

УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2007 С.Я. Шатских, А.Н. Комлев¹

Рассматриваются системы случайных величин, для которых условные распределения вероятностей являются преобразованиями независимости этой системы. Показано, что для случайных величин имеющих совместную плотность, условные распределения являются примерами возможных вариантов преобразований независимости. Однако для систем дискретных случайных величин условные распределения преобразованиями независимости уже не являются. В связи с изучением свойств преобразований независимости рассматриваются многомерные распределения вероятностей обладающие воспроизводимостью условных квантилей.

Введение

В настоящей работе мы будем изучать семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, для которых величина ξ_1 зависит от остальных величин этого семейства. Таким образом, мы считаем, что

$$F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n) \neq F_1(x_1),$$

где через $F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$ обозначена условная функция распределения ξ_1 относительно $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$, а через $F_1(x_1)$ — безусловная функция распределения случайной величины ξ_1 .

В основном в этой работе нас будут интересовать свойства преобразований независимости случайных величин. Введем необходимое определение.

Определение 1. Преобразованием независимости случайной величины ξ_1 относительно семейства случайных величин $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$ будем называть борелевскую функцию $y = h(x_1, \dots, x_n)$, для которой случайная величина $h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ не зависит от семейства $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$, т.е. для любого $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_1; \xi_2 \leq u_2; \dots; \xi_n \leq u_n\} = \\ = \mathbb{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_1\} \cdot \mathbb{P}\{\xi_2 \leq u_2; \dots; \xi_n \leq u_n\}. \end{aligned}$$

Мы будем использовать обозначение $\xi \perp \eta$ для независимых случайных величин и $\xi \nparallel \eta$ для зависимых. Аналогичным образом будет обозначаться независимость семейств случайных величин и σ -алгебр.

В классе гауссовских случайных величин задача нахождения преобразования независимости составляет содержание хорошо известной "теоремы о нормальной

¹Комлев Александр Николаевич (alexander04@list.ru), Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

корреляции” (см., например, [1, с. 387]). Поэтому в данной работе мы будем иметь дело, в основном, с негауссовскими случайными величинами. Судя по всему, первой цитируемой работой, в которой условное распределение рассматривается в качестве преобразования независимости, была статья М. Розенблатта [2], где условное распределение вероятностей используется для построения преобразования, которое переводит абсолютно непрерывное k -мерное распределение в равномерное распределение на единичном k -мерном гиперкубе (см. также [3]). Позднее, этот результат был заново установлен в работе [4] по аналогии с некоторыми задачами дифференциальной геометрии. В нашей работе (см. теорему 1), мы даем доказательство этого результата отличающееся от доказательства, приводимого в [4].

Кроме того, в теореме 2 мы показываем, что для семейства дискретных случайных величин условное распределение вероятностей преобразованием независимости уже не является.

Для доказательства теорем 1 и 2 мы используем известный критерий независимости (см. [5, с. 25]; [6, с. 170]): для того чтобы случайная величина ξ_1 была независима от семейства случайных величин $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$ необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\mathbf{M}\{v(\xi_1)u(\xi_2, \dots, \xi_n)\} = \mathbf{M}\{v(\xi_1)\}\mathbf{M}\{u(\xi_2, \dots, \xi_n)\}, \quad (1)$$

для любых борелевских и ограниченных функций $v(\cdot)$ и $u(\cdot, \dots, \cdot)$.

Как нетрудно заметить, для условного распределения $F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$ поверхности постоянного уровня совпадают с условными квантилями. В теореме 3 мы устанавливаем, что это свойство выполняется и для достаточно широкого класса преобразований независимости отличных от условных распределений. Поэтому третья глава нашей работы посвящена изучению свойств условных квантилей, связанных с преобразованием независимости. В частности, в этой главе мы рассматриваем свойство воспроизводимости многомерных условных квантилей при их сужении на условные квантили меньшей размерности.

В данной работе мы продолжаем исследования преобразований независимости, которым ранее были посвящены статьи [4, 7–9].

Основные результаты этой работы докладывались на XII Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (см. [10]).

