УДК 532.546

ИТЕРАЦИОННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПРОМЕРЗАНИИ ГРУНТОВ

© 2007 А.Р. Павлов, М.В. Матвеева[1]

В работе рассмотрено численное решение задачи о промерзании грунта. Построена неявная разностная схема, для численной реализации которой определена итерационная схема, доказана ее сходимость.

Введение

Математическое описание процессов кристаллизации (плавления) строится на основе так называемой задачи Стефана и ее обобщений [1–4]. В процессе промерзания дисперсной среды происходит изменение её физического состояния, в частности, переход из талого состояния в мерзлое.

Формулировка задачи промерзания-протаивания в виде задачи Стефана нашла широкое применение при исследовании процессов промерзания-протаивания, а также лежит в основе решения многих задач теплового и механического взаимодействия мерзлых грунтов с различными конструкциями и окружающей средой.

Важным моментом построения моделей тепломассопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах является способ локализации области фазового перехода. Известны два подхода: согласно первому из них, фазовый переход локализован на поверхности-фронте; согласно второму — фазовое превращение происходит на протяженной области (так называемая модель фазового перехода в спектре температур).

Впервые математическая постановка задачи о промерзании влажного грунта в спектре отрицательных температур была предложена в работе А.Г. Колесникова [5], который основывался на экспериментальных работах И. Юнга, Н.А. Цытовича и З.А. Нерсесовой [6, 7]. В данных работах авторы подтвердили факт о содержании в мерзлых породах незамерзшей воды при отрицательных температурах.

При исследовании процесса промерзания-протаивания дисперсных сред необходимо одновременно с теплопереносом рассматривать массоперенос, так как происходит миграция влаги к фронту промерзания. Количественное исследование тепломассопереноса в дисперсных средах проводится на основе двух математических моделей: в первой модели наблюдается наиболее простое допущение, при котором перенос влаги происходит только в талой области [8, 9] и вторая модель, когда происходит тепломассоперенос в талой и мерзлой областях.

[1]Павлов Алексей Романович, Матвеева Майя Васильевна (m-mayza@mail.ru), Институт математики и информатики Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова, 677011, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

При построении модели в первом подходе учитывают совместный тепломассоперенос в талой области, то есть кроме уравнения теплопереноса вводится уравнение диффузии, а в мерзлой области происходит только теплоперенос.

Достаточно полно описывает процессы тепло- и массопереноса в промерзающих и протаивающих дисперсных грунтах система уравнений тепломассопереноса, предложенная А.В. Лыковым [10], на основе понятия потенциала влагопереноса и движущих сил массопереноса как его градиентов. Описание массообмена допускает миграцию влаги в мерзлой области. Данная система уравнений мало используется ввиду сложности, она скорее представляет теоретический интерес для исследования механизмов тепломассопереноса. На практике пользуются различными модификациями системы уравнений тепломассопереноса [11–13].

В настоящей работе разработан алгоритм, который позволяет определить функции температуры и влажностей в узлах пространственно-временной сетки. Кроме того, определяются положение границы промерзания в каждом моменте времени и величина влажности на границе фазового перехода. Доказана сходимость итерационного процесса. Выполнены конкретные расчеты.

1. Постановка задачи

Исследование температурно-влажностного режима грунтов с учетом фазовых превращений поровой влаги в процессе их промерзания выполнено на математической модели тепломассопереноса [10].

Температурная задача в одномерном случае, когда пространственная координата x направлена от дневной поверхности грунта внутрь массива, состоит из следующих уравнений:

$$c_1\rho_1\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}), \qquad T > T_*, \qquad \xi(t) < x < l, \tag{1}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x}) + L\rho\frac{\partial W_2}{\partial t}, \qquad T < T_*, \qquad 0 < x < \xi(t). \tag{2}$$

На границе раздела фаз имеет место условие

$$\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial T}{\partial x} = L\rho[W_* - W_1(T_*)]\frac{d\xi}{dt}, \qquad T = T_*, \qquad x = \xi(t). \tag{3}$$

На дневной поверхности грунта задано условие теплообмена по закону Ньютона

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_c), \qquad x = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

а на нижней границе области — отсутствие теплового потока

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad x = l, \qquad t > 0. \tag{5}$$

Начальное распределение температуры по толщине грунта известно

$$T(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где T — температура, W — влажность в талой зоне, W_1, W_2 — влажности по жидкой и твердой фазах в мерзлой зоне соответственно, T_* — температура фазового перехода, c_1, ρ_1, λ_1 — соответственно удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности талой зоны, c_2, ρ_2, λ_2 — те же величины в мерзлой зоне, ρ — плотность скелета (сухого) материала, L — удельная теплота кристаллизации воды (плавления льда). $W_* = W(T_*)$ — значение влажности на фронте со стороны талой зоны; $W_1(T_*)$ — такая же величина со стороны мерзлой зоны; α — коэффициент теплопередачи; T_c — температура среды.

