

СИСТЕМА ЛАМЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЛОСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ¹

© 2007 Е.А. Абаполова², А.П. Солдатов³

Дано представление общего решения системы Ламе в ортотропном случае через вектор-функции, аналитические по Дуглису. Оно описано явно в терминах корней характеристического уравнения системы Ламе. Пользуясь этим представлением, указана эквивалентная редукция первой и второй краевых задач к системе сингулярных интегральных уравнений на границе области.

Состояние среды плоской анизотропной теории упругости [1] характеризуются тензорами напряжения σ и деформации ε — симметричными 2×2 -матрицами-функциями, которые можно записать в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

где ε_j выражаются через вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_3 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0,$$

где $\sigma_{(j)}$ означает j -ый столбец матрицы σ , которая связана с тензором деформации ε законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_4 \varepsilon_2 + 2\alpha_6 \varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= \alpha_4 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + 2\alpha_5 \varepsilon_3, \\ \sigma_3 &= \alpha_6 \varepsilon_1 + \alpha_5 \varepsilon_2 + 2\alpha_3 \varepsilon_3, \end{aligned} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

где матрица α положительно определена. Элементы α_j этой матрицы называют модулями упругости, на основании критерия Сильвестра они должны подчиняться неравенствам $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, 3$ и $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_4^2$, $\alpha_1 \alpha_3 > \alpha_6^2$, $\alpha_2 \alpha_3 > \alpha_5^2$.

Подставляя вместо ε_j их выражения через вектор смещения, соотношениям закона Гука можем придать форму

$$\sigma_{(i)} = a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №070100299)

²Абаполова Елена Александровна (abapolova@bsu.edu.ru), кафедра математического анализа Белгородского государственного университета, 308015, Россия, г. Белгород, ул. Победы, 85.

³Солдатов Александр Павлович (soldatov48@mail.ru), НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

с матричными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, & a_{12} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, & a_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1) в уравнения равновесия, получим для вектора смещения $u = (u_1, u_2)$, эллиптическую систему уравнений второго порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

которую называют системой Ламе.

Как известно [2], основные краевые условия для системы Ламе, рассматриваемой в области D на плоскости, состоят в задании либо вектора смещений

$$u|_{\Gamma} = f, \quad (3)$$

на границе $\Gamma = \partial D$, либо нормальной компоненты $\sigma n = \sigma_{(1)} n_1 + \sigma_{(2)} n_2$ тензора напряжения σ , т.е.

$$(\sigma n)|_{\Gamma} = g, \quad (4)$$

где $n = (n_1, n_2)$ — единичная внешняя нормаль на Γ . Очевидно, (3) соответствует задаче Дирихле. Согласно (1) можем записать

$$\sigma n = \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j,$$

где положено $x_1 = x$, $x_2 = y$. Поэтому (4) отвечает задаче Неймана для системы Ламе. Эти задачи носят также название первой и второй краевых задач.

Вторая краевая задача (4) может записываться в форме первой по отношению к так называемой сопряженной функции v . Последняя определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5)$$

Тогда из сравнения (1) и (5) видно, что $\sigma n = [v[x(s), y(s)]]'$, где $x(s) + iy(s)$ есть естественная параметризация Γ параметром длины дуги s . Следовательно, после интегрирования краевое условие (4) принимает вид:

$$v|_{\Gamma} = f, \quad (6)$$

где f — первообразная функции g , рассматриваемой как функция длины дуги s на v .

Рассмотрим характеристическое многочлен эллиптической системы (1):

$$\chi(z) = \det P(z), \quad P(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2.$$

Возможны два случая, когда в верхней полуплоскости уравнение $\chi(z) = 0$ имеет (i) два различных корня $v_1 \neq v_2$ и (ii) один кратный корень v . Соответственно этим случаям положим

$$(i) J = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}, \quad v_1 \neq v_2; \quad (ii) J = \begin{pmatrix} v & i \\ 0 & v \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В каждом из этих случаев найдутся такие линейно независимые векторы $x, y \in \mathbb{C}^2$, что (i) $P(v_1)x = P(v_2)y = 0$ и, соответственно, (ii) $P(v)x = P(v)y + P'(v)x = 0$. Составим