1. Преобразование независимости

Перейдем к задаче построения преобразований независимости. Вначале рассмотрим семейство случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, имеющее совместное распределение

$$F_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\}$$

с плотностью $f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 1. Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеют совместную плотность, то условное распределение вероятностей $F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$ является одним из возможных вариантов преобразования независимости, т.е. имеет место следующее свойство:

$$F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n) \perp \{\xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

Доказательство. Найдем, сначала, законы распределения семейства случайных величин $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$ и случайной величины $F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n)$. Так как $f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$ — совместная плотность распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$,

то совместная плотность величин $\xi_2, \dots, \xi_n$ имеет вид:

$$f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1.$$

Тогда

$$F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{1|2\dots n}(t|x_2, \dots, x_n) dt,$$

где

$$f_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)}{f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n)}, & \text{когда } f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) \neq 0; \\ 0, & \text{когда } f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Введем область

$$D := \{(x_2, \dots, x_n) : f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) \neq 0\},$$

тогда

$$\overline{D} = \{(x_2, \dots, x_n) : f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) = 0\}.$$

Покажем теперь справедливость утверждения (1) для случайной величины $F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n)$ и семейства $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Выберем произвольные измеримые и ограниченные $u(\cdot, \dots, \cdot)$ и $v(\cdot)$. Тогда

$$\mathbb{M}\{u(\xi_2, \dots, \xi_n)\} = \int \dots \int_D u(x_2, \dots, x_n) f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} &= \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n)) f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R} \times D} f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) v(F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)) \frac{f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)}{f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int \dots \int_D \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)) f_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n) dx_1 \right] \times \\ &\quad \times f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Введем в этом интеграле замену переменных

$$t = F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} &= \\ &= \int \dots \int_D f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) \left[\int_0^1 v(t) dt \right] dx_2 \dots dx_n = \int_0^1 v(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны

$$\mathbb{M}\{u(\xi_2 \dots \xi_n) v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} =$$

$$= \int \dots \int_{\mathbb{R} \times D} u(x_2, \dots, x_n) v(F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)) f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots, dx_n.$$

И, вновь применяя замену (1), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(\xi_2 \dots \xi_n) v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} = \\ = \left(\int \dots \int_D u(x_2, \dots, x_n) f_{2\dots n}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) \left(\int_0^1 v(t) dt \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, используя формулы (3) и (2), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(\xi_2 \dots \xi_n) v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} = \\ = \mathbb{M}\{u(\xi_2, \dots, \xi_n)\} \mathbb{M}\{v(F_{1|2\dots n}(\xi_1|\xi_2, \dots, \xi_n))\} \end{aligned}$$

для любых измеримых и ограниченных $u(\cdot, \dots, \cdot)$ и $v(\cdot)$.

Замечание. В том случае, когда случайная величина ξ_1 имеет плотность, а величины $\xi_2, \dots, \xi_n$ имеют дискретное распределение, функция условного распределения так же остается преобразованием независимости.

Рассмотрим теперь семейства состоящие из одних дискретных случайных величин. Как показывает следующая теорема, для таких семейств условное распределение $F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$ преобразованием независимости уже не является.

Теорема 2. Если ξ_1 и ξ_2 — дискретные случайные величины, то

$$F_{1|2}(\xi_1|\xi_2) \not\sim \xi_2 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \xi_1 \not\sim \xi_2.$$

Доказательство. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 принимают значения a_i и b_j с вероятностями:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = a_i\} = p_i, \quad \mathbb{P}\{\xi_2 = b_j\} = p_j, \quad \mathbb{P}\{\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j\} = p_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

Будем считать, что все $p_{ij} > 0$, а числа a_i и b_j упорядочены по возрастанию. Тогда

$$p_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_j} \quad \text{и} \quad F_{1|2}(x|b_j) = \sum_{\{i: a_i \leq x\}} p_{ij}.$$

Вновь воспользуемся критерием (1). Для этого рассмотрим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(\xi_2) v(F_{1|2}(\xi_1|\xi_2))\} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u(b_j) v(F_{1|2}(a_i|b_j)) p_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n u(b_j) q_j \sum_{i=1}^m v(F_{1|2}(a_i|b_j)) p_{ij}. \end{aligned}$$

Для выполнения свойства независимости это математическое ожидание должно равняться произведению

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(\xi_2)\} \mathbb{M}\{v(F_{1|2}(\xi_1|\xi_2))\} &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^n u(b_j) q_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m v(F_{1|2}(a_i|b_k)) p_{ik} \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n u(b_j) q_j \right) \left(\sum_{k=1}^n q_k \sum_{i=1}^m v(F_{1|2}(a_i|b_k)) p_{ik} \right). \end{aligned}$$

или

$$\alpha_m = \mathbb{P}\{\xi_1 = a_m | \xi_2 = b_j\}.$$

Отсюда

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = a_m; \xi_2 = b_j\} = \alpha_m \mathbb{P}\{\xi_2 = b_j\},$$

а так как

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{P}\{\xi_2 = b_j\} = 1,$$

то

$$\alpha_m = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\{\xi_1 = a_m, \xi_2 = b_j\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = a_m\} = p_m.$$

Следовательно

$$p_{m|j} = p_m, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Поэтому условие независимости (2) примет вид

$$\alpha(l) = p_m + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{s=1}^i p_{s|j} \right)^l p_{i|j}, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\alpha(l) - p_m = (1 - p_m)^l \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{i|j}$$

