

УДК 510.8

К ВОПРОСУ СОХРАНЕНИЯ СВОЙСТВ МНОГООСНОВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2007 Н.В. Нагул¹

В работе предлагается алгоритм синтеза условий сохранения свойств многоосновных алгебраических систем. Критерии, порождаемые алгоритмом, в частности, требуют, чтобы связывающие системы отображения носили характер морфизмов. Даются примеры использования алгоритма в анализе свойств автоматных сетей и общей динамической системы В.В. Немыцкого.

Введение

В классической теории моделей большое значение имеют теоремы о сохранении свойств, связывающие семантические и синтаксические свойства формул. Типичное утверждение гласит: формула исчисления предикатов первого порядка $\mathcal{F}$ сохраняется относительно определенного отношения между структурами тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ эквивалентна формуле определенной синтаксической формы. Как известно, помимо прочих существуют три классические теоремы о сохранении свойств: теорема Лося–Тарского, говорящая о сохранении свойств экзистенциальных формул при расширениях, теорема Линдона, связывающая монотонность формулы с ее позитивностью, и, наконец, теорема Лося–Тарского–Линдона о сохранении свойств экзистенциальных позитивных формул при гомоморфизмах (см., например, [10]).

Известен подход к проблеме сохранения свойств разнообразных систем, использующий многоосновные алгебраические системы (МАС). С.Н. Васильевым в [12] предложен так называемый *метод представимости*, позволяющий редуцировать исходную задачу к некоторой более простой по замыслу вспомогательной задаче при условии представимости определения изучаемого свойства в некотором специальном языке многоосновных алгебраических систем, к которым должны быть предварительно сведены рассматриваемые системы. Например, общую динамическую систему В.В. Немыцкого оказалось несложным записать в виде двухосновной алгебраической системы. При этом переносимость динамических свойств (например, типа устойчивости и инвариантности) обеспечивалась в терминах морфизмов. В отличие от работ [9, 6], в этой работе предикаты и функции МАС $\mathfrak{A}$ определялись на некоторых произвольных ступенях над основными множествами $\mathfrak{A}$.

Настоящая работа является развитием аппарата, представленного в [5] для формирования условий сохранения свойств одноосновных алгебраических систем,

¹Нагул Надежда Владимировна (sapling@icc.ru), Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

где задача синтеза теорем о сохранении свойств систем была представлена как задача отыскания решений подходящих логических уравнений. Этот подход в дальнейшем стал основой для развития *метода редукции* [3]. Нами предлагается алгоритм построения условий сохранения свойств многоосновных алгебраических систем, действие которого будет продемонстрировано на примерах свойств как обшей динамической системы и автоматных сетей, предварительно представленных в виде МАС.

Заметим, что МАС представляют значительный интерес в связи со все возрастающим их практическим применением. Одной из важных областей применения выступает программирование. При алгебраическом подходе к спецификации языков программирования язык рассматривается как алгебра, а предложение, программа или выражение в языке — как объект в его алгебре. МАС также используются для описания так называемых абстрактных типов данных, на которых основана объектно-ориентированная парадигма программирования. Известно об использовании многоосновных алгебраических систем в связи с криптографическими приложениями. Так, в [1] основной элемент системы выработки общего ключа в системах открытого шифрования представляется пятиосновной алгебраической системой. В [8] отмечается, что в последнее время модель многоосновной универсальной алгебры становится все более популярной также и при решении ряда прикладных задач в области исследования математических моделей электронных устройств обработки информации. Такая модель наиболее естественна в исследованиях программных алгоритмов, предназначенных для реализации на различных ЭВМ.

1. Понятие многоосновной алгебраической системы

Пусть $A = \{A_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$ — конечное семейство множеств A_λ . Теоретико-множественные операции образования декартова произведения и булеана порождают множества, называемые ступенями (над семейством A). Точнее [2],

- 1) любое множество A_λ есть ступень;
- 2) если множества M_1 и M_2 — ступени, то каждое из множеств $M_1 \times M_2$ и 2^{M_1} есть ступень;
- 3) множество является ступенью только в том случае, когда это следует из правил 1 и 2.

Для строгой формализации языка, предназначенного для работы с многоосновными алгебраическими системами, введем дополнительный "язык ступеней". В качестве букв языка выступают специальные символы $S^1, S^2, \dots, S(\sqcup, \sqcup), S(\sqcup)$, соответствующие операциям построения ступеней. Так, пусть всякая функциональная буква S^λ интерпретируется как операция выделения базисного множества A_λ из семейства A . Буквы $S(\sqcup, \sqcup)$ и $S(\sqcup)$ соответствуют операциям образования декартова произведения и булеана соответственно. Словами языка ступеней назовем выражения $S^\lambda, S(S_i, S_j), S(S_i)$, где S_i, S_j — слова. Если дана последовательность $S_1, S_2, \dots, S_m$ слов языка ступеней, такая, что для каждого $i = \overline{1, m-1}$ S_{i+1} является либо словом S^λ , либо образовано некоторыми из слов $S_1, S_2, \dots, S_i$, то S_m называется *схемой образования ступени*. Результатом применения схемы образования ступени к некоторому семейству множеств A является ступень над этим семейством, т.е. некоторое множество, образованное из множеств $A_\lambda, \lambda = \overline{1, k}$. Через $S[A]$ будем обозначать ступень над A , построенную по схеме S .

Многоосновной алгебраической системой (МАС) называется объект [12] $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, состоящий из семейства основных (или базисных) множеств $A = \{A_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$, множества функций $\Omega_F = \{F_\beta | F_\beta : S_{1\beta}[A] \rightarrow S_{2\beta}[A], \beta = \overline{1, k_F}\}$, множества отношений $\Omega_P = \{P_\gamma | P_\gamma \subseteq T_\gamma[A], \gamma = \overline{1, k_P}\}$ и множества выделенных элементов $\Omega_E = \{E_\delta | E_\delta \in U_\delta[A], \delta = \overline{1, k_E}\}$.

Пусть даны отображения $\psi_1 : B_1 \rightarrow B_1'$ и $\psi_2 : B_2 \rightarrow B_2'$. Их каноническим распространением на декартово произведение называется [2] отображение $\psi_1 * \psi_2 : B_1 \times B_2 \rightarrow B_1' \times B_2'$, определяемое условием

$$\psi_1 * \psi_2(b_1, b_2) = \langle \psi_1(b_1), \psi_2(b_2) \rangle \quad (\forall b_1 \in B_1, \forall b_2 \in B_2).$$

Каноническим распространением отображения ψ_1 на булеан называется [2] отображение $\hat{\psi}_1 : 2^{B_1} \rightarrow 2^{B_1'}$, такое, что

$$\hat{\psi}_1(B) = \{b' \in B_1' | \exists b \in B : \psi_1(b) = b'\} \quad (\forall B \subseteq B_1).$$

Пусть $A' = \{A'_\lambda | \lambda = \overline{1, k}\}$. Согласно определению, для всякой ступени $M[A]$ через $M[A']$ обозначается ступень над A' , образованная из множеств A'_λ по той же схеме M , что и $M[A]$ из A_λ . Введем семейство отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$. Семейству φ однозначно соответствует отображение ступеней $\langle \varphi \rangle^{M[A]} : M[A] \rightarrow M[A']$, индуктивно определяемое следующим образом:

- 1) если $M[A] = A_\lambda$, то $\langle \varphi \rangle^{M[A]} = \varphi_\lambda$;
- 2) если $M[A] = M_1[A] \times M_2[A]$, то $\langle \varphi \rangle^{M[A]} = \langle \varphi \rangle^{M_1[A]} * \langle \varphi \rangle^{M_2[A]}$;
- 3) если $M[A] = 2^{M_1[A]}$, то $\langle \varphi \rangle^{M[A]} = \widehat{\langle \varphi \rangle^{M_1[A]}}$.

Для исследования устойчивости свойств многоосновных алгебраических систем будем использовать расширенный язык исчисления предикатов первого порядка. Для обозначения произвольных объектов в этом языке будем использовать индивидуальные переменные $z_1, z_2, \dots$, а для построения новых объектов — функциональные символы $F_1^1, F_1^2, \dots, F_\beta^n, \dots$. Предикатные символы $P_1^0, P_1^1, \dots, P_\gamma^n, \dots$ будут обозначать те или иные отношения на объектах. Дополнительный предикатный символ "—" обозначает отношение равенства. Верхний индекс в F_β^n, P_γ^n указывает на арность, т.е. число связываемых далее с этим символом аргументов ("—" — бинарный символ), а нижний индекс позволяет различать символы одной арности. Нульарные предикаты P_1^0, P_2^0 интерпретируются как тождественно истинный и тождественно ложный предикаты. Будем обозначать их P_t и P_f соответственно. Для нульарных функций (выделенных элементов) введем символы $E_1^0, E_2^0, E_3^0, \dots, E_\delta^0, \dots$. Также будут использоваться логические связки ($\neg, \rightarrow, \&$ и др.), которым придается обычный смысл, и вспомогательные символы (скобки, запятые).

Зафиксируем МАС $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$ и выделим в указанном алфавите некоторое множество σ_F функциональных символов F_β^n , каждый из которых для фиксированной МАС будет интерпретироваться как некоторая n -арная функция F_β из Ω_F , множество σ_P предикатных символов P_γ^n , интерпретируемых как n -арные отношения P_γ из Ω_P , и множество σ_E , каждый элемент которого интерпретируется как выделенный элемент E_δ из Ω_E . Множество $\sigma = \sigma_P \cup \sigma_F \cup \sigma_E$ называется сигнатурой. Отметим, что "—" не входит в σ . Каждой индивидуальной переменной z_i в качестве множества ее допустимых значений поставим в соответствие ступень $S_i[A]$, образованную из множеств A_λ по схеме S_i .