из этих векторов как из столбцов матрицу $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ и в обозначениях (1), (7) положим $C = (a_{21}B + a_{22}BJ)$. Согласно [3, 4] общее решение u системы Ламе и сопряженная к ней функция v в терминах этих матриц описывается равенствами

$$u = \operatorname{Re} B\phi, \quad v = \operatorname{Re} C\phi, \quad (8)$$

где 2-вектор-функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ является решением системы Дуглиса

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что область D односвязна, а функции u, v и ϕ обращаются в нуль в фиксированной точке $z_0 \in D$, в этом предположении ϕ определяется по u однозначно.

В явном виде матрицы B и C могут быть описаны [3] через корни характеристического многочлена χ . С этой целью представим χ в форме

$$\chi(z) = g(z)g_2(z) - g_3^2(z) = h_1(z) - zh_2(z) + z^2h_3(z)$$

с квадратными трехчленами

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + 2\alpha_6z + \alpha_3z^2, & h_1(z) &= \beta_2 - \beta_5z + \beta_4z^2, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + 2\alpha_5z + \alpha_2z^2, & h_2(z) &= \beta_5 - \beta_3z + \beta_6z^2, \\ g_3(z) &= \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5z^2, & h_3(z) &= \beta_4 - \beta_6z + \beta_1z^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix} = (\det \alpha) \alpha^{-1}$$

означает присоединенную матрицу к матрице α , фигурирующей в законе Гука, которая также положительно определена. В явном виде

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2, & \beta_2 &= \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, & \beta_3 &= \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2, \\ \beta_4 &= \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, & \beta_5 &= \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, & \beta_6 &= \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{aligned} \quad (11)$$

В этих обозначениях соответственно двум случаям в (7) имеем равенства

$$B = \begin{pmatrix} g_2(v_1) & g_2(v_2) \\ -g_3(v_1) & -g_3(v_2) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -v_1h_3(v_1) & -v_2h_3(v_2) \\ h_3(v_1) & h_3(v_2) \end{pmatrix}, \quad h_3(v_1) \neq 0, \quad (12i_1)$$

$$B = \begin{pmatrix} -g_3(v_1) & g_2(v_2) \\ g_1(v_1) & -g_3(v_2) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -v_1h_2(v_1) & -v_2h_3(v_2) \\ h_2(v_1) & h_3(v_2) \end{pmatrix}, \quad h_3(v_1) = 0, \quad (12i_2)$$

$$B = \begin{pmatrix} g_2(v) & g_2'(v) \\ -g_3(v) & -g_3'(v) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -vh_3(v) & -h_3(v) - vh_3'(v) \\ h_3(v) & h_3'(v) \end{pmatrix}, \quad (12ii)$$

где в случае (i) для определенности предполагается, что $h_3(v_2) \neq 0$. Поскольку h_3 является квадратным трехчленом с вещественными коэффициентами, по крайней мере одно из чисел v_1, v_2 не является его корнем и указанное предположение не снижает общности. Во всех случаях, как показано в [3], матрицы B и C обратимы.

Отметим, что близкий подход к представлению решений анизотропной плоской теории упругости рассматривался в [5].

Общее решение ϕ системы (9) соответственно двум случаям (7) матрицы J выражается по формулам

$$\begin{aligned} (i) \quad & \phi_k(x, y) = \psi_k(x + v_k y), \quad k = 1, 2, \\ (ii) \quad & \phi_1(x, y) = \psi_1(x + v y) + y\psi_2'(x + v y), \quad \phi_2(x, y) = \psi_2(x + v y), \end{aligned} \quad (13)$$

где функции ψ_k аналитичны в области $D(\mathbf{v}_k) = \{x + \mathbf{v}_k y, (x, y) \in D\}$ в случае (i) и в области $D(\mathbf{v})$ в случае (ii). В частности, в изотропном случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda + 2\mu, \quad \alpha_3 = \mu, \quad \alpha_4 = \lambda \quad (14)$$

с некоторыми положительными λ и μ имеем случай (ii) с $\mathbf{v} = i$ и подстановка (10)–(13) в (8) приводит к известным формулам Колосова–Мусхелишвили [2].