и выделим $(m-1)$ слагаемое

$$\alpha(l) - p_m = (1 - p_m)^l \left[\left(\sum_{s=1}^{m-1} \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{m-1|j} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{i|j} \right].$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{m-1} \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} = 1,$$

то

$$\alpha(l) - p_m = (1 - p_m)^l \left[p_{m-1|j} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{i|j} \right]$$

и

$$\frac{\alpha(l) - p_m}{(1 - p_m)^l} = p_{m-1|j} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{i|j}, \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Устремим в этом равенстве $l \rightarrow \infty$. Так как при $i = \overline{1, m-2}$

$$0 < \sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} < 1,$$

то

$$\alpha_{m-1} := \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\alpha(l) - p_m}{(1 - p_m)^l} = p_{m-1|j}, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Отсюда, аналогично тому, как это было сделано выше, получим

$$\alpha_{m-1} = \mathbb{P}\{\xi_1 = a_{m-1}\} = p_{m-1}$$

и

$$p_{m-1|j} = p_{m-1} \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Тогда условие (3) примет вид

$$\frac{\alpha(l) - p_m}{(1 - p_m)^l} = p_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\sum_{s=1}^i \frac{p_{s|j}}{1 - p_m} \right)^l p_{i|j}, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Проводя далее аналогичные рассуждения, в результате получим равенства

$$p_{i|j} = p_i, \quad \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

А это означает, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 были изначально независимы.

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 останется справедливым и в том случае, когда мы не будем делать каких-либо предположений относительно типа распределения величины ξ_2 , но сохраним требование дискретности случайной величины ξ_1 .

Замечание 2. Проведем сравнение теорем 1 и 2 (для $n = 2$), то есть ситуаций, в одной из которых случайная величина ξ_1 непрерывна, а в другой — дискретна. В том случае, когда ξ_1 непрерывна, независимость $F_{1|2}(\xi_1|\xi_2)$ и ξ_2 эквивалентна условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(F_{1|2}(\xi_1|\xi_2)) f_{1|2}(x_1|x_2) dx_2 = C_v = \text{const}.$$

Это условие всегда выполняется в силу того, что случайная величина $F_{1|2}(\xi_1|x_2)$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ для любого x_2 , даже когда условная плотность $f_{1|2}(x_1|x_2)$ зависит не только от x_1 , но и от x_2 .

В дискретном случае, независимость случайных величин $F_{1|2}(\xi_1|\xi_2)$ и ξ_2 эквивалентна условию

$$\sum_{i=1}^m v\left(\sum_{s=1}^i p_{i|j}\right) p_{i|j} = \text{const}.$$

Однако, теперь случайная величина $F_{1|2}(\xi_1|b_j)$ имеет дискретное равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ для любого b_j , лишь в том случае, когда $p_{i|j} = p_i$, то есть когда ξ_1 и ξ_2 независимы.

Несмотря на то, что для дискретных случайных величин функция $F_{1|2 \dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$ не является преобразованием независимости, тем не менее для таких величин могут существовать преобразования независимости в виде других функции, разумеется, отличных от условного распределения $F_{1|2 \dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n)$.

Пример 1. Приведем пример пары зависимых дискретных случайных величин ξ_1 и ξ_2 , для которой существует преобразование независимости. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\mathbb{P}\{k\} = 1/6$ для любого $k = \overline{1, 6}$. Положим

$$\xi_1(1) = \xi_1(2) = \xi_1(3) = 0; \quad \xi_1(4) = \xi_1(5) = \xi_1(6) = 1;$$

$$\xi_2(1) = \xi_2(3) = \xi_2(5) = 0; \quad \xi_2(2) = \xi_2(4) = \xi_2(6) = 1.$$

Функцию $y = h(x_1, x_2)$ зададим с помощью таблицы

$$h(0, 0) = h(1, 1) = 1; \quad h(1, 0) = h(0, 1) = 0.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\xi_1 \not\perp \xi_2 \quad \text{и} \quad \xi_1 \not\perp h(\xi_1, \xi_2).$$

Теперь рассмотрим вопрос о (скалярном) преобразовании независимости одного семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ относительно другого семейства $\{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n\}$. Под преобразованием независимости, в этом случае, по аналогии с приведенным ранее определением для $m = 1$, мы будем понимать борелевскую функцию $y = h(x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n)$ для которой выполняется следующее свойство независимости

$$h(\xi_1, \dots, \xi_m; \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) \perp\!\!\!\perp \{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n\}.$$

Возникает вопрос, будет ли условное распределение вероятностей $F_{1\dots m|m+1\dots n}(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n)$ преобразованием независимости и в случае $m > 1$?

