УДК 517.956.4

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2007 Т.А. Сафонова[1]

В работах С.Г. Пяткова, И.Е. Егорова, С.В. Пяткова и других поставлены и исследованы новые задачи для уравнений смешанного типа. В этой статье рассматривается задача Дирихле для уравнения смешанного типа. При этом используется метод Фурье, причем разложение неизвестной функции проводится по собственным функциям одной неклассической спектральной задачи.

1. Постановка задачи Дирихле

Исследуем разрешимость задачи Дирихле для уравнения смешанного типа

$$Lu = sgn\ xu_{tt} - u_{xx} = sgnxf(x,t),\ -1 < x < 1,\ 0 < t < T. \tag{1}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0+,t) = u(0-,t), u_x'(0+,t) = u_x'(0-,t),\ -1 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u(x,T) = 0,\ -1 < x < 1, \tag{4}$$

где $f(x,t) \in L_2((-1,1),H_0)$. $H_0 = L_0(-1,1)$ — пространство с индефинитной метрикой [2]

$$(u,v)_0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{sgn} xuvdx.$$

Пусть однородное уравнение (1) имеет решение вида $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим u в уравнение (1) и поделим обе части на $u = XT$. Получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''(x) + \lambda \mathrm{sgn}\ xX(x) = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \qquad 0 < t < T,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

2. Решение одной спектральной задачи

В дальнейшем будем пользоваться свойствами собственных значений и собственных функций спектральной задачи:

$$X''(x) + \lambda \mathrm{sgn}\ xX(x) = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{5}$$

[1]Сафонова Татьяна Афанасьевна (safonovata@mail.ru), Институт математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова, 677011, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

$$X(-1) = X(1) = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{6}$$

$$X(0+) = X(0-), \qquad X'(0+) = X'(0-), \qquad -1 < x < 1, \tag{7}$$

где (7) — условия склеивания. Решив спектральную задачу, получим собственные функции. Собственные функции, соответствующие $\lambda > 0$, будут иметь вид:

$$\varphi^{+}{}_{k}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}(1-x)}{\cos\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}}, & x > 0, \\ -\dfrac{sh\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}(1+x)}{ch\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}}, & x < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

собственные числа удовлетворяют уравнению $-\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \operatorname{th}\sqrt{\lambda}$. Собственные функции, соответствующие $\lambda < 0$:

$$\varphi^{-}{}_{k}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda^{-}{}_{k}}(1-x)}{ch\sqrt{-\lambda^{-}{}_{k}}}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin\sqrt{-\lambda^{-}{}_{k}}(1+x)}{\cos\sqrt{-\lambda^{-}{}_{k}}}, & x < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

собственные числа удовлетворяют уравнению $-\operatorname{tg}\sqrt{-\lambda} = \operatorname{th}\sqrt{-\lambda}$.

Собственные функции образуют ортогональную систему в пространстве H_0. Спектральные задачи такого рода встречаются в работах [1, 2, 5]. Полнота функций $\varphi^{-}{}_{k}, \varphi^{+}{}_{k}$ в пространстве H_0 доказана в работе [2].

3. Метод Фурье решения краевой задачи

Общее решение задачи (1)–(4) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{+}(t)\varphi_k^{+}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{-}(t)\varphi_k^{-}(x). \tag{8}$$

Далее считаем, что $f \perp H_0^{-}$, где H_0^{-} — подпространство, образованное функциями $\varphi^{-}{}_{k}$ при $k = 1, 2, 3\ldots$. Подставим (8) в уравнение (1) и после некоторых преобразований получим два дифференциальных уравнения:

$$T_k''^{+}(t) + \lambda^{+}{}_{k}T^{+}{}_{k}(t) = f^{+}{}_{k}(t), \qquad T_k''^{-}(t) + \lambda^{-}{}_{k}T^{-}{}_{k}(t) = 0.$$

Учитывая условия (4), для положительных собственных значений получим:

$$T_k''^{+}(t) + \lambda^{+}{}_{k}T^{+}{}_{k}(t) = f^{+}{}_{k}(t), \tag{9}$$

$$T_k^{+}(0) = T^{+}{}_{k}(T) = 0. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (9) будем искать в виде:

$$T^{+}{}_{k}(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}t + b_k \sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}t.$$