Упругая среда называется ортотропной, если координатные прямые служат осями симметрии. Этот случай соответствует обращению в нуль модулей упругости α_5 и α_6 матрицы α . В частности, матрица α блочно-диагональна и аналогичным свойством обладает присоединенная к ней матрица β . Поэтому с учетом (11) выражения (10) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + \alpha_3 z^2, & h_1(z) &= \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_4 z^2), \\ g_2(z) &= \alpha_3 + \alpha_2 z^2, & h_2(z) &= (\alpha_4^2 - \alpha_1 \alpha_2)z, \\ g_3(z) &= (\alpha_3 + \alpha_4)z, & h_3(z) &= \alpha_3(-\alpha_4 + \alpha_2 z^2) \end{aligned} \quad (15)$$

и, соответственно, характеристический многочлен дается равенством

$$\chi(z) = \alpha_3(\alpha_1 + 2az^2 + \alpha_2 z^4), \quad a = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4^2 - 2\alpha_3 \alpha_4}{2\alpha_3}. \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что $a + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > 0$. В самом деле, это неравенство равносильно $(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_3)^2 > (\alpha_3 + \alpha_4)^2$, которое в силу условия $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > |\alpha_4|$ очевидно. Таким образом, для корней биквадратного многочлена (16) в верхней полуплоскости получаем следующие выражения:

$$\mathbf{v}_{\pm} = \begin{cases} \rho e^{i\theta_{\pm}}, & |a| < \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \\ i\rho_{\pm}, & a > \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \\ i\rho, & a = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \end{cases} \quad (17)$$

где положено

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad 2\theta_{\pm} = \pi \pm \operatorname{arccctg} \frac{a}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - a^2}, \quad \rho_{\pm} = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - \alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2}}.$$

Пусть для краткости

$$\Delta = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - 2\alpha_3 - \alpha_4. \quad (18)$$

Тогда

$$a - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \Delta q_-, \quad a + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \Delta q_+,$$

где величины

$$q_- = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_4}{2\alpha_3}, \quad q_+ = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \alpha_4}{2\alpha_3} (\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + 2\alpha_3 + \alpha_4)$$

положительны. Поэтому три случая в (17) равносильны, соответственно, $\Delta < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$.

Подставляя формулы (17) в (12), получим соответствующие выражения для матриц В и С в ортотропном случае. Следует изучить предварительно, при каких условиях многочлен $h_3(\mathbf{v})$ обращается в нуль для одного из корней $\mathbf{v}$ в (17).

Лемма 1. Равенство $h_3(\mathbf{v}) = 0$ для одного из корней в (17) равносильно $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. В этом случае $\Delta > 0$,

$$\mathbf{v}_+ = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \mathbf{v}_- = i\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \quad (19)$$

и $h_3(v_-) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $h_3(v) = 0$, тогда согласно (15) имеем равенство

$$v^2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2}.$$

Поэтому из равенства $\chi(v) = 0$ с многочленом χ в (16) следует, что $\alpha_1 + 2av^2 + \alpha_2v^2 = 0$ или в развернутой форме

$$\alpha_1 + \frac{(\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_4^2)\alpha_4}{\alpha_3\alpha_2} + \frac{\alpha_4^2}{\alpha_2} = 0.$$

Левая часть этого выражения совпадает с

$$\frac{(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2)(\alpha_3 + \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3},$$

так что должно быть $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Обратно, пусть $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Тогда

$$\Delta = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_3 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_4 > 0$$

и, значит, необходимо воспользоваться вторым выражением в (17) для корней. В этом случае

$$a = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2}{2\alpha_3}, \quad a^2 - \alpha_1\alpha_2 = \frac{(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)^2}{4\alpha_3^2}$$

и формула (17) приводит к (19). Соответственно,

$$h_3(v_-) = \alpha_3(-\alpha_4 - \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_2}) = 0.$$

Тем самым лемма установлена.