Как показывает следующий пример, уже при $m = 2$ и $n = 3$ пара случайных величин $F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)$ и ξ_3 может быть зависимой даже в случае абсолютно непрерывных распределений.

Пример 2. Рассмотрим симметричное трехмерное распределение Гумбела с плотностью

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = 1 + \alpha(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3), \quad x_i \in (0, 1), i = 1, 2, 3, \alpha \in (-1, 1).$$

Если $F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3) \perp\!\!\!\perp \xi_3$, то

$$\mathbb{M}\{F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\xi_3\} = \mathbb{M}\{F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\}\mathbb{M}\{\xi_3\}.$$

Однако в нашем примере это равенство не выполняется. Действительно, найдем вначале плотность распределения случайной величины $F_{12|3}(x_1, x_2 | x_3)$. Так как

$$f_3(x_3) = 1, \quad x_3 \in (0, 1)$$

то:

$$f_{12|3}(x_1, x_2 | x_3) = f_{123}(x_1, x_2, x_3),$$

и поэтому:

$$F_{12|3}(x_1, x_2 | x_3) = x_1 x_2 [1 + \alpha(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - 2x_3)], \quad x_i \in (0, 1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда, простые вычисления показывают, что

$$\mathbb{M}\{F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \mathbb{M}\{\xi_3\} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны

$$\mathbb{M}\{\xi_3 F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\} = \frac{1}{8} - \frac{1}{108}\alpha.$$

Таким образом, при $\alpha \neq 0$

$$\mathbb{M}\{F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\xi_3\} \neq \mathbb{M}\{F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)\}\mathbb{M}\{\xi_3\},$$

а следовательно $F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3) \not\perp\!\!\!\perp \xi_3$.

Однако, для некоторых семейств случайных величин свойство независимости

$$F_{1\dots m|m+1\dots n}(\xi_1, \dots, \xi_m | \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) \perp\!\!\!\perp \xi_{m+1}, \dots, \xi_n \quad (8)$$

может иметь место. Например, случайная величина $F_{12|3}(\xi_1, \xi_2 | \xi_3)$ не зависит от ξ_3 в тех случаях, когда условное распределение $F_{12|3}(x_1, x_2 | x_3)$ представимо в виде некоторой функции $G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3))$.

Приведем набросок доказательства этого утверждения. Пусть случайные величины $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ имеют совместную плотность $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$ и кроме того

$$F_{12|3}(x_1, x_2|x_3) = G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3)), \quad (9)$$

где $G(s_1, s_2)$ — двумерное распределение вероятностей, а $\varphi(x_1, x_3)$ и $\psi(x_2, x_3)$ — дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_3)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x_2} \geq 0.$$

В этом случае

$$f_{12|3}(x_1, x_2|x_3) = \frac{\partial^2 G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3))}{\partial s_1 \partial s_2} \frac{\varphi(x_1, x_3)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x_2}.$$

Для доказательства независимости установим справедливость равенства (1) для любых измеримых и ограниченных функций $u(\cdot, \dots, \cdot)$ и $v(\cdot)$. Рассмотрим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(F_{12|3}(\xi_1, \xi_2|\xi_3))v(\xi_3)\} &= \mathbb{M}\{u(G(\varphi(\xi_1, \xi_3), \psi(\xi_2, \xi_3)))v(\xi_3)\} = \\ &= \int \int \int_{\mathbb{R}^3} u(G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3)))v(x_3)f_{123}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(x_3)f_3(x_3) \left[\int \int_{\mathbb{R}^2} u(G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3)))f_{12|3}(x_1, x_2|x_3) dx_1 dx_2 \right] dx_3. \end{aligned}$$

Для внутреннего двойного интеграла нетрудно записать равенство

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^2} u(G(\varphi(x_1, x_3), \psi(x_2, x_3)))f_{12|3}(x_1, x_2|x_3) dx_1 dx_2 &= \\ &= \int \int_D u(G(s_1, s_2)) \frac{\partial^2 G(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (10)$$

используя замену переменных

$$\begin{cases} s_1 = \varphi(x_1, x_3), \\ s_2 = \psi(x_2, x_3), \end{cases}$$

с якобианом

$$J = \frac{\partial \varphi(x_1, x_3)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x_2}$$

и областью D , в которую преобразуется плоскость $\mathbb{R}^2$. Интеграл в правой части равенства (10) не зависит от переменной x_3 , в том случае когда от x_3 не зависит представление области D . Предполагая наличие этого свойства, получаем равенство (1):

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{u(F_{12|3}(\xi_1, \xi_2|\xi_3))v(\xi_3)\} &= \\ &= \left[\int \int_D u(G(s_1, s_2)) \frac{\partial^2 G(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 ds_2 \right] \left[\int_{\mathbb{R}} v(x_3)f_3(x_3) dx_3 \right] = \\ &= \mathbb{M}\{u(F_{12|3}(\xi_1, \xi_2|\xi_3))\} \mathbb{M}\{v(\xi_3)\}. \end{aligned}$$

Приведем примеры распределений, допускающих представление (9).