Влажностная задача ставится с учетом миграции влаги как в талой, так и мерзлой областях

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial W}{\partial x}\right), \qquad \xi(t) < x < l, \qquad T > T_*, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial W_1}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < \xi(t), \qquad T < T_*. \tag{8}$$

Уравнение баланса массы на фазовой границе можно записать в виде

$$k_2\frac{\partial W_1}{\partial x} - k_1\frac{\partial W}{\partial x} = W_2(T_*)\frac{d\xi}{dt}. \tag{9}$$

Граничные условия влажности записываются в зависимости от фазового состояния границы. В талом состоянии всей толщи грунта задаются условия

$$k_1\frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_*(W - \psi), \qquad x = 0, \qquad T > T_*, \tag{10}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad x = l, \qquad T > T_*. \tag{11}$$

Для мерзлых границ указанные условия принимают следующий вид:

$$k_2\frac{\partial W_1}{\partial x} = \alpha_*(W_1 - \psi), \qquad x = 0, \qquad T \leqslant T_*, \tag{12}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \qquad x = l, \qquad T \leqslant T_*. \tag{13}$$

Начальное распределение влаги во всей области известно

$$W(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{14}$$

где $W_1(T)$ — известная функция, выражающая количество незамерзшей воды при температуре Т; $W_2(T)$ — льдосодержание (количество льда); $\overline{W} = W_1 + W_2$ — суммарная влажность в мерзлой зоне, W — влажность в талой зоне; $\psi(x)$ — равновесная с окружающей средой влажность материала; α_* — коэффициент влагообмена; k_1, k_2 — коэффициенты диффузии влаги соответственно в талой и мерзлой зонах. $W_2(T_*) = W_* - W_1(T_*)$ — свободная влага (вода), которая замерзает скачком на фронте фазового перехода.

Уравнения (1)–(3) обычно принято записывать в виде одного уравнения, заданного во всей области. Аналогично поступаем с уравнениями влажностной задачи. Заметим, что $T(x,t)$ в температурной задаче является непрерывной монотонно возрастающей (убывающей) функцией. Решение влажностной задачи по жидкой фазе терпит разрыв первого рода на фронте, где скачком замерзает свободная вода. Для того чтобы написать уравнение влажности относительно непрерывной функции переменной T, введем новую функцию

$$\Phi = \begin{cases} W, & T \geqslant T_*, \\ \overline{W}, & T \leqslant T_*. \end{cases}$$

Функция $\Phi(T)$ при $T \to T_* - 0$ принимает значения $\Phi(T) = \overline{W} = W_1(T_*) + W_2(T_*)$, а при $T \to T_* + 0$ - $\Phi(T) = W(T_* + 0) = W_*$. По определению $W_2(T_*) = W_* - W_1(T_*)$, т.е. в точке $T = T_*$ функция $\Phi(T)$ непрерывна.

Введем новую функцию $\widetilde{W}_2(T)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $\widetilde{W}_2(T)$ непрерывна и отлична от нуля в промежутке $(T_* - \Delta, T_*)$, а вне ее тождественно равняется нулю.

2. При $T = T_*$ принимает значение равное $\widetilde{W}_2(T_*) = W_2(T_*)$.

3. Производная $\dfrac{d\widetilde{W}_2(T)}{dT} > 0$.

Тогда имеет место следующее утверждение: уравнения (7)–(9) можно написать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial W_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \widetilde{W_2}}{\partial t}, \tag{15}$$

определенного во всей области $0 < x < l$, где

$$K = \begin{cases} k_1, & T > T_*, \\ k_2, & T \leqslant T_*. \end{cases}$$

Справедливость утверждения при $T \leqslant T_* - \Delta$ и $T > T_*$ очевидна. Для доказательства того, что уравнение (15) включает и условие (9), воспользуемся методикой работ [14, 15]. Выберем область на плоскости xot, представляющую достаточно малую окрестность границы фазового перехода с контуром $ABCDA$ с шириной 2Δ, внутри которой находится фронт фазового перехода EF (рис. 1).

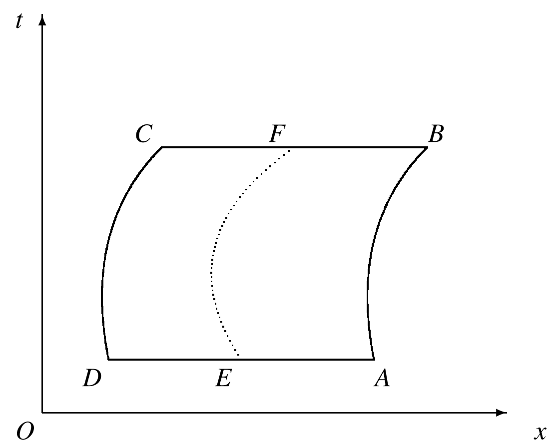


Рис. 1. Плоскость xot, представляющая достаточно малую окрестность границы фазового перехода