Определим множество правильно построенных выражений, обозначающих объекты и называемых *термами*; одновременно для термов введем понятие *сорта*:

- 1) всякая индивидуальная переменная z_i есть терм; сортом этого терма будем называть множество значений $S_i[A]$ переменной z_i , что будем обозначать $|z_i| = S_i[A]$;

- 2) всякий символ E_δ^0 выделенного элемента есть терм, $|E_\delta^0| = U_\delta[A]$;
- 3) если t_1, t_2 — термы сортов $|t_1|, |t_2|$ соответственно, то $\langle t_1, t_2 \rangle$ является термом сорта $|t_1| \times |t_2|$;
- 4) если t_1, t_2 — термы сортов $2^{M_1[A]}, 2^{M_2[A]}$ соответственно, то $t_1 \times t_2$ является термом сорта $2^{M_1[A] \times M_2[A]}$, а терм 2^{t_1} — термом сорта $2^{2^{M_1[A]}}$;
- 5) если t — терм сорта $S_{1\beta}[A]$, то выражение $F_\beta^n(t)$ является термом сорта $S_{2\beta}[A](\beta = \overline{1, k_F})$;
- 6) выражение является термом только в том случае, когда это следует из правил 1–5.

Определим также специальные выражения, называемые *типовыми кванторами* (ТК): $\hat{\omega}_\alpha = \forall z_\alpha : Z_\alpha = \forall z_\alpha (Z_\alpha \rightarrow \sqcup)$ (типовый квантор всеобщности), $\hat{\omega}_\alpha = \exists z_\alpha : Z_\alpha = \exists z_\alpha (Z_\alpha \& \sqcup)$ (типовый квантор существования).

Для обозначения утверждений об объектах определим правильно построенные выражения, называемые *формулами*:

- 1) если t_1, t_2 — термы и $|t_1| = |t_2|$, то выражение $t_1 = t_2$ является формулой;
- 2) если $t_1, \dots, t_n$ — термы, $|t_1| = M_1[A], \dots, |t_n| = M_n[A]$ и P_γ^n обозначает отношение, определенное на ступени $M_1[A] \times \dots \times M_n[A]$, то $P_\gamma^n(t_1, \dots, t_n)$ — формула (называемая также *атомарной*);
- 3) если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — формулы, то выражения $\neg(\mathfrak{F}_1), (\mathfrak{F}_1 \& \mathfrak{F}_2), (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2), (\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2)$ являются формулами;
- 4) если $\mathfrak{F}$ и Z_α — формулы, то выражения $\hat{\omega}_\alpha \mathfrak{F} = \forall z_\alpha (Z_\alpha \rightarrow \mathfrak{F}), \hat{\omega}_\alpha \mathfrak{F} = \exists z_\alpha (Z_\alpha \& \mathfrak{F})$ — формулы;
- 5) выражение является формулой только в том случае, когда это следует из правил 1–4.

Через $\mathcal{L}$ обозначим язык термов и формул, построенных в соответствии с указанными правилами и содержащих лишь элементы σ в качестве функциональных и предикатных символов. Язык $\mathcal{L}$ является языком первого порядка; он имеет сигнатуру σ , расширенную внесигнатурным символом "=", а также символами $\sqcup * \sqcup, \sqcap$, отвечающими правилам построения отображений ступеней. Исчисление предикатов с равенством, построенное на базе σ , обозначим $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

2. Алгоритм синтеза критериев сохранения свойств МАС

Пусть $\mathcal{F}(\bar{x}) = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_p)$ — произвольная формула сигнатуры $\sigma = \sigma_P \cup \sigma_F \cup \sigma_E$ в языке $\mathcal{L}$, x_μ — все ее свободные переменные, $\mu = \overline{1, p}$, $p \geq 0$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathcal{F}$ является формулой, образованной из литер (заключительных формул) $\mathcal{F}^v$, т.е. из атомарных формул $\mathcal{F}_+^v$ или их отрицаний $\mathcal{F}_-^v$, с помощью связок $\&, \vee$ и типовых кванторов $\hat{\omega}_\alpha, \hat{\omega}_\alpha, \alpha = \overline{1, n}, v = \overline{1, N}$. Такие формулы назовем *обобщенными позитивными формулами*. Для подформул B , возникших в процессе образования $\mathcal{F}$ из своих заключительных формул, будем использовать запись $B \sqsubseteq \mathcal{F}$. Число N называется *степенью формулы*.

Поскольку в дальнейшем будут использоваться только ТК, то для краткости будем называть их просто кванторами. Не ограничительно считать, что все их кванторные переменные z_α попарно различны. Не теряя общности, будем также считать, что свободные переменные x_μ формулы $\mathcal{F}$ тоже попарно различны и отличны от z_α . Кроме того, пусть в $\mathcal{F}$ не содержится несущественных кванторов,

т.е. таких, в области действия которых отсутствует переменная квантора. Помимо этого, любую формулу $\mathcal{F}$ всякий раз по возможности будем приводить к "предваренному" виду, т.е. такому, когда все ТК вынесены вперед.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ — однотипные МАС сигнатуры σ с семействами основных множеств $A = \{A_\lambda \mid \lambda = \overline{1, k}\}$ и $A' = \{A'_\lambda \mid \lambda = \overline{1, k}\}$ соответственно. Однотипность понимается в том смысле, что мощности множеств A и A' , Ω_F и Ω'_F и т.д. соответственно совпадают, а ступень $S'_{1\beta}[A']$ (соотв. $S'_{2\beta}[A'], T'_\gamma[A'], U'_\delta[A']$) образована из множеств A'_λ по той же схеме, что и $S_{1\beta}[A]$ (соотв. $S_{2\beta}[A], T_\gamma[A], U_\delta[A]$) из множеств A_λ . Наша цель — найти способ синтеза условий R устойчивости относительно отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda \mid \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$ p -арного предиката $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$, определяемого на системе $\mathfrak{A}$ формулой $\mathcal{F}(\bar{x})$. Иначе говоря, требуется алгоритмизировать получение нетривиальных условий R , при которых из выполнимости для системы $\mathfrak{A}$ формулы $\mathcal{F}$ на каких-либо элементах $x_1, \dots, x_p$ вытекает выполнимость $\mathcal{F}$ для $\mathfrak{A}'$ на элементах $\langle \varphi \rangle^{|\mathbf{x}_1|}(x_1), \dots, \langle \varphi \rangle^{|\mathbf{x}_p|}(x_p)$ соответственно.

Удобно искать R тоже как формулу языка первого порядка. Для этого дополним сигнатуру σ множеством символов $\sigma' = \sigma'_P \cup \sigma'_F \cup \sigma'_E$ ($\sigma' \cap \sigma = \emptyset$), дублирующим в новых обозначениях сигнатуру σ . Введем формулу $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(P'/P, F'/F, E'/E, x'_\mu/x_\mu, z'_\alpha/z_\alpha)$ сигнатуры σ' , где замена символов на соответствующие новые $P' \in \sigma'_P, F' \in \sigma'_F, E' \in \sigma'_E, \dots$ выполняется для каждого $P \in \sigma_P, F \in \sigma_F, E \in \sigma_E, \dots, \mu = \overline{1, p}, \alpha = \overline{1, n}$. Предполагается, что новые переменные x'_μ, z'_α попарно различны и не совпадают с переменными из $\mathcal{F}$.

Пусть f_λ — новые функциональные символы, для каждого $\lambda, \lambda = \overline{1, k}$, всегда далее интерпретируемые на множестве однозначных и всюду определенных на основном множестве A_λ функций $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda$.

Обозначим $\sigma^* = \sigma \cup \sigma' \cup \{f_\lambda\}$. Пусть язык $\mathcal{L}^*$ и исчисление предикатов с равенством $\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}$ построены на базе σ^* , как $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ на базе σ .

Условия R будем строить в сигнатуре σ^* , обеспечивая выводимость $\vdash_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}} R \rightarrow \mathcal{F}^*$,

где $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}(\bar{x}) \rightarrow \mathcal{F}'(\overline{f(x)}), \mathcal{F}'(\overline{f(x)}) = \mathcal{F}'(f^{|\mathbf{x}_1|}(x_1)/x'_1, \dots, f^{|\mathbf{x}_p|}(x_p)/x'_p)$.

Если $\sigma_F \neq \emptyset$, то сначала преобразуем формулу $\mathcal{F}$ в формулу Ψ так, чтобы ее заключительные формулы Ψ^v не содержали вхождений символов из σ_F . Полученная формула будет иметь структуру, удобную для построения условий переносимости свойств, поскольку функциональные и предикатные символы не будут одновременно фигурировать ни в одной заключительной формуле.

Преобразование определим следующим образом: сначала в $\mathcal{F}^v, v = \overline{1, N}$, отыскивается терм t_1 с одним функциональным символом (такой найдется в силу определения формулы), т.е. терм вида $F_1(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n_1}})$, где $F_1 \in \sigma_F, u_{i_i}$ — переменные x_μ или $z_\alpha, i = \overline{1, n_1}, n_1 \geq 0$.

Из числа переменных z_α , входящих в t_1 , если таковые найдутся, выделим переменную u_{α_1} , у которой квантор $\tilde{\omega}_{\alpha_1}$ имеет наименьшую область действия $\mathcal{D}_1$, и полагаем

$$\Phi_1 = \begin{cases} \mathcal{F}(\tilde{\omega}_{\alpha_1} \forall y_1 (y_1 = t_1 \rightarrow \mathcal{D}_1(y_1/t_1)) / \tilde{\omega}_{\alpha_1} \mathcal{D}_1), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha_1} = \tilde{\omega}_{\alpha_1}; \\ \mathcal{F}(\tilde{\omega}_{\alpha_1} \exists y_1 (y_1 = t_1 \& \mathcal{D}_1(y_1/t_1)) / \tilde{\omega}_{\alpha_1} \mathcal{D}_1), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha_1} = \tilde{\omega}_{\alpha_1}. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{D}_1(y_1/t_1)$ — результат замены в $\mathcal{D}_1$ всех вхождений терма t_1 на ранее нигде не встречавшуюся в $\mathcal{F}$ переменную y_1 .