1. Распределение Коши с плотностью

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

В этом случае условная функция распределения записывается в виде

$$F_{12|3}(x_1, x_2|x_3) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{\sqrt{1+x_3^2}}} \int_{-\infty}^{\frac{x_2}{\sqrt{1+x_3^2}}} \frac{dt_1 dt_2}{(1+t_1^2+t_2^2)^2},$$

то есть,

$$\varphi(x_1, x_3) = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_3^2}} \text{ и } \psi(x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_3^2}},$$

а

$$G(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_2} \int_{-\infty}^{s_1} \frac{dt_1 dt_2}{(1+t_1^2+t_2^2)^2}$$

и область $D = \mathbb{R}^2$.

2. Распределения Дирихле с плотностью

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)}{\Gamma(v_3)\Gamma(v_1 + v_2 + v_4)} x_1^{v_1-1} x_2^{v_2-1} x_3^{v_3-1},$$

где все $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. (см. [11]).

Условная функция распределения в этом случае имеет вид

$$F_{12|3}(x_1, x_2|x_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{x_1}{1-x_3}} \int_0^{\frac{x_2}{1-x_3}} \frac{\Gamma(v_1 + v_2 + v_4)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)\Gamma(v_4)} t_1^{v_1-1} t_2^{v_2-1} (1-t_1-t_2)^{v_4-1} dt_1 dt_2,$$

то есть

$$\varphi(x_1, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3}, \quad \psi(x_2, x_3) = \frac{x_2}{1+x_3},$$

и

$$G(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} \frac{\Gamma(v_1 + v_2 + v_4)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)\Gamma(v_4)} t_1^{v_1-1} t_2^{v_2-1} (1-t_1-t_2)^{v_4-1} dt_1 dt_2,$$

а область $D = \{(s_1, s_2) : s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_1 + s_2 \leq 1\}$.

Заметим, что для гауссовского распределения представление (9) является прямым следствием теоремы о нормальной корреляции (см [1]).

2. Условные квантили

В этом параграфе мы будем рассматривать семейство случайных величин, функции распределения которых удовлетворяют следующему условию.

Условие А. Семейство случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ обладает совместной плотностью распределения $f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$, которая вместе со всеми своими маргинальными плотностями всюду положительна и непрерывна.

Напомним определение условных квантилей.

Определение 2. Для произвольных чисел $\pi, p_2, \dots, p_{n-1}$ из отрезка $[0, 1]$, условными квантилями будем называть функции $q_{1|2\dots n}^\pi(y_2, \dots, y_n)$ и $q_{i|n}^{p_i}(y_n)$, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^\pi(y_2, \dots, y_n) | y_2, \dots, y_n) &\equiv \pi, \\ F_{i|n}(q_{i|n}^{p_i}(y_n) | y_n) &\equiv p_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Заметим, что ввиду положительности плотности $f_{1...n}$ условные распределения $F_{1|2...n}$, $F_{i|n}$ строго монотонно возрастают по своим первым аргументам, поэтому уравнения, определяющие условные квантили, имеют единственные решения.

Теорема 3. Если семейство случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяет условию А, и преобразование независимости $h(x_1, \dots, x_n)$ величины ξ_1 относительно $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$ обладает свойствами:

- 1) функция $h(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$,
- 2) функция $h(x_1, \dots, x_n)$ строго монотонна,

то поверхности постоянного уровня преобразования независимости

$$h(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$$

являются условными квантилями случайной величины ξ_1 по случайным величинам $\xi_2, \dots, \xi_n$ т.е. $\forall c_1 \in \mathbb{R}, \exists c_2 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \{(x_1, \dots, x_n) : h(x_1, \dots, x_n) = c_1\} = \\ = \{(x_1, \dots, x_n) : F_{1|2...n}(x_1 | x_2, \dots, x_n) = c_2\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Вначале, рассматривая монотонно возрастающие функции, введём обращение функции $y_1 = h(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_1 . Для этого рассмотрим уравнение

$$h(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0.$$

Ввиду условий 1 и 2 из теоремы о неявной функции (см. [12, с. 449]) следует существование непрерывной на $\mathbb{R}^n$ функции

$$x_1 = h^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

При этом для любого $(y_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и, соответственно, для любого $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} h(h^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) &= y_1; \\ h^{-1}(h(x_1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) &= x_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, \dots, x_n) : h(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq u_1, x_2 \leq u_2, \dots, x_n \leq u_n\}, \\ B_1 &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq h^{-1}(u_1, x_2, \dots, x_n), x_2 \leq u_2, \dots, x_n \leq u_n\}. \end{aligned}$$