Пусть слева от линии EF $(x = \xi(t))$ находится мерзлая область, справа — талая. Проинтегрируем уравнение (15) по данной области и воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Gamma} K\frac{\partial \Phi}{\partial x}dt + \Phi dx - k_2\frac{\partial W_2}{\partial x}dt - \widetilde{W}_2 dx = 0,$$

где Γ — контур $ABCDA$. Пусть отрезки BC и DA стягиваются к точкам F и E соответственно, тогда интегралы по ним обращаются в нуль и получится равенство

$$\int\limits_{EF} k_1\frac{\partial W}{\partial x}dt + \int\limits_{FE} k_2\frac{\partial \overline{W}}{\partial x}dt + \int\limits_{EF} W_* dx + \int\limits_{FE} \overline{W} dx - \int\limits_{FE} k_2\frac{\partial W_2}{\partial x}dt - \int\limits_{FE} W_2(T_*)dt = 0.$$

На линии EF выполняются равенства $\overline{W} = W_1 + W_2$, $W_* = W_1 + W_2$, и, меняя направление интегрирования в первом интеграле, получим

$$\int\limits_{FE} \left[\left(k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - k_1 \frac{\partial W}{\partial x} \right) dt - W_2(T_*) dx \right] = 0,$$

из которого и следует условие (9). Совершенно аналогично доказывается, что уравнения (1)–(3) заменяются одним уравнением

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + L\rho \frac{\partial W_2}{\partial t}, \tag{16}$$

определенным во всей области $0 < x < l$, где

$$C = \begin{cases} c_1\rho_1, & T > T_*, \\ c_2\rho_2 & T < T_*, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1, & T > T_*, \\ \lambda_2, & T < T_*. \end{cases}$$

Граничные и начальные условия для функции Φ получаются из заданных условий (10)–(14)

$$k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha_*(\Phi - \psi), \qquad x = 0, \qquad T > T_*, \tag{17}$$

$$k_2 \frac{\partial (\Phi - W_2)}{\partial x} = \alpha_*(W_1 - \psi), \qquad x = 0, \qquad T \leqslant T_*, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad x = l, \qquad T > T_*, \tag{19}$$

$$\frac{\partial (\Phi - W_2)}{\partial x} = 0, \qquad x = l, \qquad T \leqslant T_*, \tag{20}$$

$$\Phi(x, 0) = \psi_*(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{21}$$

2. Разностная задача

Для численного решения сопряженной системы уравнений тепломассопереноса, состоящей из уравнений (15), (16) с дополнительными условиями (4)–(6) и (17)–(21), вводится равномерная по каждой переменной разностная сетка с шагами h и τ:

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad x_N = Nh = l\},$$
$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, j_0}\}, \quad \omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau.$$

На границе фазового перехода коэффициенты указанных уравнений терпят разрывы первого рода и не определены на ней. Для построения разностных схем сквозного счета разрывные коэффициенты заменим сглаженными (непрерывными) функциями. Сглаживание проводится в окрестности точки фазового перехода $(T_* - \triangle, T_* + \triangle)$, и в этом промежутке строим непрерывные коэффициенты, например линейной интерполяцией.

Для температурной задачи строим интегро-интерполяционным методом следующую итерационную разностную схему:

$$\overset{s}{C} \overset{s+1}{T}_{\bar{t},i} = (\overset{s}{\lambda} \overset{s+1}{T}_{\bar{x}})_{x,i} + L\rho(\overset{s}{W}_2)_{\bar{t},i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N - 1, \tag{22}$$

где s — номер итерации.

Граничные условия строим, используя уравнение (16). Интегрируя (16) по x от $x = 0$ до $x = 0,5h$, получим

$$C_0 \frac{h}{2} \frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_0 = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{0.5h} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_0 + L\rho_c \frac{\partial W_2}{\partial t}\bigg|_0.$$

Используя условие (4), получим разностное граничное условие следующего вида

$$\overset{s}{\lambda}_{0.5}\overset{s+1}{T}_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{s}{C}_0\overset{s+1}{T}_{t,0} + \alpha(\overset{s+1}{T}_0 - T_c) - \frac{h}{2}L\rho\overset{s}{W}_{2,t,0}. \tag{23}$$

Аналогично строится правое граничное условие

$$-\overset{s}{\lambda}_{N-0.5}\overset{s+1}{T}_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}\overset{s}{C}_N\overset{s+1}{T}_{\bar{t},N} - \frac{h}{2}L\rho\overset{s}{W}_{2,\bar{t},N}. \tag{24}$$

Начальное условие

$$T(x_i,0) = \varphi(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N. \tag{25}$$