Если же среди переменных u_{i_i} отсутствуют переменные z_α , то

$$\Phi_1 = \exists y_1 (y_1 = t_1 \& \mathcal{F}(y_1/t_1)).$$

Те выражения, в которые переходят литеры $\mathcal{F}^v$ в процессе последовательного

преобразования формулы $\mathcal{F}$, называем следами этих литер (в отличие от добавляемых литер, например, $y_1 = t_1$).

Рассматриваем Φ_1 . Если в следах литер $\mathcal{F}^v$ еще присутствуют символы $F \in \sigma_F$, то отыскивается терм t_2 вида $F_2(u_{2_1}, u_{2_2}, \dots, u_{2_{n_2}})$, где $F_2 \in \sigma_F$, u_{2_i} — переменные x_μ или z_α , $i = \overline{1, n_2}$, $n_2 \geq 0$. Из числа переменных z_α , входящих в t_2 , если таковые найдутся, вновь выделим переменную u_{α_2} , у которой квантор $\tilde{\omega}_{\alpha_2}$ имеет наименьшую область действия $\mathcal{D}_2$, и полагаем

$$\Phi_2 = \begin{cases} \Phi_1(\tilde{\omega}_{\alpha_2} \forall y_2 (y_2 = t_2 \rightarrow \mathcal{D}_2(y_2/t_2)) / \tilde{\omega}_{\alpha_2} \mathcal{D}_2), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha_2} = \hat{\omega}_{\alpha_2}; \\ \Phi_1(\tilde{\omega}_{\alpha_2} \exists y_2 (y_2 = t_2 \& \mathcal{D}_2(y_2/t_2)) / \tilde{\omega}_{\alpha_2} \mathcal{D}_2), & \text{если } \tilde{\omega}_{\alpha_2} = \check{\omega}_{\alpha_2}. \end{cases}$$

где y_2 — новая переменная.

Продолжая этот процесс, если надо, приходим к формуле $\Psi(\bar{x}) = \Psi(x_1, \dots, x_p)$, уже не содержащей символов $F \in \sigma_F$ в следах литер $\mathcal{F}^v$, $v = \overline{1, N}$. Если же изначально $\sigma_F = \emptyset$, то считаем $\mathcal{F} = \Psi$.

Пусть y_{ε^*} — последняя из введенных переменных y_ε , т.е. $\varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*}$. Через $\hat{y}_\varepsilon$ (соответственно $\check{y}_\varepsilon$) обозначаем кванторы $\forall y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon \rightarrow \sqcup)$ (соответственно $\exists y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon \& \sqcup)$).

Введем также обозначения

$$E = \&\{\hat{\omega}_{\varepsilon_1} \dots \hat{\omega}_{\varepsilon_{m(\varepsilon)}} \forall y_{\varepsilon_1} \dots \forall y_{\varepsilon_{m(\varepsilon)}} \exists y_\varepsilon (y_\varepsilon = t_\varepsilon) : \varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*} \& \check{y}_\varepsilon \in \Psi\},$$

$$E' = \&\{\hat{\omega}'_{\varepsilon_1} \dots \hat{\omega}'_{\varepsilon_{m(\varepsilon)}} \forall y'_{\varepsilon_1} \dots \forall y'_{\varepsilon_{m(\varepsilon)}} \exists y'_\varepsilon (y'_\varepsilon = t'_\varepsilon) : \varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*} \& \hat{y}'_\varepsilon \in \Psi'\},$$

где

$$\Psi'(\bar{x}') = \Psi'(x'_1, \dots, x'_p) = \Psi(P'/P, F'/F, E'/E, z'_\alpha/z_\alpha, x'_\mu/x_\mu, y'_\varepsilon/y_\varepsilon),$$

через t'_ε обозначено выражение $t_\varepsilon(F'_\varepsilon/F_\varepsilon, z'_\alpha/z_\alpha, y'_\tau/y_\tau, f^{|x_\mu|}(x_\mu)/x_\mu)$ (подстановки по всем $\alpha = \overline{1, n}$, $\tau = \overline{1, \varepsilon^*}$, $\tau \neq \varepsilon$, $\mu = \overline{1, p}$), и для любого $\varepsilon = \overline{1, \varepsilon^*}$ универсальными типовыми кванторами ($m(\varepsilon)$ — их количество для данного ε) представлены все кванторы $\tilde{\omega}_\alpha$ (соотв. $\tilde{\omega}'_\alpha$), а обычными универсальными кванторами (в количестве $n(\varepsilon)$ для данного ε) связаны все переменные y_α (соотв. y'_α), входящие в терм t_ε (соотв. t'_ε). Пусть также

$$\Psi'(\overline{f(x)}) = \Psi'(f^{|x_1|}(x_1)/x'_1, \dots, f^{|x_p|}(x_p)/x'_p).$$

Лемма 1. В исчислении предикатов первого порядка с равенством $\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}$ формулы E, E' влекут импликацию $(\Psi(\bar{x}) \rightarrow \Psi'(\overline{f(x)})) \rightarrow \mathcal{F}^*$, т.е. $E, E' \vdash_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}} (\Psi(\bar{x}) \rightarrow \Psi'(\overline{f(x)})) \rightarrow \mathcal{F}^*$.

Доказательство. Нетрудно показать, что

$$E \vdash_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}} \mathcal{F} \rightarrow \Psi, E' \vdash_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}} \Psi'(\overline{f(x)}) \rightarrow \mathcal{F}'(\overline{f(x)}),$$

и поэтому справедливо требуемое утверждение.

Поскольку в дальнейшем не будут рассматриваться никакие иные теории, кроме $\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}$, тот факт, что $A \vdash_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}} B$, будем записывать просто $A \vdash B$.

Условимся о следующих обозначениях. Через Ψ^v обозначается след литеры $\mathcal{F}^v$ в Ψ , $v = \overline{1, N}$, а через $\check{v}$ (соответственно $\hat{v}$) — типовый квантор $\check{y}_\alpha$ (соответственно $\hat{y}_\alpha$), если v — переменная z_α . Если же v — переменная y_ε , то под $\check{v}$ (соотв. $\hat{v}$) понимается квантор $\check{y}_\varepsilon$ (соотв. $\hat{y}_\varepsilon$). Аналогично используются обозначения Ψ^v_+ , Ψ^v_- , а также $\check{v}'$, $\hat{v}'$ для кванторов по переменным v' формулы $\Psi'(\bar{x}')$.

Пусть также $V_j \triangleq (f^{|v_j|}(v_j) = v'_j)$, $j = \overline{1, n^*}$ (очевидно, что $n^* = n + \varepsilon^*$, т.е. сумма числа переменных, связанных кванторами в исходной формуле, и числа вновь

введенных переменных),

$$(\check{v}_j : V_j) = \begin{cases} \exists v_j(Z_\alpha \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } z_\alpha; \\ \exists y_\varepsilon(y_\varepsilon = t_\varepsilon \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } y_\varepsilon. \end{cases}$$

Аналогично понимаются выражения $(\check{v}'_j : V_j)$. Через Ξ_+^v (соответственно Ξ_-^v) обозначается импликация $\Psi_+^v \rightarrow (\Psi')_+^v$ (соответственно $(\Psi')_+^v \rightarrow \Psi_+^v$), где $(\Psi')_+^v$ — литера из Ψ' , отвечающая лите Ψ_+^v из Ψ .

Введем преобразование формулы Ψ в формулу R_1 :

1) рассматриваем максимальные цепочки одноименных соседних кванторов, т.е. максимальные цепочки $\hat{v}_1 \dots \hat{v}_m$ или $\check{v}_1 \dots \check{v}_m$ соседних кванторов, не разделенные в структуре формулы Ψ кванторами $\exists$ и $\forall$ соответственно, а также логическими связками $\&$, $\vee$; все эти цепочки заменим на цепочки соответственно

$$\hat{v}'_1 \dots \hat{v}'_m(\check{v}_1 : V_1) \dots (\check{v}_m : V_m), \hat{v}_1 \dots \hat{v}_m(\check{v}'_1 : V_1) \dots (\check{v}'_m : V_m);$$

2) все связки $\vee$ заменим на $\&$;

3) все литеры Ψ_+^v , $v = \overline{1, N}$ заменим на формулы Ξ_+^v , а все литеры Ψ_-^v — на формулы Ξ_-^v ;

4) после выполнения преобразований из п.п. 1–3 все переменные x'_μ заменим на $f^{|\mathbf{x}_\mu|}(x_\mu)$, и результат принимается в качестве R_1 .

Лемма 2. В исчислении предикатов первого порядка с равенством $\mathcal{T}_{\mathcal{L}^*}$ формулы E, E' влекут импликацию $R_1 \rightarrow \mathcal{F}^*$, т.е. $E, E' \vdash R_1 \rightarrow \mathcal{F}^*$.

Доказательство. Прежде всего, докажем, что

$$\vdash R_1 \rightarrow (\Psi(\bar{x}) \rightarrow \Psi'(\overline{f(x)})). \quad (3.1)$$

Доказательство проведем индукцией по длине формулы R_1 . Согласно построению R_1 , каждой главной подформуле $R_1^* \sqsubseteq R_1$ в формулах Ψ , Ψ' однозначно отвечают некоторые главные подформулы Ψ^* , $(\Psi')^*$. Обозначая через M (параметр индукции) количество ТК и логических связок в R_1 , будем считать, что существует $M^* \geq 0$ такое, что для всех $M \leq M^*$ теорема справедлива:

$$\vdash R_1^* \rightarrow (\Psi(\bar{x})^* \rightarrow (\Psi'(\overline{f(x)}))^*). \quad (3.2)$$

Покажем, что в качестве M^* выступает, например, 0 . Действительно, случай $M^* = 0$ отвечает ситуации, когда для некоторого $v = \overline{1, N}$ $R_1 = \Xi_+^v$ или $R_1 = \Xi_-^v$. Тогда формуле R_1 отвечают формулы $\Psi_+^v, (\Psi')_+^v$ в первом случае и $\Psi_-^v, (\Psi')_-^v$ — во втором, причем $\Psi_-^v = \neg \Psi_+^v$, $(\Psi')_-^v = \neg (\Psi')_+^v$. Справедливость утверждений

$$\vdash (\Psi_+^v \rightarrow (\Psi')_+^v) \rightarrow (\Psi_+^v \rightarrow (\Psi')_+^v),$$

$$\vdash ((\Psi')_+^v \rightarrow \Psi_+^v) \rightarrow (\neg \Psi_+^v \rightarrow \neg (\Psi')_+^v)$$

очевидна.