По свойствам функции h^{-1}

$$A_1 = B_1.$$

Поэтому из определения преобразования независимости получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_1\} F_{2...n}(u_2, \dots, u_n) = \\ = \int_{-\infty}^{u_2} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{u_n} dx_n \int_{-\infty}^{h^{-1}(u_1, x_2, \dots, x_n)} f_{1...n}(x_1, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство по $u_2, \dots, u_n$, ввиду непрерывности функций h^{-1} и $f_{1...n}$, будем иметь

$$\mathbb{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_1\} = \int_{-\infty}^{h^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n)} f_{1|2...n}(x_1 | u_2, \dots, u_n) dx_1.$$

Используя обозначение,

$$G_1(u_1) := \mathbb{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_1\},$$

последнее равенство можно переписать в виде

$$G_1(u_1) = F_{1|2\dots n}(h^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_2, \dots, u_n).$$

Положим $h^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n) = t_1$, тогда

$$u_1 = h(t_1, u_2, \dots, u_n)$$

и

$$h(t_1, u_2, \dots, u_n) = G_1^{-1}(F_{1|2\dots n}(t_1 \mid u_2, \dots, u_n)).$$

Поэтому следующие соотношения эквивалентны

$$F_{1|2\dots n}(t_1 \mid u_2, \dots, u_n) = \pi = \text{const},$$

$$t_1 = q_{1|2\dots n}^\pi(u_2, \dots, u_n),$$

$$h(t_1, u_2, \dots, u_n) = G_1^{-1}(\pi).$$

Теорема доказана.

Примем обозначение $\mathcal{F}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ для σ -алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Теорема 4. Если семейство случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяет условию А, то существует непрерывная функция $y_1 = g_1(x_1; x_2, \dots, x_n)$ и $\mathcal{F}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ -измеримая случайная величина δ_1 такие, что

- 1) $\xi_1 = g_1(\delta_1; \xi_2, \dots, \xi_n)$;
- 2) $\delta_1 \perp \mathcal{F}[\xi_2, \dots, \xi_n]$;
- 3) $q_{1|2\dots n}^\pi(\xi_2, \dots, \xi_n) = g_1(q_1^\pi; \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \forall \pi \in [0, 1]$.

Доказательство. В качестве g_1 выберем следующую функцию

$$g_1(x_1; x_2, \dots, x_n) := F_1^{-1}(F_{1|2\dots n}(x_1 \mid x_2, \dots, x_n)), \quad (2)$$

где через $F_1^{-1}(\cdot)$ мы обозначаем функцию обратную функции распределения $F_1(\cdot)$ случайной величины ξ_1 .

Положим

$$\delta_1 := g_1(\xi_1; \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Для доказательства п.3, используя возрастание функции

$$y_1 = g_1(x_1; x_2, \dots, x_n)$$

по аргументу x_1 , отметим совпадение случайных событий

$$\{\xi_1 \leq g_1^{-1}(q_1^\pi \mid \xi_2, \dots, \xi_n)\} = \{\delta_1 \leq q_1^\pi\}.$$

Поэтому, на основании свойств случайной величины δ_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} \pi = \mathbb{P}\{\delta_1 \leq q_1^\pi\} &= \mathbb{P}\{\delta_1 \leq q_1^\pi \mid \xi_2, \dots, \xi_n\} = \\ &= \mathbb{P}\{\xi_1 \leq g_1^{-1}(q_1^\pi \mid \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \xi_2, \dots, \xi_n\}, \end{aligned}$$

т.е. $\mathbb{P}$ -почти наверное

$$q_{1|2\dots n}^\pi(\xi_2, \dots, \xi_n) = g_1^{-1}(q_1^\pi \mid \xi_2, \dots, \xi_n),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Следует отметить результаты, связанные с представлением случайных величин на одном вероятностном пространстве с помощью "рандомизирующей" случайной величины (см. [13]; [14, с. 571]; [15, с. 89, 90]). Однако в этих работах нет представления случайной величины δ_1 в явном виде с помощью условного распределения вероятностей.