Аналогично строится итерационная разностная схема для влажностной задачи

$$\overset{s+1}{\Phi}_{\bar{t},i} = (\overset{s}{K}\overset{s+1}{\Phi}_{\bar{x}})_{x,i} - (\overset{s}{k}_2(\overset{s}{W}_2)_{\bar{x}})_{x,i} + \overset{s}{\tilde{W}}_{2\bar{t},i}, \tag{26}$$

$$(\overset{s}{k}_1)_{0.5}\overset{s+1}{\Phi}_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{s+1}{\Phi}_{t,0} + \alpha_*(\overset{s+1}{\Phi} - \psi)_0, \quad T_0 > T_*, \tag{27}$$

$$\overset{s+1}{\Phi}_0 = \check{\Phi}_0 + \frac{2\tau}{h^2}(\overset{s}{k}_2)_{0.5}[(\overset{s+1}{W}_1)_1 - (\overset{s+1}{W}_1)_0] - \frac{2\tau}{h}\alpha_*(\overset{s+1}{W}_1 - \psi)_0 + (\overset{s}{\tilde{W}}_2 - \check{\tilde{W}}_2)_0, \quad T_0 \leqslant T_*, \tag{28}$$

$$\frac{h}{2}\overset{s+1}{\Phi}_{\bar{t},N} = -(\overset{s}{k}_1)_{N-0.5}\overset{s+1}{\Phi}_{\bar{x},N}, \quad T_N > T_*, \tag{29}$$

$$\overset{s+1}{\Phi}_N = \check{\Phi}_N - \frac{2\tau}{h^2}(\overset{s}{k}_2)_{N-0.5}[(\overset{s+1}{W}_1)_N - (\overset{s+1}{W}_1)_{N-1}] + (\overset{s}{\tilde{W}}_2 - \check{\tilde{W}}_2)_N, \quad T_N \leqslant T_*, \tag{30}$$

$$\Phi(x_i,0) = \varphi_*(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N. \tag{31}$$

3. Исследование сходимости итерационной схемы

Пусть T, Φ — решения разностных задач на текущем моменте времени, $\overset{s+1}{T}$, $\overset{s+1}{\Phi}$ — решения задач (22)–(25) и (26)–(31) соответственно. Введем две функции

$$\overset{s+1}{y}_1 = \overset{s+1}{T} - T, \quad \overset{s+1}{y}_2 = \overset{s+1}{\Phi} - \Phi.$$

Тогда для них получаем следующие задачи:

$$\tau(\overset{s}{C} - C)T_{\bar{t}} + \overset{s}{C}\overset{s+1}{y}_1 = \tau(\overset{s}{\lambda}\overset{s+1}{y}_{1\bar{x}})_x + \tau((\overset{s}{\lambda} - \lambda)T_{\bar{x}})_x + L\rho(\overset{s}{W}_2 - W_2), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\tau(\overset{s}{\lambda} - \lambda)_{0.5}\overset{s}{T}_{x,0} + \tau\overset{s}{\lambda}_{0.5}\overset{s+1}{y}_{1,x,0} &= \\ = 0.5h\tau(\overset{s}{C} - C)_0 T_{t,0} &+ 0.5h\overset{s}{C}_0\overset{s+1}{y}_{1,0} + \\ &+ \tau\alpha\overset{s+1}{y}_{1,0} - 0.5hL\rho(\overset{s}{W}_2 - W_2)_0, \qquad t \in \omega_\tau,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}-\tau(\overset{s}{\lambda} - \lambda)_{N-0.5}\overset{s}{T}_{\bar{x},N} - \tau\overset{s}{\lambda}_{N-0.5}\overset{s+1}{y}_{1,\bar{x},N} &= \\ = 0.5h\tau(\overset{s}{C} - C)_N T_{\bar{t},N} &+ 0.5h\overset{s}{C}_N\overset{s+1}{y}_{1,N} - \\ &- 0.5hL\rho(\overset{s}{W}_2 - W_2)_N, \qquad t \in \omega_\tau,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\overset{s+1}{y}_2 &= \tau((\overset{s}{K} - K)\Phi_{\bar{x}})_x + \tau(\overset{s}{K}\overset{s+1}{y}_{2\bar{x}})_x - \\ &- \tau(\overset{s}{k}_2(\overset{s+1}{W}_2 - W_2)_{\bar{x}})_x - \tau((\overset{s}{k}_2 - k_2)W_{2\bar{x}})_x, \qquad (x,t) \in \omega_{h\tau},\end{aligned} \tag{35}$$

$$\tau(\overset{s}{k}_1 - k_1)_{0.5}\Phi_{x,0} + \tau\overset{s}{k}_{1,0.5}\overset{s+1}{y}_{2,x,0} = 0.5h\overset{s+1}{y}_{2,0} + \alpha_*\tau\overset{s+1}{y}_{2,0}, \quad t \in \omega_\tau, \quad T > T_*, \tag{36}$$

$$\tau(\overset{s}{k}_2 - k_2)_{0.5}(W_1)_{x,0} + \tau\overset{s}{k}_{2,0.5}(\overset{s}{W}_1 - W_1)_{x,0} = \\ = 0.5h\overset{s+1}{y}_{2,0} + \alpha_*\tau(\overset{s+1}{W}_1 - W_1)_0, \quad t \in \omega_\tau, \quad T \leqslant T_*, \tag{37}$$

$$-\tau(\overset{s}{k}_1 - k_1)_{N-0.5}\Phi_{\bar{x},N} - \tau\overset{s}{k}_{1,N-0.5}\overset{s+1}{y}_{2,\bar{x},N} = 0.5h\overset{s+1}{y}_{2,N}, \quad t \in \omega_\tau, \quad T > T_*, \tag{38}$$

$$-\tau(\overset{s}{k}_2 - k_2)_{N-0.5}(W_1)_{\bar{x},N} - \tau\overset{s}{k}_{2,N-0.5}(\overset{s}{W}_1 - W_1)_{\bar{x},N} = \\ = 0.5h\overset{s+1}{y}_{2,N}, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad T \leqslant T_*, \tag{39}$$