Из (12), (17) и леммы теперь непосредственно выводим, что

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2v_+^2 & \alpha_3 + \alpha_2v_-^2 \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)v_+ & -(\alpha_3 + \alpha_4)v_- \end{pmatrix}, \quad \Delta(\alpha_3 + \alpha_4) \neq 0, \quad (20)$$

$$C = \alpha_3 \begin{pmatrix} \alpha_4v_+ - \alpha_2v_+^3 & \alpha_4v_- - \alpha_2v_-^3 \\ -\alpha_4 + \alpha_2v_+^2 & -\alpha_4 + \alpha_2v_-^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \quad (21)$$

$$C = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}{\alpha_2} \begin{pmatrix} -\alpha_3 & i\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \\ -i\sqrt{\alpha_2\alpha_3} & -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2v^2 & 2\alpha_2v \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)v & -(\alpha_3 + \alpha_4) \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\alpha_1\alpha_2} = 2\alpha_3 + \alpha_4. \quad (22)$$

$$C = \alpha_3 \begin{pmatrix} \alpha_4v - \alpha_2v^3 & \alpha_4 - 3\alpha_2v^2 \\ -\alpha_4 + \alpha_2v^2 & 2\alpha_2v \end{pmatrix},$$

Отметим, что различные теоретико-функциональные подходы в ортотропной плоской теории упругости развивались многими авторами [6–8].

Остановимся особо на случае изотропной среды. Согласно (14) этот случай соответствует формулам (17ii) и (18ii) с кратным корнем $\nu = i$. В явном виде

$$B = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu) & 2(\lambda + 2\mu)i \\ -(\lambda + \mu)i & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} -1 & (\alpha + 1)i \\ -i & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \mu \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)i & 4\lambda + 6\mu \\ -2(\lambda + \mu) & 2(\lambda + 2\mu)i \end{pmatrix} = \mu(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 2i & \alpha + 3 \\ -2 & (\alpha + 1)i \end{pmatrix},$$

где положено $\alpha = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$.

Очевидно, матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$

коммутируют с клеткой Жордана J в (7), поэтому замена $\phi = M\tilde{\phi}$ не выводит из класса решений системы Дуглиса (9). Следовательно, полагая $\tilde{B} = BM$, $\tilde{C} = CM$, соотношения (8) можем переписать по отношению к $\tilde{\phi}$ и $\tilde{B}$, $\tilde{C}$. Другими словами, матрицы B и C определены с точностью до умножения справа на матрицу M .

Полагая

$$M = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} -1 & -(\alpha + 1)i \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в этом случае предыдущие выражения для B и C можем заменить на

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \mu \begin{pmatrix} -2i & \alpha - 1 \\ 2 & -(\alpha + 1)i \end{pmatrix}.$$

В случае (i) подстановка (13) в (8) дает представление общего решения и системы Ламе через пару аналитических функций ψ_1 и ψ_2 описанное в [1]. Однако эти функции определены в различных областях $D(\nu_k)$, $k = 1, 2$, что осложняет исследование краевых задач (3),(6) с помощью аналитических функций.

В случае (ii) область определения $D(\nu)$ функций ψ_k одна и та же, однако согласно (13) в этом случае u и ν линейно зависят от ψ и производной ψ' , что вносит также дополнительное осложнение. Данное препятствие в изотропном случае преодолевалось путем специальных интегральных представлений аналитических функций, предложенных Д.И. Шерманом, Н.И. Мусхелишвили и др. [2] По этой причине [9] удобнее развивать прямой подход к исследованию задач (3),(6), основанный на применении аппарата аналитических функций непосредственно для решений системы Дуглиса (9).

Пусть область D конечна и ограничена простым ляпуновским контуром Γ . Удобно считать, что точка $z = 0$ принадлежит D .

