_{k_n}^n) < q_n, \quad n \in N.$$

Положим

$$\mathcal{D}_n = \bigcap_{i=1}^n A_{k_i}^i, \quad n \in N.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{D}_n \subset M_n, \quad \mathcal{D}_n \in R(\Sigma), \quad \mathcal{D}_n \searrow.$$

В силу выбора последовательности $\{q_n\} \subset H$, из соотношений

$$M_n \setminus \mathcal{D}_n \subset \bigcup_{i=1}^n (M_i \setminus A_{k_i}^i), \quad n \in N,$$

получаем

$$\varphi'(M_n \setminus \mathcal{D}_n) < f_1, \quad n \in N. \quad (2.12)$$

Положим

$$M_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Из соотношения

$$M_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n \setminus E_n)$$

в силу (2.11) получим

$$\overline{\varphi}_0(M_0) < f_3. \quad (2.13)$$

Так как класс $\overline{\Sigma}$ — σ -кольцо, то $M_0 \in \overline{\Sigma}$. В силу пункта 5, существует множество $F \in \Sigma_\sigma$ такое, что

$$M_0 \subset F, \quad \overline{\varphi}_0(F \setminus M_0) < f_3. \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.17) следует, что

$$\overline{\varphi}_0(F) < f_2. \quad (2.15)$$

Так как $F \in \Sigma_\sigma$, то существует последовательность $\{F_n\} \subset R(\Sigma)$ такая, что

$$F_n \nearrow F.$$

Положим

$$G_n = \mathcal{D}_n \setminus F_n, \quad n \in N.$$

Так как $\{G_n\}$ — локализатор из $R(\Sigma)$, то в силу леммы 2.3, существует такой номер n_0 , что

$$\varphi'(G_{n_0}) < f_2. \quad (2.16)$$

Очевидно, что

$$E_{n_0} \subset M_{n_0} \subset (M \setminus \mathcal{D}_{n_0}) \cup \mathcal{D}_{n_0}$$

и

$$\mathcal{D}_{n_0} \subset G_{n_0} \cup F_{n_0}.$$

Отсюда, в силу (2.12), (3.15) и (2.16), получим $\overline{\varphi}_0(E_{n_0}) < h$. Следовательно, для $n > n_0$

$$\overline{\varphi}_0(E_n) < h.$$

9. Покажем, что σ -кольцо $\overline{\Sigma}$ нуль полно относительно $\overline{\varphi}$.

Пусть $F \subset E$, $E \in \Sigma$, и $\overline{\varphi}(E) = 0$. Пусть $h \in H$. Для элемента $h \in H$, в силу квазитреугольности $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, найдем $f \in H$. Возьмем множество $e \in R(\Sigma)$, для которого

$$\overline{\varphi}_0(E \triangle e) < f.$$

Так как

$$(F \triangle e) \subset (E \triangle e) \cup (E \triangle F),$$

то

$$\overline{\varphi}_0(F \triangle e) < f.$$

Таким образом, множество $F \in \overline{\Sigma}$.

10. Если $H - C$ — σ -базис, то для любого множества $E \in \overline{\Sigma}$ существует такая убывающая последовательность множества $\{\mathcal{D}\} \subset \Sigma_\sigma$, что

$$E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n, \quad H - \lim_n \overline{\varphi}_0(\mathcal{D} \setminus E) = 0.$$

Пусть $E \in \overline{\Sigma}$ и $\{h_n\} \subset H$, $H - \lim_n h_n = 0$. Построим последовательность $\{f_n\} \subset H$, такую, что $f_n + f_n < h_n$, $n \in N$. В силу (2.7) существует последовательность множеств $\{e_n\} \subset R(\Sigma)$ такая, что

$$\overline{\varphi}_0(E \triangle e_n) < f_n, \quad n \in N. \quad (2.17)$$

В силу (2.6) существуют множества $F_n \in \Sigma_\sigma$, для которых $E \triangle e_n \subset F_n$ и

$$\varphi'(F_n) \leq \overline{\varphi}_0(E \triangle e_n) + f_n < h_n, \quad n \in N. \quad (2.18)$$

Положим

$$\mathcal{D}_n = \bigcap_{k=1}^n (F_k \cup e_k), \quad n \in N.$$

Из соотношений (2.17) и (2.18) следует, что множества $\mathcal{D}_n$, $n \in N$, — искомые.

11. Пусть $H - C$ — σ -базис. Выясним структуру σ -кольца $\overline{\Sigma}$. Пусть $E \in \overline{\Sigma}$. В силу пункта 10 существует убывающая последовательность множеств $\{\mathcal{D}_n\} \subset \Sigma_\sigma$, для которой

$$E \subset A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n, \quad H - \lim_n \overline{\varphi}_0(\mathcal{D}_n \setminus E) = 0.$$

Аналогично построим убывающую последовательность множеств $\{K_n\} \subset \Sigma_\sigma$, для которой

$$A \setminus E \subset A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad H - \lim_n \overline{\varphi}_0(K_n \setminus (A \setminus E)) = 0. \quad (2.20)$$

Пусть $h \in H$. Для элемента $h \in H$ найдем $f \in H$, в силу квазитреугольности $\overline{\varphi}_0$ на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$. В силу (2.19) и (2.20) существует такой номер n_0 , что

$$\overline{\varphi}_0(\mathcal{D}_{n_0} \setminus E) < f, \quad \overline{\varphi}_0(K_{n_0} \setminus (A \setminus E)) < f.$$

Отсюда и из соотношения

$$K_{n_0} \subset (\mathcal{D}_{n_0} \setminus E) \cup (K_{n_0} \setminus (A \setminus E))$$

следует, что

$$\overline{\varphi}_0(K_{n_0}) < h$$

и

$$\overline{\varphi}_0(K_n) < h, \quad n > n_0.$$

Следовательно,

$$\overline{\varphi}_0(A') = 0.$$

Осталось отметить, что

$$E = A \triangle (A \setminus E), \quad A \setminus E \subset A',$$

Теорема доказана.