Воспользуемся скалярными произведениями сеточных функций из [16]

$$(y,\eta) = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i\eta_i, \quad (y,\eta] = h\sum_{i=1}^{N} y_i\eta_i, \quad [y,\eta] = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i\eta_i + \frac{h}{2}y_N\eta_N + \frac{h}{2}y_0\eta_0.$$

Уравнение (32) умножим скалярно на $\overset{s+1}{y}_1$ и применим разностную формулу Грина

$$(\overset{s}{C}\overset{s+1}{y}_1, \overset{s+1}{y}_1) + \tau(\overset{s}{\lambda}\overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}, \overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}] = \\ = \overset{s+1}{y}_{1,N}(\tau\overset{s}{\lambda}_{N-0.5}\overset{s+1}{y}_{1\bar{x},N} + \tau(\overset{s}{\lambda} - \lambda)_{N-0.5}T_{\bar{x},N}) - \\ - \overset{s+1}{y}_{1,0}(\tau\overset{s}{\lambda}_{0.5}\overset{s+1}{y}_{1x,0} + \tau(\overset{s}{\lambda} - \lambda)_{0.5}T_{x,0}) - \tau((\overset{s}{\lambda} - \lambda)\overset{s}{T}_{\bar{x}}, \overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}] + \\ + L\rho((\overset{s}{W}_2 - W_2), \overset{s+1}{y}_1) - \tau((\overset{s}{C} - C)T_{\bar{t}}, \overset{s+1}{y}_1).$$

Отсюда, используя граничные условия (33) и (34) придем к соотношению

$$(\overset{s}{C}\overset{s+1}{y}_1, \overset{s+1}{y}_1) + \tau(\overset{s}{\lambda}\overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}, \overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}] = \\ = -\overset{s+1}{y}_{1,N}(0.5h\tau(\overset{s}{C}_N - C_N)T_{\bar{t},N} + 0.5h\overset{s}{C}_N\overset{s+1}{y}_{1,N} - 0.5L\rho(\overset{s}{W}_2 - W_2)_N) - \\ - \overset{s+1}{y}_{1,0}(0.5h\tau(\overset{s}{C}_0 - C_0)T_{t,0} + 0.5h\overset{s}{C}_0\overset{s+1}{y}_{1,0} + \\ + \tau\alpha\overset{s+1}{y}_{1,0} - 0.5L\rho(\overset{s}{W}_2 - W_2)_0) - \tau(((\overset{s}{\lambda} - \lambda)\overset{s}{T}_{\bar{x}}), \overset{s+1}{y}_{1\bar{x}}] + \\ + L\rho((\overset{s}{W}_2 - W_2), \overset{s+1}{y}_1) - \tau((\overset{s}{C} - C)T_{\bar{t}}, \overset{s+1}{y}_1). \tag{40}$$

Коэффициенты уравнений (22) и (26) являются функциями $C = C(T, W_1, W_2)$, $k_1 = k_1(W)$, $k_2 = k_2(W_1, W_2)$, $\lambda = \lambda(T)$ и пусть они имеют ограниченные производные по указанным переменным

$$\overset{s}{C} - C = \frac{\partial C}{\partial W_1}(\overset{s}{W}_1 - W_1) + \frac{\partial C}{\partial W_2}(\overset{s}{W}_2 - W_2) + \frac{\partial C}{\partial T}(\overset{s}{T} - T),$$

но $W_2 = \Phi - W_1$, $\overset{s}{W}_1 - W_1 = \dfrac{dW_1}{dT}\overset{s}{y}_1$, $\overset{s}{W}_2 - W_2 = \overset{s}{y}_2 - \dfrac{dW_1}{dT}\overset{s}{y}_1$. И окончательно получаем

$$\overset{s}{C} - C = \left(\frac{\partial C}{\partial W_1} - \frac{\partial C}{\partial W_2}\right)\frac{dW_1}{dT}\overset{s}{y}_1 + \frac{\partial C}{\partial W_2}\overset{s}{y}_2 + \frac{\partial C}{\partial T}\overset{s}{y}_1.$$

Аналогично получаются

$$\overset{s}{k}_2 - k_2 = \left(\frac{\partial k_2}{\partial W_1} - \frac{\partial k_2}{\partial W_2}\right)\frac{dW_1}{dT}\overset{s}{y}_1 + \frac{\partial k_2}{\partial W_2}\overset{s}{y}_2,$$

$$\overset{s}{k}_1 - k_1 = \frac{\partial k_1}{\partial W}\overset{s}{y}_2.$$

Учитывая полученные выражения, оцениваем сверху правую часть (40) с помощью ε-неравенства

$$|a * b| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Для сокращения записи все постоянные обозначим одной буквой M, не указывая их структуры, как это обычно делается при выводе априорных оценок решения разностных задач [16].