Индуктивный переход от R_1^* к надформуле $\tilde{R}_1$ с $M = \tilde{M} = M^* + 1$ состоит из рассмотрения двух случаев. Через $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}'$ обозначим главные подформулы, отвечающие в Ψ , Ψ' формуле $\tilde{R}_1$.

Случай 1. Главная подформула $\tilde{R}_1$ получается из формул R_1^* и R_1^{**} путем соединения их с помощью логической связки $\&$ (других логических связок в формуле R_1 нет по определению), причем для каждой из них теорема справедлива:

$$\vdash R_1^* \rightarrow (\Psi(\bar{x})^* \rightarrow (\Psi'(\overline{f(x)}))^*), \quad (3.3)$$

$$\vdash R_1^{**} \rightarrow (\Psi(\bar{x})^{**} \rightarrow (\Psi'(\overline{f(x)}))^{**}). \quad (3.4)$$

Требуется доказать, что

$$\vdash R_1^* \& R_1^{**} \rightarrow (\Psi(\bar{x})^* L \Psi(\bar{x}))^{**} \rightarrow (\Psi'(f(\bar{x}))^* L(\Psi'(f(\bar{x})))^{**}),$$

где L принимает одно из значений $\vee$ или $\&$. Учитывая условия (3.3), (3.4), это не представляет никаких затруднений.

Случай 2. Формула $\tilde{R}_1$ образована из R_1^* путем присоединения квантора v_j , представляющего собой либо квантор по переменной y_e , либо квантор по переменной z_α . Здесь возможны четыре случая:

Случай 2.1. $\tilde{R}_1 = \hat{v}_j R_1^*$. Тогда подформуле $\tilde{R}_1$ в силу построения R_1 отвечает подформула $\check{v}_j \Psi(\bar{x})^* \sqsubseteq \Psi(\bar{x})$. При этом $\tilde{\Psi}'(f(\bar{x})) = (\Psi'(f(\bar{x})))^*$. Требуется доказать, что

$$\vdash \hat{v}_j R_1^* \rightarrow (\check{v}_j \Psi(\bar{x})^* \rightarrow (\Psi'(f(\bar{x})))^*)$$

при индуктивном предположении (3.2). Заметим, что формула $(\Psi'(f(\bar{x})))^*$ не зависит от переменной v_j . Доказательство очевидно.

Случай 2.2. $\tilde{R}_1 = \hat{v}'_j R_1^*$. Тогда подформуле $\tilde{R}_1$ отвечает подформула $\hat{v}'_j (\Psi'(f(\bar{x})))^* \sqsubseteq \Psi'(f(\bar{x}))$, а $\tilde{\Psi}(\bar{x}) = \Psi(\bar{x})^*$. Очевидна справедливость

$$\vdash \hat{v}'_j R_1^* \rightarrow (\Psi(\bar{x})^* \rightarrow \hat{v}'_j (\Psi'(f(\bar{x})))^*),$$

где $\Psi(\bar{x})^*$ не зависит от переменной v_j .

Случай 2.3. $\tilde{R}_1 = (\check{v}_j : V_j) R_1^*$. Подформуле $\tilde{R}_1$ соответствует подформула $\hat{v}_j \Psi(\bar{x})^* \sqsubseteq \Psi(\bar{x})$, $\tilde{\Psi}'(f(\bar{x})) = (\Psi'(f(\bar{x})))^*$. Требуется доказать, что

$$\vdash (\check{v}_j : V_j) R_1^* \rightarrow (\hat{v}_j \Psi(\bar{x})^* \rightarrow (\Psi'(f(\bar{x})))^*)$$

при условии (3.2). Пусть a — такое значение переменной v_j , что выполнены условия V_j и R_1^* . Тогда по индуктивному предположению для a справедливо $(\Psi(\bar{x})^* \rightarrow (\Psi'(f(\bar{x})))^*)$. Используя импликацию $\check{w}_\alpha(\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2) \rightarrow (\hat{w}_\alpha \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_2$ не зависит от z_α , получаем требуемое.

Случай 2.4. $\tilde{R}_1 = (\check{v}'_j : V_j) R_1^*$. Тогда подформуле $\tilde{R}_1$ в силу ее построения отвечает подформула $\check{v}'_j (\Psi'(f(\bar{x})))^* \sqsubseteq \Psi'(f(\bar{x}))$, а $\tilde{\Psi}(\bar{x}) = \Psi(\bar{x})^*$. Требуется доказать, что

$$\vdash (\check{v}'_j : V_j) R_1^* \rightarrow (\Psi(\bar{x})^* \rightarrow \check{v}'_j (\Psi'(f(\bar{x})))^*)$$

при условии (3.2). В этом случае используется импликация $\check{w}_\alpha(\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2) \rightarrow (\mathcal{F}_1 \rightarrow \hat{w}_\alpha \mathcal{F}_2)$ при $\mathcal{F}_1$, не зависящей от z_α .

Итак, показана справедливость (3.1). В силу леммы 1 получаем $E, E' \vdash R_1 \rightarrow \mathcal{F}^*$. Лемма доказана.

3. Получение условий в терминах морфизмов МАС

Полученные с помощью описанного алгоритма условия устойчивости R_1 отличаются от условий типа морфизмов, традиционно используемых в теории универсальных алгебр и теории моделей: изоморфизмов, гомоморфизмов, сильных гомоморфизмов и т.д. Сильная перемежаемость в условии R_1 кванторов одного смысла кванторами другого смысла ухудшает его проверяемость по сравнению с условиями, накладываемыми на стандартные морфизмы. Поэтому в качестве R будем искать условия, достаточные для выводимости R_1 , и представляющие собой более привычные условия — типа морфизмов или очевидным образом вытекающие из них. Для этого воспользуемся алгоритмом получения теорем сравнения из

лемм сравнения [5, 11]. Он, как и алгоритм из [7], заключается в разбиении R_1 на более простые формулы, содержащие минимальное число кванторов существования, но сформулирован и обоснован в необходимой нам более общей, в частности, логической, а не теоретико-множественной форме.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Пусть F^* — некоторое подмножество $\exists$ -формул формулы F . Через $[F, F^*]$ обозначается результат исключения из F всех $\exists$ -формул F^v , таких, что $F^v \notin F^*$, а также ставших при этом несущественными кванторов (т.е. таких кванторов $\tilde{w}_\alpha$, что переменная z_α не входит в область действия квантора $\tilde{w}_\alpha$) и логических связок, утративших хотя бы одну из связываемых ими в F формул. Пусть (F, F^*) обозначает результат замены в F всех $\exists$ -формул F^v , таких, что $F^v \in F^*$, на тождественно истинные предикаты P_t . Через $A\{F : \Delta\}$ обозначим результат инвертирования в F смысла всех кванторов $\tilde{w}_\alpha$, удовлетворяющих условию Δ . Через $|F, e|$ обозначим слово, составленное из всех кванторов, управляющих в формуле F элементом e , а через $\|F, e\|$ — это же слово, в котором все кванторы существования заменены на соответствующие кванторы всеобщности. Пусть $\mathfrak{M}(F)$ обозначает множество всех экземпляров несущественных кванторов формулы F . Через HF обозначается результат вычеркивания из F всех несущественных (в указанном смысле) кванторов.

Первым преобразованием является расщепление формулы R_1 на части относительно ее заключительных формул. Пусть M — множество всех $\exists$ -формул из R_1 , и задан набор попарно не пересекающихся множеств $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\rho$, $\emptyset \neq \Sigma_\delta \subseteq M$, $\delta = \overline{1, \rho}$, где $\rho \geq 0$. И пусть для каждого δ задано некоторое условие Δ_δ^A .

Преобразование определяется рекурсивно:

$$\tilde{\mathcal{U}}_0 = R_1,$$

$$\mathcal{U}_\delta = A\{[\tilde{\mathcal{U}}_{\delta-1}, \Sigma_\delta] : \Delta_\delta^A\},$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_\delta = A\{(\tilde{\mathcal{U}}_{\delta-1}, \Sigma_\delta) : \tilde{w}_\alpha \in \mathcal{U}_\delta\}$$

($\tilde{\mathcal{U}}_\delta$ — результат замены в $\tilde{\mathcal{U}}_{\delta-1}$ $\exists$ -формул $(R_1)^v \in \Sigma_\delta$ на тождественно истинные предикаты P_t и затем применения операции A для кванторов существования, уже встретившихся в $\mathcal{U}_\delta$),

$$\tilde{\mathcal{U}}_\delta = H\tilde{\mathcal{U}}_\delta(C/C \& P_t)$$

(в формуле $\tilde{\mathcal{U}}_\delta$ все подформулы вида $C \& P_t$ заменяются на C , где через C обозначена любая формула, отличная от P_t , а затем из получившейся формулы вычеркиваются все несущественные кванторы),

$$I_\delta = \&\{H\|\tilde{\mathcal{U}}_\delta, \tilde{w}_\alpha\| \exists z_\alpha Z_\alpha : \tilde{w}_\alpha \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}_\delta)\}$$

(I_δ есть конъюнкция подформул, отвечающих кванторам существования, вычеркнутым при формировании условия $\tilde{\mathcal{U}}_\delta$ из $\tilde{\mathcal{U}}_\delta$).

Справедлива импликация [5, 11]:

$$\tilde{\mathcal{U}}_\rho \& \bigwedge_{\delta=1}^{\rho} \mathcal{U}_\delta \& I_\delta \rightarrow R_1.$$

Сформируем множество $\Phi = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_\rho, \tilde{\mathcal{U}}_\rho\}$. Входящие в него формулы в общем случае допускают расщепление на конъюнкции более простых условий с помощью применения следующего преобразования к некоторым входящим в них типовым кванторам существования.