Из условий (10) найдем коэффициенты a_k, b_k. При этом общее решение будет иметь вид

$$T^{+}{}_{k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}}\int_0^t f^{+}{}_{k}(\tau)\sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}(t-\tau)d\tau - \\ - \frac{\sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}t}{\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}\sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}T}\int_0^T f^{+}{}_{k}(\tau)\sin\sqrt{\lambda^{+}{}_{k}}(T-\tau)d\tau.$$

Для отрицательных собственных значений:

$$T_k''^{-}(t)+\lambda^-{}_kT^-{}_k(t)=0, \tag{11}$$

$$T_k^-(0)=T^-{}_k(T)=0. \tag{12}$$

Спектральная задача (11), (12) будет иметь нулевое решение

$$T^-{}_k(t)=0.$$

Обоснование метода Фурье состоит в исследовании того случая, когда ряд (8) сходится в норме того или иного функционального пространства [3, 4]. Исследуем равномерную сходимость ряда (10)для любого $t\in[0,T]$ по норме пространства H_s:

$$\|u(x,t)\|_s^2=\sum_{k=1}^{\infty}|T^+{}_k(t)|^2|\lambda^+{}_k|^s+\sum_{k=1}^{\infty}|T^-{}_k(t)|^2|-\lambda^-{}_k|^s.$$

Пусть выполнены условия

$$|\ sin\sqrt{\lambda^+{}_k}T\ |\geqslant\delta_0>0 \tag{13}$$

для любого натурального к.

Покажем равномерную сходимость ряда (8) по норме пространства H_1 при $t\in[0,T]$, для этого достаточно проверить, что равномерно сходится на $[0,T]$ следующий ряд:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^+}}\int_0^t f^+{}_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(t-\tau)d\tau-\right.\\ \left.-\frac{sin\sqrt{\lambda^+{}_k}t}{\sqrt{\lambda_k^+}\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}T}\int_0^T f^+{}_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(T-\tau)d\tau\right|^2|\lambda_k^+|\leqslant\\ \leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t f^+{}_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(t-\tau)d\tau\right|^2+\\ +\frac{2}{\delta_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^T f^+{}_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(T-\tau)d\tau\right|^2.\end{gathered} \tag{14}$$

По неравенству Гельдера имеем

$$\left(\left|\int_0^t f^+{}_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(t-\tau)d\tau\right|\right)^2\leqslant\left(\int_0^t|f_k^+(\tau)|d\tau\right)^2\leqslant T\int_0^T(f_k^+(\tau))^2d\tau. \tag{15}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_k^+(\tau))^2=\|f(\tau)\|^2. \tag{16}$$

Ряд (16) по теореме Дини сходится равномерно. Но тогда и проинтегрированный ряд сходится равномерно. Из неравенства (15) по теореме Вейерштрасса следует, что ряд (14) сходится равномерно. Отсюда следует, что равномерно сходится и ряд (8), и $u\in C([0,T],H_1)$.

Продифференцируем ряд (8) по t, получим ряд

$$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'^{+}(t)\varphi_k^+(x),$$

который равномерно сходится и $u_t\in C([0,T],H_0)$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Далее продифференцируем ряд (8) по t дважды, получим ряд:

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k^{''+}(t)\varphi_k^+(x).$$

Покажем равномерную сходимость этого ряда в метрике пространства H_{-1}, если установим, что равномерно сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|f_k^+(t)-\sqrt{\lambda_k^+}\int_0^t f^+{}_k(\tau)sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(t-\tau)d\tau+$$
$$+\sqrt{\lambda_k^+}\frac{sin\sqrt{\lambda^+{}_k}t}{sin\sqrt{\lambda^+{}_k}T}\int_0^T f^+{}_k(\tau)sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(T-\tau)d\tau\bigg|^2\frac{1}{|\lambda_k^+|}\leqslant$$
$$\leqslant 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k^+|}|f_k^+(t)|^2+3\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|\int_0^t f^+{}_k(\tau)sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(t-\tau)d\tau\bigg|^2+$$
$$+\frac{3}{\delta_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|\int_0^T f^+{}_k(\tau)sin\sqrt{\lambda^+{}_k}(T-\tau)d\tau\bigg|^2.$$

Здесь λ_k^+ заменим наименьшим λ_1^+. Далее, используя неравенство Гельдера и равенство Парсеваля, аналогично предыдущему получим равномерную сходимость полученного ряда. Из чего следует, что дважды продифференцированный по t ряд равномерно сходится и $u_{tt}\in C([0,T],H_{-1})$.