Тогда окончательно придем к соотношению

$$(\min C - \tau M)[\overset{s+1}{y}_1, \overset{s+1}{y}_1] + \tau(\min\lambda - \varepsilon)(\overset{s+1}{y}_{1\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{1\overline{x}}] \leqslant M([\overset{s}{y}_1, \overset{s}{y}_1] + [\overset{s}{y}_2, \overset{s}{y}_2]). \tag{41}$$

Аналогичные выкладки производим для задачи (35). Умножив скалярно (35) на $\overset{s+1}{y}_2$ и применяя разностную формулу Грина, придем к соотношению

$$\begin{aligned}
&(\overset{s+1}{y}_2, \overset{s+1}{y}_2) + \tau(\overset{s}{K}\overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}] = \\
&\quad = \overset{s+1}{y}_{2,N}(\tau(\overset{s}{K} - K)_{N-0.5}\Phi_{\overline{x},N} + \tau\overset{s}{K}_{N-0.5}\overset{s+1}{y}_{2\overline{x},N} - \\
&\qquad -\tau\overset{s}{k}_{2,N-0.5}(\overset{s+1}{W}_2 - W_2)_{\overline{x},N} - \tau(\overset{s}{k}_2 - k_2)_{N-0.5}W_{2\overline{x},N}) - \\
&- \overset{s+1}{y}_{2,0}(\overset{s}{K} - K)_{0.5}\Phi_{x,N} + \tau\overset{s}{K}_{0.5}\overset{s+1}{y}_{2x,0} - \tau\overset{s}{k}_{2,0.5}(\overset{s+1}{W}_2 - W_2)_{x,0} - \\
&\qquad -\tau(\overset{s}{k}_2 - k_2)_{0.5}W_{2x,0}) - \tau((\overset{s}{K} - K)\Phi_{\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}] + \\
&\qquad\quad +\tau(\overset{s}{k}_2(\overset{s+1}{W}_2 - W_2)_{\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}] + \tau((\overset{s}{k}_2 - k_2)W_{2\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}].
\end{aligned} \tag{42}$$

При оценке сверху правой части уравнения (42) учитывается фазовое состояние границ для талой зоны (36), (38), а для мерзлой — (37), (39). Тогда в общем виде имеем

$$[\overset{s+1}{y}_2, \overset{s+1}{y}_2] + \tau(\min\overset{s}{K} - 3\varepsilon)(\overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}] \leqslant M([\overset{s}{y}_2, \overset{s}{y}_2] + [\overset{s}{y}_1, \overset{s}{y}_1] + (\overset{s}{y}_{1\overline{x}}, \overset{s}{y}_{1\overline{x}}] + (\overset{s}{y}_{2\overline{x}}, \overset{s}{y}_{2\overline{x}}]).$$

В правой части воспользуемся неравенством

$$(\overset{s}{y}_{\overline{x}}, \overset{s}{y}_{\overline{x}}] \leqslant \frac{4}{h^2}[\overset{s}{y}, \overset{s}{y}].$$

Тогда

$$[\overset{s+1}{y}_2, \overset{s+1}{y}_2] + \tau(\min\overset{s}{K} - 3\varepsilon)(\overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}, \overset{s+1}{y}_{2\overline{x}}] \leqslant M([\overset{s}{y}_2, \overset{s}{y}_2] + [\overset{s}{y}_1, \overset{s}{y}_1]) \tag{43}$$

и объединим уравнения (41) и (43).

При достаточно малых ε и τ, удовлетворяющих условию $\min C - \tau M > 0$, получим

$$[\overset{s+1}{y}_1, \overset{s+1}{y}_1] + [\overset{s+1}{y}_2, \overset{s+1}{y}_2] \leqslant |V|\tau([\overset{s}{y}_2, \overset{s}{y}_2] + [\overset{s}{y}_1, \overset{s}{y}_1]).$$

Отсюда при достаточно малом $\tau < \dfrac{1}{M}$ следует сходимость итерационной схемы, т.е. доказана теорема.

Теорема. Пусть существуют решения разностных задач T и Φ. Если функции $C = C(T, W_1, W_2)$, $\lambda = \lambda(T)$, $k_1 = k_1(W)$, $k_2 = k_2(W_1, W_2)$ имеют ограниченные производные, то при достаточно малом τ решения итерационной схемы $\overset{s}{T}$, $\overset{s}{\Phi}$ сходятся к решениям разностных задач.