Пусть в формуле $\mathcal{U} \in \Phi$ выделены некоторые кванторы существования $\check{w}^\tau = \exists w^\tau : Z^\tau$, и для каждого из них задано свое условие $\Delta_\tau, \tau = \overline{1, \eta}$. Положим $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{U}$,

$$\mathcal{V}_\tau = \mathcal{V}_\tau(\mathcal{U}) = A\{H[\tilde{\mathcal{V}}_{\tau-1}, \check{w}^\tau] \exists w^\tau Z^\tau : \Delta_\tau\}$$

(из $\tilde{\mathcal{V}}_{\tau-1}$ выделяются все элементы, управляющие квантором $\check{w}^\tau$, строится формула $[\tilde{\mathcal{V}}_{\tau-1}, \check{w}^\tau] \exists w^\tau Z^\tau$, из нее исключаются все несущественные кванторы и на кванторы всеобщности заменяются только те кванторы существования, которые удовлетворяют условию Δ_τ),

$$\tilde{\mathcal{V}}_\tau = \tilde{\mathcal{V}}_\tau(\mathcal{U}) = A\{\tilde{\mathcal{V}}_{\tau-1} : \check{w} = \check{w}^\tau \vee \check{w} \in \mathcal{V}_\tau\}$$

(в формуле $\tilde{\mathcal{V}}_{\tau-1}$ инвертируются рассматриваемый квантор $\check{w}^\tau$ и все кванторы существования, входящие в $\mathcal{V}_\tau$),

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{U}) = \&\{\mathcal{V}_\tau : \tau = \overline{1, \eta}\} \& \tilde{\mathcal{V}}_\eta.$$

Для всех $\mathcal{U} \in \Phi$ справедливо $\mathcal{V}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ [5, 11], а потому принимаем

$$R = \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{U}}_\rho) \& \bigwedge_{\delta=1}^{\rho} I_\delta \& \mathcal{V}(\mathcal{U}_\delta).$$

Искомая формула R , обеспечивающая условия, при которых из выполнимости для системы $\mathfrak{A}$ формулы $\mathcal{F}$ на каких-либо элементах $x_1, \dots, x_p$ вытекает выполнимость $\mathcal{F}$ для $\mathfrak{A}'$ на соответствующих элементах $\langle \varphi \rangle^{|x_1|}(x_1), \dots, \langle \varphi \rangle^{|x_p|}(x_p)$, построена.

4. Устойчивость движения общей динамической системы

Общая динамическая система типа В.В. Немыцкого $F : X \times T \rightarrow X$ определяется на топологическом пространстве X и группе T , F удовлетворяет известным аксиомам общей динамической системы [13]. В качестве X будем рассматривать равномерное пространство с топологией τ , порождаемой равномерной структурой пространства X . При этом целесообразно положить $\mathcal{B} \subset 2^{X \times X}$ — фильтр окружений для равномерной структуры пространства X .

Рассмотрим свойство устойчивости некоторого движения $F(p_0, t)$ общей динамической системы F в равномерном пространстве X (степень свойства $N = 2$):

$$\mathcal{F} = \forall V \in \mathcal{B} \exists V_0 \in \mathcal{B} \forall p \in X (< p_0, p > \in V_0 \rightarrow \forall t \in T < F(p_0, t), F(p, t) > \in V),$$

представляющее собой формульный предикат $\mathcal{F}(p_0)$, определенный на МАС $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, где $A = \langle X, T \rangle$, $\Omega_F = \langle F \rangle$, $\Omega_P = \langle \in \rangle$, $\Omega_E = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Пусть F' — другая общая динамическая система, представляющая собой однотипную $\mathfrak{A}$ МАС $\mathfrak{A}'$ сигнатуры σ с основными множествами X' и T' . Зададимся целью найти условия R устойчивости определенного на МАС $\mathfrak{A}$ формульного предиката $\mathcal{F}(p_0)$ относительно отображений

$$\varphi_1 : X \rightarrow X', \quad \varphi_2 : T \rightarrow T'.$$

Формула $\mathcal{F}$ содержит знак импликации, что не допустимо в языке обобщенных позитивных формул. Кроме того, $\mathcal{F}$ может быть приведена к "предваренному" виду. С помощью эквивалентных преобразований $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ и $A[z_\alpha[\vee \hat{w}_\alpha B \Leftrightarrow \hat{w}_\alpha(A \vee B)]$ перепишем $\mathcal{F}$ в виде:

$$\mathcal{F} = \forall V \in \mathcal{B} \exists V_0 \in \mathcal{B} \forall p \in X \forall t \in T \\ (\neg (< p_0, p > \in V_0) \vee < F(p_0, t), F(p, t) > \in V).$$

Формула $\mathcal{F}$ содержит две заключительные формулы: $\mathcal{F}^1 = \neg(< p_0, p > \in V_0)$ и $\mathcal{F}^2 = \neg(< F(p_0, t), F(p, t) > \in V)$, причем в первой из них функциональных символов нет, а во вторую дважды входит функциональный символ F из σ_F . Свободной переменной является p_0 . Для построения Ψ выберем в качестве t_1 (терма, входящего в з-формулу и содержащего лишь один функциональный символ), например, $F(p_0, t)$. При этом t — переменная из t_1 , квантор по которой имеет наименьшую в $\mathcal{F}$ область действия. Согласно алгоритма, строим формулу

$$\Phi_1 = \forall V \in \mathcal{B} \exists V_0 \in \mathcal{B} \forall p \in X \forall t \in T \forall y_1 = F(p_0, t) \\ (\neg(< p_0, p > \in V_0) \vee < y_1, F(p, t) > \in V).$$

В след литеры $\mathcal{F}_2 = < y_1, F(p, t) > \in V$ по-прежнему входит функциональный символ F , поэтому повторяем процедуру. Теперь $t_2 = F(p, t)$, а переменной, квантор по которой имеет наименьшую область действия в формуле Φ_1 , остается переменная t :

$$\Phi_2 = \forall V \in \mathcal{B} \exists V_0 \in \mathcal{B} \forall p \in X \forall t \in T \forall y_2 = F(p, t) \forall y_1 = F(p_0, t) \\ (\neg(< p_0, p > \in V_0) \vee < y_1, y_2 > \in V).$$

Теперь ни одна з-формула в Φ_2 не содержит вхождений функциональных символов и поэтому

$$\Psi(p_0) = \Phi_2.$$

Строятся формулы:

$$\Psi'(p'_0) = \forall V' \in \mathcal{B}' \exists V'_0 \in \mathcal{B}' \forall p' \in X' \forall t' \in T' \forall y'_2 = F'(p', t') \forall y'_1 = F'(p'_0, t') \\ (\neg(< p'_0, p' > \in V'_0) \vee < y'_1, y'_2 > \in V'),$$

$$\Psi'(f_1(p_0)) = \forall V' \in \mathcal{B}' \exists V'_0 \in \mathcal{B}' \forall p' \in X' \forall t' \in T' \forall y'_2 = F'(p', t') \\ \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') (\neg(< f_1(p_0), p' > \in V'_0) \vee < y'_1, y'_2 > \in V').$$

При этом формируется дополнительное условие

$$E' = (\forall t' \in T' \exists y'_1 = F'(f_1(p_0), t')) \& (\forall p' \in X' \forall t' \in T' \exists y'_2 = F'(p', t')),$$

которое тривиально, так как выполнено в силу определенности всюду функции F .

Преобразуем теперь Ψ в формулу R_1 :

$$R_1 = \forall V' \in \mathcal{B}' \exists V \in \mathcal{B} : f^{|V|}(V) = V' \quad \forall V_0 \in \mathcal{B} \exists V'_0 \in \mathcal{B}' : f^{|V_0|}(V_0) = V'_0 \\ \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \quad \forall y'_2 = F'(p', t') \quad \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \exists p \in X : f^{|p|}(p) = p' \\ \exists t \in T : f^{|t|}(t) = t' \quad \exists y_2 = F(p, t) : f^{|y_2|}(y_2) = y'_2 \quad \exists y_1 = F(p_0, t) : f^{|y_1|}(y_1) = y'_1 \\ (\Xi_-^{-1} \& \Xi_+^{-2}),$$

где

$$\Xi_-^{-1} = < f_1(p_0), p' > \in V'_0 \rightarrow < p_0, p > \in V_0, \\ \Xi_+^{-2} = < y_1, y_2 > \in V \rightarrow < y'_1, y'_2 > \in V'.$$

Здесь символами $f^{M[A]}$ временно обозначены новые функциональные символы, образованные из символов f_1 , f_2 и $\sqcup * \sqcup$, $\widehat{\sqcup}$ по правилам построения отображений ступеней, и интерпретирующиеся как отображения ступеней, соответствующие введенному выше семейству отображений $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$. Рассмотрим, что обозначает каждый такой символ.

В подформуле

$$\forall V' \in \mathcal{B}' \exists V \in \mathcal{B} : f^{|V|}(V) = V',$$

поскольку $V \in \mathcal{B}$, а $\mathcal{B} \subset 2^{X \times X}$, что эквивалентно $\mathcal{B} \in 2^{2^{X \times X}}$, $|V| = 2^{2^{X \times X}}$. По определению отображений ступеней, отвечающих отображениям

$$\varphi_1 : X \rightarrow X', \varphi_2 : T \rightarrow T'$$

имеем:

$$\varphi^{|V|} = \langle \varphi \rangle^{2^{X \times X}} = \widehat{\langle \varphi \rangle^{2^{X \times X}}} = \widehat{\langle \varphi \rangle^{X \times X}} = \widehat{\varphi_1 * \varphi_1},$$

где $\widehat{\varphi_1 * \varphi_1} : 2^{2^{X \times X}} \rightarrow 2^{2^{X' \times X'}}$. Таким образом, в формуле R_1 символ $f^{|V|}$ заменим на символ $\widehat{f_1 * f_1}$.