3. Некоторые следствия из теоремы о продолжении квазитреугольной субмеры в частично упорядоченной полугруппе

Из примера 1.4 и теоремы 2.1 вытекает справедливость следствия 3.1.

Следствие 3.1. Пусть Σ — m -класс подмножеств множества T , $\varphi : \Sigma \rightarrow [0; +\infty]$ — непрерывная сверху в нуле, исчерпывающая, квазитреугольная субмера. Тогда существуют σ -кольцо $\overline{\Sigma}$ и квазитреугольная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, для которых выполнены условия 1)–5) теоремы 2.1.

Из примера 1.5 и теоремы 2.1 вытекает справедливость следствия 3.2.

Следствие 3.2. Пусть Σ — кольцо подмножеств множества T ; X — частично упорядоченная полугруппа с C — σ -базисом H , полная в топологии $\Gamma(H)$; пусть $\varphi : \Sigma \rightarrow X$ исчерпывающая субмера Добракова, удовлетворяющая условиям (i), (ii) (см. пример 1.5). Тогда существуют σ -кольцо $\overline{\Sigma}$ и векторная субмера Добракова $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, для которых выполнены условия 1)–5) теоремы 2.1.

Доказательство. Заметим, что векторная субмера Добракова, удовлетворяющая условию (i), является квазитреугольной субмерой. Следовательно, она может быть продолжена до квазитреугольной субмеры $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, для которой выполнены условия 1)–5) теоремы 2.1. Полученное таким образом продолжение вновь является субмерой Добракова.

Заметим, что непосредственно следствие 3.2 доказано в работе [11].

Заключение

Рассмотрение функций множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе с базисом позволило с одной стороны получить новые результаты о продолжении неаддитивной функции множества с m -класса Σ на σ -кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$ с сохранением основных свойств этой функции, а с другой стороны, в качестве следствий, теоремы о продолжении квазитреугольной субмеры со значениями во множестве $[0; +\infty]$ и о продолжении векторной субмеры Добракова.

Литература

- [1] Ricanova, Z. On the extension of measures with values in partially ordered semi-groups / Z. Ricanova, I. Rosova // *Math. Nachr.* – 1982. – V. 106. – P. 201–209.
- [2] Boccuto, A. On Stone-type extensions for group-valued measures / A. Boccuto // *Math. slov.* – 1995. – V. 45. – No. 3. – P. 309–315.
- [3] Dobrakov, I. On extension of vector polymeasures, II / I. Dobrakov // *Math. slov.* – 1995. – V. 45. – No. 4. – P. 377–380.
- [4] Алексюк, В.Н. Продолжение непрерывной внешней меры на булевой алгебре / В.Н. Алексюк, Ф.Д. Безносиков // *Изв. вузов. Матем.* – 1972. – №4. – С. 3–9.
- [5] Drewnowski, L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I, II / L. Drewnowski // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci Math. Astr. Phys.* – 1972. – V. 20. – No. 4. – P. 269–276, 277–286.
- [6] Гусельников, Н.С. О продолжении квазилиппшицевых функций множества / Н.С. Гусельников // *Матем. заметки.* – 1975. – Т. 17. – №1. – С. 21–31.
- [7] Савельев, Л.Я. Внешние меры и внешние топологии / Л.Я. Савельев // *Сиб. матем. журн.* – 1983. – №2. – С. 133–149.
- [8] Малюгин, С.А. Топология покрывающих множеств и непрерывное продолжение внешних мер / С.А. Малюгин // *Матем. заметки.* – 1979. – Т. 26. – №2. – С. 285–292.
- [9] Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М.: МИР, 1965. – 342 с.
- [10] Dobrakov I. On submeasures, I / I. Dobrakov // *Rozpr. Mat.* – 1974. – V. 112. – 39 p.
- [11] Алякин, В.А. О продолжении векторной субмеры Добракова / В.А. Алякин, В.А. Адольф // *Изв. вузов. Матем.* – 1988. – №12. – С. 54–56.
- [12] Клишкин В.М. Введение в теорию функции множества / В.М. Клишкин. – Саратов.: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 1989. – 209 с.

Поступила в редакцию 9/VII/2007;
в окончательном варианте — 9/VII/2007.

ON THE EXTENSION OF SET FUNCTIONS WITH VALUES IN PARTIALLY ORDERED SEMIGROUPS⁶

© 2007 Т.А. Sribnaya⁷

In the paper the theorem on the extension of continuous on the right at the origin, exhaustive quasitriangular submeasures with values in partially ordered semigroups from m -class Σ to σ -ring $\bar{\Sigma} \supset \Sigma$ is proved.

Theorem on the extension of the vector Dobrakov submeasures and theorem on the extension quasitriangular submeasures with values in $\bar{R}^+$ are obtained.

Paper received 9/VII/2007.

Paper accepted 9/VII/2007.

⁶Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁷Sribnaya Tatyana Arkadjevna (sribnaya@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.