По построенной разностно-итерационной схеме проведены расчеты температурного и влажностного полей в процессе промерзания на примере песчаных грунтов. Расчет проводился при следующих входных данных задачи [17–19]
c_1=4,2 кДж/кг·град, c_2=2,1 кДж/кг·град, C=0,875 кДж/кг·град, $\rho = 1639$ кг/м^3 $\rho_{sk} = 2600$ кг/м^3, ρ_2=916 кг/м^3, ρ_1=1000 кг/м^3, $L = 334 \cdot \rho$ кДж/м^3, T_c=-20°C, α=83,5 кДж/м^2·ч·град, T_*=0°C, α_*=0,8e-4, ψ=0,015.

Значения λ при различных степенях влагонасыщенности q вычислены по формулам из [17]

$$\lambda_1 = 1,38 + 1,05q, \qquad \lambda_2 = 1,32 + 1,05q.$$

Пористость определяется по плотностям сухого песка и его скелета $m = 1 - \rho_{\text{сух}}/\rho_c = 0,37$. Максимальная влагоемкость $W_{\max} = m\rho_1/\rho_{\text{сух}} = 0,2256$. Начальная влажность находится по формуле $W = qW_{\max}$. Найденные ее значения помещены во втором столбце таблице.

Таблица

Данные по теплопроводности талых и мерзлых песков (кДж/м·час·град)

Степень влагонасыщенности	Весовая влажность	λ талого песка	λ мерзлого песка
0,6	0,135	8,151	8,402
0,65	0,146	8,370	8,621
0,7	0,158	8,590	8,840

Коэффициенты влагопроводности талого и мерзлого грунтов выбраны функциями температуры и влажности

$$k_1 = k_2 exp(-0.23W_2),$$

$$k_2 = 1.4 \cdot 10^{-7} exp(0.172W)(1 + 0.04T).$$

Количество незамерзшей воды определяется следующим образом [8, 19]

$$W_1(T) = \begin{cases} 0.04 + 0.017T, & -0.75 \leqslant T \leqslant 0, \\ 0.027 + 0.0244\left(\dfrac{1}{1 - 0.482(T + 0.75)} - 1\right), & T \leqslant -0.75. \end{cases}$$

В результате численных расчетов получены распределения температуры и влажностей в разные моменты времени. На рис.1 представлено распределение температуры в разное время (при t=3 ч, t=6 ч, t=9 ч, t=12 ч). А на рис. 2 и 3 показаны распределения количества незамерзшей воды $W_1(T)$ и льдосодержания $W_2(T)$. Из полученных результатов следует, что разработанный алгоритм дает достаточно точный прогноз динамики температурного и влажностного полей.

Заключение

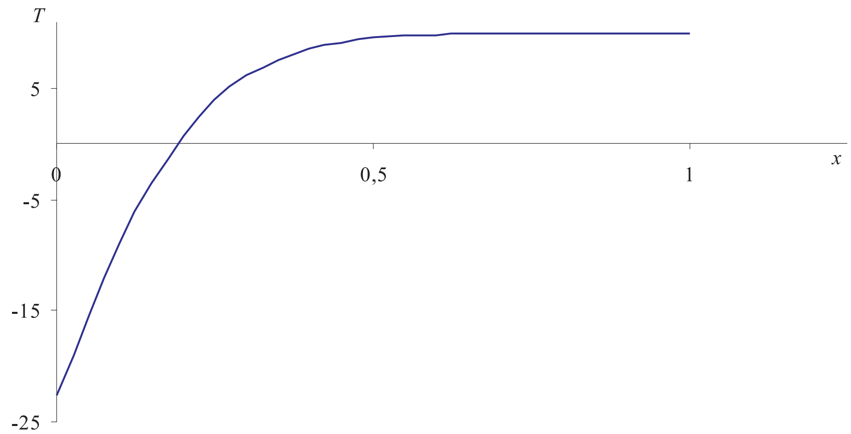
Разработан алгоритм решения задачи тепломассопереноса при промерзании грунтов и ее численная реализация на примере песчаных грунтов, а также исследована сходимость построенной итерационной схемы. Численные расчеты показали, что при достаточно малых τ итерационно-разностная схема сходится.

Литература

[1] Данилюк, И.И. О задаче Стефана / И.И. Данилюк // УМН. – 1985. – В. 5(245). – С. 132–185.

[2] Мейрманов, А.М. Задача Стефана / А.М. Мейрманов. -– Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.

[3] Рубинштейн, Л.И. Проблема Стефана / Л.И. Рубинштейн. -– Рига: Звайгзне, 1967.