Очевидно, что в подформуле

$$\forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \exists V'_0 \in \mathcal{B}' : f^{|V_0|}(V_0) = V'_0$$

$$f^{|V_0|} = f^{|V|} = \widehat{f_1 * f_1}, \text{ т.к. } |V_0| = 2^{X \times X}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} p \in X &\Rightarrow |p| = X \quad \text{и} \quad f^{|p|} = f_1; \\ t \in T &\Rightarrow |t| = T \quad \text{и} \quad f^{|t|} = f_2; \\ y_1 = F(p_0, t) &\Rightarrow |y_1| = X \quad \text{и} \quad f^{|y_1|} = f_1; \\ y_2 = F(p, t) &\Rightarrow |y_2| = X \quad \text{и} \quad f^{|y_2|} = f_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_1 = \forall V' \in \mathcal{B}' \quad \exists V \in \mathcal{B} : \widehat{f_1 * f_1}(V) = V' \quad \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \exists V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{f_1 * f_1}(V_0) = V'_0 \\ \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \quad \forall y'_2 = F'(p', t') \quad \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \exists p \in X : f_1(p) = p' \\ \exists t \in T : f_2(t) = t' \quad \exists y_2 = F(p, t) : f_1(y_2) = y'_2 \quad \exists y_1 = F(p_0, t) : f_1(y_1) = y'_1 \\ ((\langle f_1(p_0), p' \rangle \in V'_0 \rightarrow \langle p_0, p \rangle \in V_0) \quad \& \quad (\langle y_1, y_2 \rangle \in V \rightarrow \langle y'_1, y'_2 \rangle \in V')). \end{aligned}$$

Формируем множество $M = \{\Xi_-^{-1}, \Xi_+^{-2}\}$ — множество всех з-формул из R_1 , определяющее возможные варианты разбиения R_1 . Пусть, например, $\Sigma_1 = \{\Xi_-^{-1}\}$, $\Delta_1^A = P_f$ (последнее означает, что при построении $\mathcal{U}_1$ $\exists$ -кванторы не инвертируются):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 = \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \exists V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{f_1 * f_1}(V_0) = V'_0 \quad \forall p' \in X' \quad \exists p \in X : f_1(p) = p' \\ \langle f_1(p_0), p' \rangle \in V'_0 \rightarrow \langle p_0, p \rangle \in V_0 \end{aligned}$$

($\mathcal{U}_1$ есть подформула, состоящая из з-формулы Ξ_-^{-1} и всех кванторов, управляющих ею в R_1 ; все кванторы сохраняют свои значения; несущественные кванторы исключаются),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_1 = \forall V' \in \mathcal{B}' \quad \exists V \in \mathcal{B} : \widehat{f_1 * f_1}(V) = V' \quad \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \forall V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{f_1 * f_1}(V_0) = V'_0 \\ \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \quad \forall y'_2 = F'(p', t') \quad \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \forall p \in X : f_1(p) = p' \\ \exists t \in T : f_2(t) = t' \quad \exists y_2 = F(p, t) : f_1(y_2) = y'_2 \quad \exists y_1 = F(p_0, t) : f_1(y_1) = y'_1 \\ (P_t \quad \& \quad (\langle y_1, y_2 \rangle \in V \rightarrow \langle y'_1, y'_2 \rangle \in V')) \end{aligned}$$

(Ξ_-^{-1} и все кванторы существования, вошедшие в $\mathcal{U}_1$, заменяем соответственно на тождественно истинный предикат P_t и кванторы всеобщности; первое приводит к возникновению несущественных кванторов: $\forall V_0$ и $\forall V'_0$),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_1 = \forall V' \in \mathcal{B}' \quad \exists V \in \mathcal{B} : \widehat{f_1 * f_1}(V) = V' \quad \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \quad \forall y'_2 = F'(p', t') \\ \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \forall p \in X : f_1(p) = p' \quad \exists t \in T : f_2(t) = t' \\ \exists y_2 = F(p, t) : f_1(y_2) = y'_2 \quad \exists y_1 = F(p_0, t) : f_1(y_1) = y'_1 \\ (\langle y_1, y_2 \rangle \in V \rightarrow \langle y'_1, y'_2 \rangle \in V'). \end{aligned}$$

При переходе от $\tilde{\mathcal{U}}_1$ к $\hat{\mathcal{U}}_1$ были вычеркнуты символы P_t и $\&$, а также кванторы $\forall V_0$ и $\forall V'_0$, поскольку $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \{\forall V_0, \forall V'_0\}$. Однако $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ не содержит кванторов существования, а следовательно, I_1 нет.

Применим следующие шаги алгоритма. Для каждой формулы из множества $\Phi = \{\mathcal{U}_1, \tilde{\mathcal{U}}_1\}$ выделим подформулы, отвечающие всем входящим в нее кванторам существования, принимая при этом $\Delta_\tau = P_f$ для всех $\check{w}^\tau$.

Рассмотрим случай $\check{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{U}_1$. Формула $\mathcal{U}_1$ содержит два $\exists$ -квантора, и, следовательно, в силу выбора условия $\Delta_\tau = P_f$, будут получены две формулы $\mathcal{V}_\tau(\mathcal{U}_1)$ ($\tau = 1, 2$), отвечающие этим кванторам, и формула $\check{\mathcal{V}}_2(\mathcal{U}_1)$, не содержащая кванторов существования. Для первого $\exists$ -квантора получаем:

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1) = \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \exists V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{\widehat{f_1 * f_1}}(V_0) = V'_0,$$

после чего инвертируем его смысл в исходной формуле:

$$\check{\mathcal{V}}_1(\mathcal{U}_1) = \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \forall V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{\widehat{f_1 * f_1}}(V_0) = V'_0 \quad \forall p' \in X' \quad \exists p \in X : f_1(p) = p' \\ < f_1(p_0), p' > \in V'_0 \rightarrow < p_0, p > \in V_0.$$

Теперь выделяем подформулу, отвечающую $\exists$ -квантору по переменной p :

$$\mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1) = \forall p' \in X' \quad \exists p \in X : f_1(p) = p',$$

$$\check{\mathcal{V}}_2(\mathcal{U}_1) = \forall V_0 \in \mathcal{B} \quad \forall V'_0 \in \mathcal{B}' : \widehat{\widehat{f_1 * f_1}}(V_0) = V'_0 \quad \forall p' \in X' \quad \forall p \in X : f_1(p) = p' \\ < f_1(p_0), p' > \in V'_0 \rightarrow < p_0, p > \in V_0.$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_1) = \mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1) \& \mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1) \& \check{\mathcal{V}}_2(\mathcal{U}_1)$$

Теперь рассмотрим случай $\check{\mathcal{V}}_0 = \tilde{\mathcal{U}}_1$.

Формула $\tilde{\mathcal{U}}_1$ содержит четыре $\exists$ -квантора. Выделяем подформулу, соответствующую квантору $\check{t}$:

$$\mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \forall V' \in \mathcal{B}' \quad \exists V \in \mathcal{B} : \widehat{\widehat{f_1 * f_1}}(V) = V'.$$

Из получившейся при этом формулы $\check{\mathcal{V}}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ выделяем подформулу, соответствующую квантору $\check{t}$:

$$\mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \forall t' \in T' \quad \exists t \in T : f_2(t) = t'.$$

Для квантора $\check{y}_2$ из $\check{\mathcal{V}}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ получаем:

$$\mathcal{V}_3(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \quad \forall y'_2 = F'(p', t') \quad \forall p \in X : f(p) = p' \\ \forall t \in T : f_2(t) = t' \quad \exists y_2 = F(p, t) : f_1(y_2) = y'_2.$$

Из $\check{\mathcal{V}}_3(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ для квантора $\check{y}_1$ получаем:

$$\mathcal{V}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \forall t' \in T' \quad \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \forall t \in T : f_2(t) = t' \\ \exists y_1 = F(p_0, t) : f_1(y_1) = y'_1,$$

$$\check{\mathcal{V}}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \forall V' \in \mathcal{B}' \quad \forall V \in \mathcal{B} : \widehat{\widehat{f_1 * f_1}}(V) = V' \quad \forall p' \in X' \quad \forall t' \in T' \\ \forall y'_2 = F'(p', t') \quad \forall y'_1 = F'(f_1(p_0), t') \quad \forall p \in X : f_1(p) = p' \quad \forall t \in T : f_2(t) = t' \\ \forall y_2 = F(p, t) : f_1(y_2) = y'_2 \quad \forall y_1 = F(p_0, t) : f_1(y_1) = y'_1 \\ (< y_1, y_2 > \in V \rightarrow < y'_1, y'_2 > \in V'),$$

$$\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{U}}_1) = \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \& \mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1) \& \mathcal{V}_3(\tilde{\mathcal{U}}_1) \& \mathcal{V}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1) \& \check{\mathcal{V}}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1).$$

Итак, принимая во внимание, что в данном примере условия I_δ пустые, $R = \mathcal{V}(\mathcal{U}_1) \& \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{U}}_1)$.

Что означают полученные условия? Прежде всего заметим, что все они содержательны. Условия $\mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ и $\mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1)$ означают сюръективность функций $\widehat{\widehat{\varphi_1 * \varphi_1}} : 2^{2^{X \times X}} \rightarrow 2^{2^{X' \times X'}}$ и $\varphi_1 : X \rightarrow X'$, причем второе, как не трудно показать, влечет

первое. Формула $\mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ означает сюръективность функции $\varphi_2 : T \rightarrow T'$. Условие $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ может быть записано в виде $\widehat{f_1 * f_1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}'$ и заведомо обеспечивается, если $\widehat{f_1 * f_1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. Однотипные условия $\mathcal{V}_3(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ и $\mathcal{V}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ выполнены, если $f_1(F(p, t)) = F'(f_1(p), f_2(t))$, т.е. если φ сохраняет оператор системы (однопараметрическое семейство преобразований пространства X в себя с параметризацией по t) и φ_1 — сюръекция.