Очевидно, задачу (3) можно записать в эквивалентной форме

$$u + \xi_1 = f, \quad u(0) = 0,$$

где $\xi_1 \in \mathbb{R}^l$ подлежит определению относительно пары (u, ξ) , $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Аналогичным образом можно поступить и по отношению к задаче (6). В соответствии с (8) эти задачи можем переписать для решений системы (9) в виде

$$\operatorname{Re} G\phi^+ + \xi = f, \quad \phi(0) = 0, \quad (19)$$

относительно пары (ϕ, ξ) , где $G = B$ или $G = C$ в соответствии со второй задачей и ϕ^+ означает граничное значение ϕ .

Задачу (9) будем искать в классе вектор-функций ϕ , непрерывных по Гельдеру в замкнутой области D . Согласно [9] эту функцию можно единственным образом

представить в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t-z)_J^{-1} dt_J \phi(t) + i\tilde{\xi}_0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^2, \quad (20)$$

где вектор-функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ вещественна и непрерывна по Гельдеру на Γ .

Здесь для $x, y \in \mathbb{R}$ принято матричное обозначение $(x + iy)_J = x \cdot 1 + yJ$, где 1 означает единичную 2×2 -матрицу, и аналогичный смысл имеет обозначение $(dx + idy)_J$ для матричного дифференциала. При этом имеет место аналог формулы Сохоцкого–Племеля

$$\phi^+(t_0) = \phi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t-t_0)_J^{-1} dt_J \phi(t) + i\tilde{\xi}_0 \quad (21)$$

Удобно сингулярный интеграл с матричным ядром здесь обозначать $(S_J \phi)(t_0)$. При $J = i$ он переходит в классический интеграл Коши $(S\phi)(t_0)$. Подстановка (21) приводит (19) к эквивалентной системе сингулярных уравнений

$$\operatorname{Re} G(\phi + S_J \phi) - (\operatorname{Im} G)\tilde{\xi}_0 + \xi = f,$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} t_J^{-1} dt_J \phi(t) + i\tilde{\xi}_0 = 0.$$

Запишем

$$\frac{1}{\pi} t_J^{-1} dt_J = b(t) ds_t, \quad (22)$$

с 2×2 -матрицей-функцией $b(t)$, непрерывной по Гельдеру на Γ . Тогда предыдущую систему может переписать по отношению к паре (ϕ, ξ) :

$$\operatorname{Re} G(\phi + S_J \phi) - (\operatorname{Im} G)(\operatorname{Re} b, \phi) + \xi = f, \quad (23)$$

$$(\operatorname{Im} b, \phi) = 0,$$

Здесь (c, ϕ) означает интеграл от $c\phi$ на Γ по длине дуги, в случае вещественной матрицы-функции $c(t)$ этот интеграл принадлежит $\mathbb{R}^2$.

Очевидно,

$$2\operatorname{Re} S_J \phi = S_J \phi - S_{\overline{J}} \phi,$$

где учтено, что вектор-функция ϕ вещественна. Поэтому (23) эквивалентна системе

$$N\phi + \xi = f, \quad (\phi, g_j) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (24)$$

относительно пары (ϕ, ξ) , где g_1 и g_2 представляют собой строки матрицы b , а

$$2N\phi = G(\phi + S_J \phi) + \overline{G}(\phi - S_{\overline{J}} \phi) - 2(\operatorname{Im} G)(\operatorname{Re} b, \phi)$$

Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность представляет собой интегральный оператор вида

$$[(N_1 - N_2)\phi](t_0) = \int_{\Gamma} \frac{k(t_0, t)}{t - t_0} ds_t,$$

где вектор-функция $k(t_0, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\Gamma \times \Gamma$ и обращается в ноль при $t = t_0$. По предположению контур Γ ляпуновский. Поэтому простая проверка показывает, что $S_J \sim S$ и, аналогично, $S_{\overline{J}} \sim S$. Следовательно,

$$N \sim GP_+ + \overline{G}P_-, \quad 2P_{\pm} = 1 \pm S.$$

Поскольку матрица G постоянна и обратима, сингулярный оператор $GP_+ + \overline{G}P_-$ обратим и обратный к нему выписывается по явной формуле [10] с помощью канонической функции. В результате (24) сводится к системе интегральных уравнений

Фредгольма с оператором $M = (GP_+ + \bar{G}P_-)^{-1}N \sim 1$ в главной части, к численному решению которой можно применить известные приближенные методы [11].