Ограничиваясь случаем $n = 2$, рассмотрим утверждения теоремы 4 с точки зрения теории статистического оценивания. Будем считать, что для пары случайных величин (ξ_1, ξ_2) величина ξ_1 недоступна для наблюдений, а случайная величина ξ_2 наблюдаема. Тогда соотношение

$$\xi_1 = g_1(\delta_1; \xi_2)$$

можно рассматривать как "уравнение наблюдения", а случайную величину δ_1 как "нелинейную" погрешность наблюдения случайной величины ξ_1 по случайной величине ξ_2 . При такой точке зрения соотношение

$$q_{1|2}^\pi(\xi_2) = g_1(q_1^\pi; \xi_2), \quad \forall \pi \in]0, 1[$$

означает, что условные квантили (и медианы, если $\pi = 0, 5$) являются оценками с независимой "нелинейной" погрешностью. Сравнивая квантильную (медианную) оценку с условным математическим ожиданием можно отметить следующее обстоятельство. С одной стороны, для нахождения условного математического ожидания $\mathbf{M}\{\xi_1|\xi_2\}$, (как мнк-оценки, см. [1, с. 253, 255]), используется оператор ортогонального проектирования

$$S : \mathbf{L}^2\{\Omega, \mathcal{F}[\xi_1, \xi_2], \mathbf{P}\} \rightarrow \mathbf{L}^2\{\Omega, \mathcal{F}[\xi_2], \mathbf{P}\}$$

и

$$S\xi_1 = \mathbf{M}\{\xi_1|\xi_2\}.$$

А для нахождения погрешности среднеквадратического оценивания

$$\xi_1 - \mathbf{M}\{\xi_1|\xi_2\},$$

используется оператор ортогонального проектирования на ортогональное дополнение $\mathbf{L}^2\{\Omega, \mathcal{F}[\xi_2], \mathbf{P}\}^\perp$

$$S^\perp \xi_1 = \xi_1 - \mathbf{M}\{\xi_1|\xi_2\}.$$

С другой стороны, в случае квантильного оценивания соотношение

$$\delta_1 = g_1(\xi_1 | \xi_2)$$

показывает, что для нахождения "нелинейной" погрешности квантильного (медианного) оценивания нужно использовать преобразование независимости случайных величин.

Теорема 5. Если семейство случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяет условию А, то для любого $\pi \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$q_1^{\pi^2} \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi(\xi_2, \dots, \xi_n)) \leq q_1^{\pi(2-\pi)}, \quad (3)$$

где через $q^p(\zeta)$ обозначена безусловная квантиль порядка p случайной величины ζ , а через q_1^p безусловная квантиль порядка p случайной величины ξ_1 .

Доказательство. Обозначим для краткости

$$q_{1|2\dots n}^\pi := q_{1|2\dots n}^\pi(\xi_2, \dots, \xi_n).$$

При доказательстве теоремы 4 было отмечено совпадение событий

$$\{\xi_1 \leq g_{1|2\dots n}^{-1}(q_1^\pi | \xi_2, \dots, \xi_n)\} = \{\delta_1 \leq q_1^\pi\},$$

а также независимость случайного события $\{\delta_1 \leq q_1^\pi\}$ от события

$$\{q_{1|2\dots n}^\pi \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi)\}.$$

Так как

$$\{\xi_1 \leq q_{1|2\dots n}^\pi\} \cap \{q_{1|2\dots n}^\pi \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi)\} \subseteq \{\xi_1 \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi)\},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_1 \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi)\} &\geq \\ &\geq \mathbb{P}\{\xi_1 \leq q_{1|2\dots n}^\pi\} \mathbb{P}\{q_{1|2\dots n}^\pi \leq q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi)\} = \pi^2. \end{aligned}$$

Следовательно $q^\pi(q_{1|2\dots n}^\pi) \geq q_1^{\pi^2}$. Повторяя рассуждения для дополнений рассмотренных событий, получаем доказательство второго неравенства.

Кроме задания условных квантилей с помощью уравнений (1) мы будем рассматривать условные квантили, как поверхности (или кривые) проходящие через отмеченную точку. Именно, фиксируя точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, зададим условные квантили с помощью уравнений

$$\begin{aligned} F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^{(x)}(y_2, \dots, y_n) | y_2, \dots, y_n) &\equiv F_{1|2\dots n}(x_1 | x_2, \dots, x_n), \\ F_{i|n}(q_{i|n}^{(x_i, x_n)}(y_n) | y_n) &\equiv F_{i|n}(x_i | x_n), \quad i = 1, n-1. \end{aligned}$$

Определение 3. Будем говорить, что для семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ в точке $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ выполняется свойство воспроизводимости многомерных условных квантилей при сужении на одномерные условные квантили, если для любого $y_n \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство:

$$q_{1|2\dots n}^{(\mathbf{x})}(q_{2|n}^{(x_2, x_n)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}, x_n)}(y_n), y_n) = q_{1|n}^{(x_1, x_n)}(y_n). \quad (4)$$