Определение 1. Семейство отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}$ называется *гомоморфизмом* МАС $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ [12], если

- 1) $\langle \varphi \rangle^{S_{\mathfrak{B}}[A]}(F_\beta(z)) = F'_\beta(\langle \varphi \rangle^{S_{\mathfrak{B}}[A]}(z))$ ($\beta = \overline{1, k_F}, z \in S_{\mathfrak{B}}[A]$);
- 2) $\langle \varphi \rangle^{T_\gamma[A]}(P_\gamma) \subseteq P'_\gamma$ ($\gamma = \overline{1, k_P}$).
- 3) $\langle \varphi \rangle^{U_\delta[A]}(E_\delta) = E'_\delta$ ($\delta = \overline{1, k_E}$).

Таким образом, условия $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ и $\tilde{\mathcal{V}}_4(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ обеспечиваются требованием того, чтобы φ являлось гомоморфизмом систем F и F' .

Введем следующее определение, обобщающее на случай многоосновных алгебраических систем известное определение мощного гомоморфизма одноосновных алгебраических систем.

Определение 2. Будем говорить, что φ — *мощный гомоморфизм* МАС $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, если для всех $\lambda = \overline{1, k}$ φ_λ — сюръекции, выполняются условия 1), 3) определения 1 и

$$\begin{aligned} & \forall z'_{\alpha_1} : Z'_{\alpha_1} \dots \forall z'_{\alpha_n} : Z'_{\alpha_n} \forall z_{\alpha_1} : (Z_{\alpha_1} \& z'_{\alpha_1} = \varphi^{|z_{\alpha_1}|}(z_{\alpha_1})) \dots \\ & \forall z_{\alpha_n} : (Z_{\alpha_n} \& z'_{\alpha_n} = \varphi^{|z_{\alpha_n}|}(z_{\alpha_n}))(P_\gamma^n)'(z'_{\alpha_1}, \dots, z'_{\alpha_n}) \rightarrow P_\gamma^n(z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_n}). \end{aligned}$$

С учетом определения 2 из условия $\tilde{\mathcal{V}}_2(\mathcal{U}_1)$ вытекает, что для обеспечения переносимости свойства устойчивости φ должно являться мощным гомоморфизмом систем F и F' . Итак, может быть сформулирована

Теорема 1. Пусть $F(p, t) : X \times T \rightarrow X$ — общая динамическая система. И пусть $F'(p', t') : X' \times T' \rightarrow X'$ — другая общая динамическая система, $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\varphi_1 = X \rightarrow X', \varphi_2 = T \rightarrow T'$. Предположим, что X, X' — равномерные пространства с фильтрами окружений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ соответственно. Тогда если $p'_0 = \varphi_1(p_0)$, а $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ — гомоморфизм и мощный гомоморфизм системы F в систему F' , то из устойчивости движения $F(p_0, t)$ системы F следует устойчивость движения $F'(p'_0, t')$ системы F' .

Эта теорема является аналогом в части достаточности теоремы, полученной в [12] для данного свойства общей динамической системы с помощью так называемого *метода представимости*.

Те же самые условия можно получить и при других параметрах разбиения формулы R_1 . Например, при таком же выборе Σ_δ , но положив $\Delta_1^A = P_t$, в качестве $\mathcal{U}_1$ получим приведенное выше условие $\tilde{\mathcal{V}}_2(\mathcal{U}_1)$, при этом $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ сформируется как условие I_1 , а $\mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1)$ получится как одно из условий типа $\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{U}}_1)$.

Однако в зависимости от выбора кванторов $\forall^\tau$ и параметров $\Sigma_\delta, \Delta_\tau, \Delta_\delta^A$ (последние могут изменяться от P_t до P_f), определяющих разбиение формулы R_1 , возможно значительное варьирование получаемых условий. Здесь, например, откажемся от инвертирования в формуле $\tilde{\mathcal{V}}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ смысла кванторов по переменным y_1 и y_2 , не включив их в набор кванторов $\forall^\tau$. Сохранив к тому же условие $\widehat{f_1 * f_1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}'$, получим ослабленное условие типа гомоморфизма, т.е. обобщение указанной теоремы.

5. Динамика автоматной сети

Рассмотрим модель поведения автоматной сети в форме так называемых синхронных итераций с задержками на глубину памяти m [3]:

$$x(t+1) = F(x(t-m+1), x(t-m+2), \dots, x(t-1), x(t)), \quad (6.1)$$

где $t \in T^\tau = \{0, 1, 2, \dots, \tau\}$, $\tau \in N = \{1, 2, \dots\}$, или $t \in T^\infty = \{0\} \cup N$, т.е. $\tau = \infty$, число m фиксировано и $m \in N$, $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t) \in W^n$, $n \in N$, W — абстрактное множество состояний $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $F : W^{nm} \rightarrow W^n$.

Система (6.1) имеет задержки, т.е. состояние в момент времени $t+1$ зависит от состояний элементов в предыдущие моменты времени на некоторую глубину памяти m .

Очевидно, что если в (6.1) задано начальное условие $x_0 = x(0)$, а также значения $x^{-m+1} = x(-m+1) = x_0(-m+1), \dots, x^{-1} = x(-1) = x_0(-1)$ из множества W^n , то в модели (6.1) функция $F = (F_1, \dots, F_n)$ определяет и притом единственным образом решение, представляющее собой процесс $x : T^\tau \rightarrow W^n$. Пусть задана так называемая “начальная” функция $x_0 : -m+1, \dots, -1 \rightarrow W^n$. Она расширяет область определения решения $x : T^\tau \rightarrow W^n$ до множества $D = \{-m+1, \dots, -1\} \cup T^\tau$, определяя вместе с (6.1) “надпроцесс” $x : D \rightarrow W^n$.

Далее, если не указано другого, мы будем считать начальную функцию x_0 произвольной, но фиксированной, варьируя только начальное состояние x_0 . Тогда автоматную сеть можно рассматривать как систему процессов $x : T^\tau \times W^n \rightarrow W^n$.

Рассмотрим для нее свойство достижимости целевого множества $X^* \subset W^n$ из некоторого множества начальных состояний $X_0 \subset W^n$ при фазовых ограничениях $X_1 \subset W^n$ (степень свойства $N = 2$). На языке обобщенных позитивных формул оно запишется как

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \forall x_0 \in X_0 \exists t^* \in T^\tau (x(t^*), x_0) \in X^* \\ & \& (\forall t \in T^\tau : t \leq t^* x(t, x_0) \in X_1). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Система процессов x может рассматриваться как двусосновная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, у которой $A = \langle W^n, T^\tau \rangle$, $\Omega_F = \langle x \rangle$, $\Omega_P = \langle \in, \leq \rangle$, $\Omega_E = \langle X_0, X_1, X^* \rangle$, $\leq$ — линейный порядок на T^τ . Тогда $\mathcal{F}$ — формульный предикат без свободных переменных, определенный на МАС $\mathfrak{A}$.

В соответствии с основной идеей нашего метода введем вторую (редуцированную) модель

$$x'(t+1) = F'(x'(t-m+1), x'(t-m+2), \dots, x'(t-1), x'(t)), \quad (6.3)$$

где $t \in (T^\tau)'$, $\tau \in T^\infty$, $x' = (x'_1, \dots, x'_k) = (x'_1(t), \dots, x'_k(t)) = x'(t) \in W^k$, $k \in N$, — частично упорядоченное множество состояний $x'_i = x'_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, $F' : W^{km} \rightarrow W^k$ имеют смысл, аналогичный введенным ранее функциям.

Зададим отображения

$$\varphi_1 : W^n \rightarrow W^k, \quad \varphi_2 : T^\tau \rightarrow (T^\tau)'$$

и найдем условия, при которых система (6.3) обладает свойством (6.2), если им обладает система (6.1).

Формула (6.2) содержит две заключительные формулы, в каждую из которых входит функциональный символ x из σ_F . Вводя новые, ранее не встречавшиеся переменные y_1, y_2 , строим формулу

$$\begin{aligned} \Psi = & \forall x_0 \in X_0 \exists t^* \in T \exists y_1 = x(t^*, x_0) (y_1 \in X^* \& \\ & (\forall t \in T : t \leq t^* \forall y_2 = x(t, x_0) y_2 \in X_1)), \end{aligned}$$

а также формулу

$$\Psi' = \forall x'_0 \in X'_0 \exists (t^*)' \in T' \exists y'_1 = x((t^*)', x'_0)(y'_1 \in (X^*)' \& (\forall t' \in T' : t' \leq (t^*)' \forall y'_2 = x(t', x'_0) y'_2 \in X'_1)).$$

При этом формируются дополнительные условия

$$E = \forall x_0 \in X_0 \forall t^* \in T \exists y_1 = x(t^*, x_0),$$

$$E' = \forall x'_0 \in X'_0 \forall (t^*)' \in T' \forall t' \in T' : t' \leq (t^*)' \exists y'_2 = x'(t', x'_0).$$

Условия E и E' тривиальны в силу того, что функции отвечающих системам (6.1) и (6.3) МАС всюду определены.

Теперь

$$\begin{aligned} R_1 = & \forall x'_0 \in X'_0 \exists x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T \forall y_1 = x(t^*, x_0) \\ & \exists (t^*)' \in T' : f_2(t^*) = (t^*)' \exists y'_1 = x'((t^*)', x'_0) : f_1(y_1) = y'_1 \\ & ((y_1 \in X^* \rightarrow y'_1 \in (X^*)') \& (\forall t' \in T' : t' \leq (t^*)' \forall y'_2 = x'(t', x'_0) \\ & \exists t \in T : t \leq t^* \& f_2(t) = t' \exists y_2 = x(t, x_0) : f_1(y_2) = y'_2 y_2 \in X_1 \rightarrow y'_2 \in X'_1)). \end{aligned}$$

Лемма 2 позволяет сделать вывод: если выполнено условие R_1 , то при семействе отображений $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ система (6.3) обладает свойством (6.2), если им обладает система (6.1).