Аналогичный подход можно реализовать и в случае областей с кусочно-гладкой границей, как это показано в [12] по отношению к задаче Дирихле для общих слабо связанных эллиптических систем, однако он уже опирается на аппарат неклассических сингулярных уравнений [13]. Этот подход может охватывать и случай многосвязных областей, как конечных, так и бесконечных. В частности, когда область D является верхней полуплоскостью и решение задачи (3), (6) выписывается явно [14].

Именно, пусть функция f удовлетворяет условию Гельдера на расширенной прямой $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$ (т. е. $f(t)$ и $f(1/t)$ обладают этим свойством на любом конечном отрезке прямой) и обращается в нуль на ∞ . Решение u, v задач (3), (6) ищется в аналогичном классе для замкнутой полуплоскости $\bar{D}$. Тогда согласно [14]

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} B(t-z)^{-1}_J B^{-1} f(t) dt,$$

$$v(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} B(t-z)^{-1}_J C^{-1} f(t) dt.$$

В случае ортотропной среды подстановка в это равенство формул (18) позволит получить окончательные решения.

Литература

- [1] Лехницкий, Г.Г. Теория упругости анизотропного тела / Г.Г.Лехницкий. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [2] Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
- [3] Солдатов, А.П., Система Ламе плоской анизотропной теории упругости / А.П.Солдатов // Доклады РАН. – 2002. – Т. 385. – №2. – С. 163–167
- [4] Солдатов, А.П., О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости / А.П.Солдатов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – №5. – С. 674–676.
- [5] Митин, С.П., О представлении решений анизотропной теории упругости / С.П.Митин // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – №1. – С. 94–100
- [6] Begehr, H. A mixed-contact problem in orthotropic elasticity, in Partial differential equations with Real Analysis, (H. Begerhand, A.Jeffrey, eds.) / H.Begehr, Lin Wei. – Longman Scientific & Technical, 1992. – P. 219–239.
- [7] Gilbert, R.P., Plane ellipticity and related problems / R.P.Gilbert. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981.
- [8] Gilbert, R.P., Lin Wei, Function theoretical solutions to problems of orthotropic elasticity / R.P.Gilbert // J. Elasticity. – 1985. – 15. – P. 143–154.
- [9] Солдатов, А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай / А.П.Солдатов // Изв. АН СССР (сер. матем.). – 1991. – Т. 55. – №5. – С. 1070–1100.
- [10] Мусхелишвили, Н.И., Сингулярные интегральные уравнения / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.
- [11] Партон, В.З. Интегральные уравнения теории упругости / В.З.Партон, П.И.Перлин. – М., 1977.

- [12] Солдатов, А.П. Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости / А.П. Солдатов // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – №8. – С. 1092–1105.
- [13] Солдатов, А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А.П. Солдатов // М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.
- [14] Солдатов, А.П. Эллиптические системы второго порядка на полуплоскости / А.П. Солдатов // Известия РАН (сер. матем.). – 2006. – Т. 70. – №6. – С. 161–192

Поступила в редакцию 2/VII/2007;
в окончательном варианте — 2/VII/2007.

LAME SYSTEM OF ORTHOTROPIC PLANE ELASTICITY⁴

© 2007 E.A. Abapolova,⁵ A.P. Soldatov⁶

The representation of general solution of orthotrop Lamé system throw vector-value functions analytic in a Douglas sense is given. It is explicitly described by roots of the characteristic equation of Lamé system. Using this representation the equivalent reduction of based boundary value problems to singular integral equations is shown.

Paper received 2/VII/2007
Paper accepted 2/VII/2007

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

The work was supported by grant RFFI (project No. 070100299)

⁵Abapolova Elena Alexandrovna (abapolova@bsu.edu.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Belgorod State University, Belgorod, 308015, Russia.

⁶Soldatov Alexandre Pavlovich (soldatov48@mail.ru), Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardin-Balkar Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Nalchik, 360000, Russia.