Решение $u(x,t)\in C([0,T],H_1)\bigcap C^1([0,T],H_0)$ должно удовлетворять интегральному тождеству

$$-\int_0^T(\operatorname{sgn}xu_t,\eta_t)dt+\int_0^T(u_x,\eta_x)dt=\int_0^T(\operatorname{sgn}xf,\eta)dt, \tag{17}$$

где η — некоторая функция, такая что

$$\eta\in K=\{C([0,T],H_1)\bigcap C^1([0,T],H_0),\ \eta(x,0)=0,\ \eta(x,T)=0\}.$$

Имеем

$$-\int_0^T(\operatorname{sgn}\ xu_t,\eta_t)dt=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T(\operatorname{sgn}x\varphi_k^+(x),\eta_t)\left(\int_0^t f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)d\tau-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\sqrt{\lambda_k^+}t}{\sin\sqrt{\lambda_k^+}}\int_0^T f_k^+\sin\sqrt{\lambda_k^+}(T-\tau)d\tau\right)dt.$$

Далее проинтегрируем по частям в левой части последнего равенства, учитывая, что $\eta(x,0)=0,\ \eta(x,T)=0,$ получим

$$-\int_0^T(\operatorname{sgn}xu_t,\eta_t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T(\operatorname{sgn}x\varphi_k^+(x),\eta)$$

$$\left(f_k^+(t) - \sqrt{\lambda_k^+}\int_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\lambda_k^+}\cos\sqrt{\lambda_k^+}t}{\sin\sqrt{\lambda_k^+}}\int_0^T f_k^+\sin\sqrt{\lambda_k^+}(T-\tau)d\tau\right)dt = \qquad (18)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (\operatorname{sgn} x\varphi_k^+(x),\eta)f_k^+(t)dt - \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (\lambda_k^+)T_k^+(t)(\operatorname{sgn} x\varphi_k^+(x),\eta)dt.$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T (u_x,\eta_x)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T T_k^+(t)(\varphi_k^{\prime +}(x),\eta_x)dt,$$

также, интегрируя его по частям, получим

$$\int_0^T (u_x,\eta_x)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (\lambda_k^+)T_k^+(t)(\operatorname{sgn} x\varphi_k^+(x),\eta)dt. \qquad (19)$$

Сложим (18) и (19), приняв во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^+(t)\varphi_k^+(x) = f(x,t),$$

получим $-\int_0^T (\operatorname{sgn} x u_t,\eta_t)dt + \int_0^T (u_x,\eta_x)dt = \int_0^T (\operatorname{sgn} x f,\eta)dt$, то есть тождество (17). В результате получаем следующее:

Теорема. Пусть выполнены условия (13), $f \in L_2((-1,1),H_0)$ и $f \perp L_2((-1,1),H_0)$, тогда ряд (8) равномерно сходится и $u(x,t) \in C([0,T],H_1)$, ряды, полученные из ряда (8) однократным и двукратным дифференцированием по t, также равномерно сходятся, и $u_t(x,t) \in C([0,T],H_0)$, $u_{tt}(x,t) \in C([0,T],H_{-1})$. $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (17) и является обобщенным решением задачи Дирихле.

Литература

[1] Бускарова, О.Ф. О методе Фурье для решения параболического уравнения с меняющимся направлением времени / О.Ф. Бускарова // Научная конференция студентов и молодых ученых Республики Саха (Якутии): тез. докл.— Якутск: НИИ ПМиИ ЯГУ, 1997. – С. 7.

[2] Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.В. Попов, С.Г. Пятков. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

[3] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

[4] Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1968. – 576 с.

[5] Федоров, Ф.М. Граничный метод в задачах с переменным направлением времени / Ф.М. Федоров // Мат. заметки ЯГУ. – 1995. – Т. 2. – В. 2. – С. 52–60.

Поступила в редакцию 18/*VII*/2007;
в окончательном варианте — 18/*VII*/2007.

DIRIHLET'S PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION OF THE SECOND ORDER

 T.A. Safonova[2]

In the works of Egorov I.E., Pyatcov S.G., Popov S.V. [2] and others [1], [5] new problems for equation of mixed type are proposed. The Dirichlet's problem for equation of mixed type is studied in the paper. The common solution of problem is studied by the Fourier method. The unknown function expansion is passed by eigenfunctions of the one nonclassical spectral problem.

Paper received 18/*VII*/2007.
Paper accepted 18/*VII*/2007.

[2]Safonova Tatiana Afanasievna (`safonovata@mail.ru`), Institute of Mathematics and Informatics, Yakut State University n.a. M.K. Ammosov, 677011, Yakutsk, Russia.