Здесь $M = \{\Xi_+^1, \Xi_+^2\}$ и снова возьмем $\Sigma_1 = \{\Xi_+^1\}$, $\Delta_1^A = P_f$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 = & \forall x'_0 \in X'_0 \exists x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T^\tau \forall y_1 = x(t^*, x_0) \\ & \exists (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \exists y'_1 = x'((t^*)', x'_0) : f_1(y_1) = y'_1 \\ & y_1 \in X^* \rightarrow y'_1 \in (X^*)'. \end{aligned}$$

Сразу же выделим в $\mathcal{U}_1$ подформулы, отвечающие кванторам существования:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1) = & \forall x'_0 \in X'_0 \exists x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0, \\ \mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1) = & \forall t^* \in T^\tau \exists (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)', \\ \mathcal{V}_3(\mathcal{U}_1) = & \forall x'_0 \in X'_0 \forall x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T^\tau \forall y_1 = x(t^*, x_0) \\ & \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \exists y'_1 = x'((t^*)', x'_0) : f_1(y_1) = y'_1. \end{aligned}$$

При этом получаем также формулу $\tilde{\mathcal{V}}_3(\mathcal{U}_1)$, не содержащую уже кванторов существования:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_3(\mathcal{U}_1) = & \forall x'_0 \in X'_0 \forall x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T^\tau \forall y_1 = x(t^*, x_0) \\ & \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \forall y'_1 = x'((t^*)', x'_0) : f_1(y_1) = y'_1 \\ & y_1 \in X^* \rightarrow y'_1 \in (X^*)'. \end{aligned}$$

После выделения $\mathcal{U}_1$ остается рассмотреть формулу $\tilde{\mathcal{U}}_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_1 = & \forall x'_0 \in X'_0 \forall x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T^\tau \\ & \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \forall t' \in (T^\tau)' : t' \leq (t^*)' \forall y'_2 = x'(t', x'_0) \\ & \exists t \in T^\tau : t \leq t^* \& f_2(t) = t' \exists y_2 = x(t, x_0) : f_1(y_2) = y'_2 \\ & y_2 \in X_1 \rightarrow y'_2 \in X'_1. \end{aligned}$$

Здесь возможно получение условий

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) = & \forall t^* \in T^\tau \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \forall t' \in (T^\tau)' : t' \leq (t^*)' \\ & \exists t \in T^\tau : t \leq t^* \& f_2(t) = t', \\ \mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1) = & \forall x'_0 \in X'_0 \forall x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \forall t^* \in T^\tau \\ & \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) = (t^*)' \forall t' \in (T^\tau)' : t' \leq (t^*)' \forall y'_2 = x'(t', x'_0) \\ & \forall t \in T^\tau : t \leq t^* \& f_2(t) = t' \exists y_2 = x(t, x_0) : f_1(y_2) = y'_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1) &= \forall x'_0 \in X'_0 \quad \forall x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = x'_0 \quad \forall t^* \in T^\tau \\ \forall (t^*)' \in (T^\tau)' : f_2(t^*) &= (t^*)' \quad \forall t' \in (T^\tau)' : t' \leq (t^*)' \quad \forall y'_2 = x'(t', x'_0) \\ \forall t \in T : t \leq t^* \& f_2(t) &= t' \quad \forall y_2 = x(t, x_0) : f_1(y_2) = y'_2 \quad y_2 \in X_1 \rightarrow y'_2 \in X'_1.\end{aligned}$$

Проведем интерпретацию полученных условий. $\mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1)$ означает сюръективность функций $\varphi_2 : T^\tau \rightarrow (T^\tau)'$. Однако в случае автоматных сетей шкалу моментов времени исходной и вспомогательной сетей целесообразно оставить одной и той же, и, принимая $T^\tau = (T^\tau)'$, мы автоматически удовлетворяем как $\mathcal{V}_2(\mathcal{U}_1)$, так и $\mathcal{V}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1)$. При этом φ_2 есть тождественное отображение.

Условие $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ означает, что $X'_0 \subseteq \widehat{\varphi}_1(X_0)$ и выполнено, если $\widehat{\varphi}_1(X_0) = X'_0$. Здесь мы учли, что $|X_0| = 2^{W^n}$. $\mathcal{V}_3(\mathcal{U}_1)$ и $\mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ представляют собой требования сохранения операции системы при сюръективности φ_1 , при которой выполняется и $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$. $\tilde{\mathcal{V}}_3(\mathcal{U}_1)$ и $\tilde{\mathcal{V}}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ — условия сохранения предиката соответствующей системе (6.1) МАС. Они обеспечены равенствами $\widehat{\varphi}_1(X_1) = X'_1$ и $\widehat{\varphi}_1(X^*) = (X^*)'$, связывающими выделенные элементы систем (6.1) и (6.3).

Таким образом, может быть сделан вывод о том, что если система (6.1) обладает свойством (6.2) и $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ есть гомоморфизм соответствующих систем (6.1) и (6.3) МАС, причем φ_1 — сюръекция, то автоматная сеть (6.3) обладает свойством (6.2). Переформулируем эту теорему в терминах автоматных сетей.

Определение 3. Функция $v : W^n \rightarrow \overline{W^k}$, называется *гомоморфизмом* для пары $F, F' [3]$, если для всех $x^l \in W^n$, $l = \overline{1, m}$, выполняется следующее векторное равенство для суперпозиций

$$v(F(x^1, \dots, x^m)) = F'(v(x^1), \dots, v(x^m)).$$

При этом заведомо выполняется основное условие редукции в форме *траекторного гомоморфизма*

$$v(x(t, x_0)) = x'(t, v(x_0))(t \in T^\tau, x_0 \in W)$$

и модель (6.3) называется *моделью, гомоморфной модели (6.1)*.

Нетрудно заметить, что условия $\mathcal{V}_3(\mathcal{U}_1)$ и $\mathcal{V}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ выполнены, если φ_1 — траекторный гомоморфизм систем (6.1) и (6.3) (при сюръективности φ_1). $\tilde{\mathcal{V}}_3(\mathcal{U}_1)$ может быть записано в виде $\widehat{\varphi}_1(X^*) \subseteq (X^*)'$, $\tilde{\mathcal{V}}_2(\tilde{\mathcal{U}}_1)$ — в виде $\widehat{\varphi}_1(X_1) \subseteq X'_1$. Теперь может быть сформулирована

Теорема 2. Пусть φ_1 — траекторный гомоморфизм систем (6.1) и (6.3), φ_1 — сюръекция и выполнены условия

- 1) $\forall j \in \{-m+1, \dots, -1\} \quad \varphi_1(x^j) = (x^j)'$,
- 2) $X'_0 \subseteq \widehat{\varphi}_1(X_0)$,
- 3) $\widehat{\varphi}_1(X^*) \subseteq (X^*)'$,
- 4) $\widehat{\varphi}_1(X_1) \subseteq X'_1$.

Тогда из выполнимости в модели (6.1) условия (6.2) для некоторых фиксированных значений x^j , $j \in \{-m+1, \dots, -1\}$, следует его выполнимость в системе (6.3).

Итак, нами сформулирован алгоритм автоматического синтеза критериев переносимости свойств многоосновных алгебраических систем. Предложенный аппарат эффективен не только для исследования алгебраических систем, но и в анализе свойств различных динамических систем, допускающих представление в виде МАС. Например, выше с его помощью получены новые теоремы о сохранении свойства устойчивости общей динамической системы и свойства достижимости автоматной сети с задержками.

Работа частично поддержана комплексным интеграционным проектом №1.4 СО РАН.

Литература

- [1] Артамонов, В.А. Многоосновные алгебры в системах открытого шифрования / В.А. Артамонов, В.В. Яценко // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49. №4. – С. 149–150.
- [2] Бурбаки, Н. Теория множеств / Н.Бурбаки. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
- [3] Васильев, С.Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I–II / С.Н.Васильев // Изв. РАН, ТиСУ. 2006. № 1, № 2.
- [4] Васильев, С.Н. Метод сравнения в анализе систем. I–IV / С.Н.Васильев // Диф. уравнения. – 1981. – Т. 17. – №9; Т. 17. – №11; 1982. – Т. 18. – №2; Т. 18. – №6.
- [5] Васильев, С.Н. Синтез теорем с ВФЛ в математической теории систем. дис...док. физ.-мат. наук / С.Н.Васильев. – Иркутск: СО РАН СССР, 1985.
- [6] Мальцев, А.И. Модельные соответствия / А.И.Мальцев // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1959. – Т. 23. – №3. – С. 313–336.
- [7] Матросов, В.М. Метод сравнения в динамике систем. I–II / В.М.Матросов // Диф. уравнения. – 1974. – Т. 10. – №9; 1975. – Т. 11. – №3.
- [8] Шапошников, И.Г. О конгруэнциях конечных многоосновных универсальных алгебр / И.Г.Шапошников // Дискретная математика. – 1999. – Т. 11. – №3. – С. 48–62.
- [9] Higgins, P.J. Algebras with a scheme of operators / P.J.Higgins // Math. Nachrichten. – 1963. – №27. – P. 115–132.
- [10] Lyndon R.C. Properties preserved under homomorphism / R.C.Lyndon // Pacific Journal of Mathematics. – 1959. – V. 9. – P. 143–154.
- [11] Vassilyev, S.N. Machine Synthesis of Mathematical Theorems / S.N.Vassilyev // J. of Logic Programming. – (9)2, 3 (1990). – P. 235–266.
- [12] Васильев С.Н. Сохранение некоторых динамических свойств при морфизмах / С.Н.Васильев // Тезисы докладов III Всесоюзной Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. – Иркутск, 1977. – С. 99.
- [13] Сибирский, К.С. Введение в топологическую динамику / К.С.Сибирский. – Кишинев: РИО АН МССР, 1970. – 221 с.

Поступила в редакцию 16/III/2007;
в окончательном варианте — 16/III/2007.

THE PROBLEM OF PRESERVATION OF MANY-SORTED ALGEBRAIC SYSTEM PROPERTIES

© 2007 N.V. Nagul²

In the paper an algorithm for the synthesis of many-sorted system properties preservation criteria is proposed. The conditions obtained are of morphisms character. Examples of application of the algorithm described to studying properties of automata network and general dynamic system are presented.

Paper received 16/III/2007.

Paper accepted 16/III/2007.

²Nagul Nadezhda Vladimirovna (sapling@icc.ru), Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033, Russia.