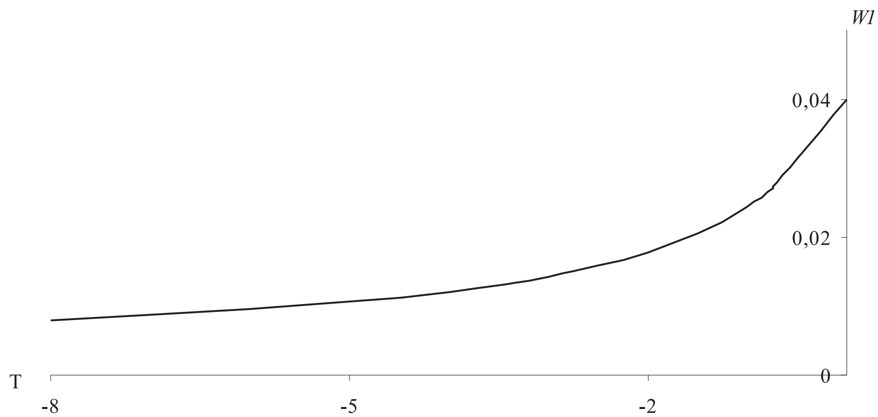


Рис. 3. Распределение количества незамерзшей воды $W_1(T)$

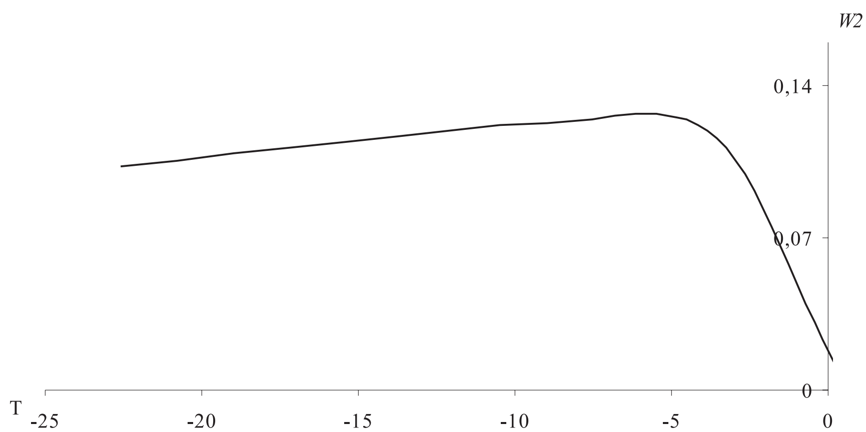


Рис. 4. Распределение льда $W_2(T)$ при $T_c = -30°\mathrm{C}$

[4] Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

[5] Колесников, А.Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта / А.Г. Колесников // ДАН СССР. – 1952. – Т. LXXXII. – №6. – С. 889–891.

[6] Нерсесова, З.А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры / З.А. Нерсесова // ДАН СССР. – 1950. – Т. LXXV. – №6. – С. 845–846.

[7] Цытович, Н.А. Механика мерзлых грунтов. – М.: Высшая школа, 1973. – 446 с.

[8] Иванов, Н.С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах / Н.С. Иванов. – М.: Наука, 1969.

[9] Меламед В.Г. Тепло- и массообмен в горных породах при фазовых переходах / В.Г. Меламед. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

[10] Лыков, А.В. Явление переноса в капиллярно-пористых телах / А.В. Лыков. – М.: Гостехиздат, 1954.

[11] Тепломассоперенос в процессе растепления вечномерзлых пород, окружающих эксплутационную скважину / В.И. Антипов [и др.] // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1979. – №7. – С. 47–51.

[12] Ясин, Ю.Д. Гистерезис фазовых превращений влаги в ячеистом бетоне / Ю.Д. Ясин // Долговечность конструкций из автоклавных бетонов: тез. локл. V республ. конф. – Таллин, 1984. – Ч. 1. – С. 205–209.

[13] Taylor, G.S. A model for coupled heat moisture transfer during soil freezing / G.S. Taylor, J.N. Luthin // Canadian Geotechnical journal. – 1978. – V. 15. – №4. – P. 548–555.

[14] Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1973.

[15] Коновалов, А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А.Н. Коновалов. – Новосибирск: Наука, 1988.

[16] Самарский, А.А. Теория разностных схем: Учебное пособие / А.А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит. 1983.

[17] Гарагуля, Л.С. Основы мерзлотного прогноза при инженерно-геологических исследованиях / Л.С. Гарагуля. – М.: Изд-во Моск-го ун-та, 1974. – 432 с.

[18] Иванов, Н.С. Теплофизические свойства мерзлых горных пород / Н.С. Иванов. – М.: Наука, 1965.

[19] Степанов, А.В. Теплофизические свойства дисперсных материалов / А.В. Степанов, А.М. Тимофеев. – Якутск: ЯНЦ СО РАН, 1994.

Поступила в редакцию 24/V/2007;
в окончательном варианте — 24/V/2007.

ITERATIVE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR THE PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER IN FREEZING GROUNDS

© 2007 A.R. Pavlov, M.V. Matveeva[2]

The numerical solution of the freezing grounds problem is considered. The implicit finite-difference scheme is constructed. The iterative scheme is defined. Convergence of the used finite-difference scheme is proved.

Paper received 24/ V/2007.
Paper accepted 24/ V/2007.

[2]Pavlov Alexsey Romanovich, Matveeva Maya Vasilievna (m-mayza@mail.ru), Institute of Mathematics and Informatics, Yakut State University n.a. M.K. Ammosov, 677011, Yakutsk, Russia.