Геометрически это означает, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ при сужении графика "большой" условной квантили $y_1 = q_{1|2\dots n}^{(x)}(y_2, \dots, y_n)$ на кривую параметризованную одномерными условными квантилями $(q_{2|n}^{(x_2, x_n)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}, x_n)}(y_n), y_n)$ мы получаем одномерную условную квантиль $q_{1|n}^{(x_1, x_n)}(y_n)$. Другими словами, кривая

$$\{z \in \mathbb{R}^n : z = (q_{1|n}^{(x_1, x_n)}(y_n), q_{2|n}^{(x_2, x_n)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}, x_n)}(y_n), y_n)\}$$

лежит на графике условной квантили

$$\{(y_1, y_2, \dots, y_n) : y_1 = q_{1|2\dots n}^{(x)}(y_2, \dots, y_n)\}.$$

Замечание. В класс распределений обладающих свойством воспроизводимости многомерных условных квантилей входят многомерные распределения Гаусса, Стьюдента (Коши), Дирихле и др. (см., например, [9]).

Сейчас мы покажем, что при выполнении свойства воспроизводимости только в одной точке "большой" условной квантили, имеет место выполнение этого свойства и во всех остальных точках этой квантили.

Именно, для семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяющих условию А, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Если свойство воспроизводимости условных квантилей (7) выполняется в одной точке $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, то для любой точки $(z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедливо равенство

$$q_{1|2\dots n}^{(x_1^0, \dots, x_n^0)}(z_2, \dots, z_n) \left(q_{2|n}^{(x_2^0, x_n^0)}(z_n), \dots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^0, x_n^0)}(z_n), y_n \right) \equiv q_{1|n}^{(x_1^0, x_n^0)}(z_n), \quad (5)$$

для любых $y_n \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Из определения условной квантили проходящей через отмеченную точку следуют равенства

$$\begin{aligned} F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^{(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)}(z_2, \dots, z_n), z_2, \dots, z_n)(y_2, \dots, y_n) &= \\ &= F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^{(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)}(z_2, \dots, z_n)|z_2, \dots, z_n) = F_{1|2\dots n}(x_1^\circ|x_2^\circ, \dots, x_n^\circ), \\ F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^{(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)}(y_2, \dots, y_n)|y_2, \dots, y_n) &= F_{1|2\dots n}(x_1^\circ|x_2^\circ, \dots, x_n^\circ). \end{aligned}$$

Поэтому, ввиду строгой монотонности функции $F_{1|2\dots n}(y_1|y_2, \dots, y_n)$ по первому аргументу, будем иметь

$$q_{1|2\dots n}^{(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)}(z_2, \dots, z_n, z_2, \dots, z_n)(y_2, \dots, y_n) = q_{1|2\dots n}^{(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)}(y_2, \dots, y_n).$$

Для одномерных условных квантилей справедливы аналогичные равенства.

Приведем еще одно любопытное свойство условных квантилей. Для этого рассмотрим функцию

$$y_1 = q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(y_2),$$

считая x_1 аргументом, y_1 — значением функции, а пару (x_2, y_2) — параметрами. Тогда функция

$$x_1 = q_{1|2}^{(y_1, y_2)}(x_2),$$

где y_1 — аргумент, x_1 — значение функции, а пара (x_2, y_2) — параметры, является обратной по отношению к функции (7). Действительно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. Для любой точки $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ справедливо следующее равенство

$$q_{1|2}^{(q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(y_2), y_2)}(x_2) \equiv x_1, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^1. \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим

$$x_1^* := q_{1|2}^{(q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(y_2), y_2)}(x_2).$$

Тогда

$$F_{1|2}(x_1^*|x_2) = F_{1|2}(q_{1|2}^{(q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(y_2), y_2)}(x_2)|x_2) = F_{1|2}(q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(y_2)|y_2) = F_{1|2}(x_1|x_2).$$

Отсюда, ввиду строгой монотонности функции $F_{1|2}(x_1|x_2)$ по x_1 при любом фиксированном x_2 , получаем равенство $x_1^* = x_1$.

В определении 3 свойства воспроизводимости, как видно из равенства (7), координаты точек $\{(x_i, x_n), i = 2, n-1\}$ определяющих условные квантили $q_{i|n}^{(x_i, x_n)}$ совпадают с соответствующими координатами точки x квантили $q_{1|2\dots n}^{(x)}$. В следующей теореме точки, определяющие условные квантили, выбираются произвольно.

Теорема 8. Если для семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяющих условию А, свойство воспроизводимости условных квантилей (7) выполняется в каждой точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то для любого множества точек $\{(z_k, w_n) \in \mathbb{R}^2; k = 2, n-1\}$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} q_{1|2\dots n}^{(\mathbf{x})}(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(y_n), y_n) &= \\ &= q_{1|n}^{(\mathbf{x})}(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(w_2), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(w_2), w_2, w_2)(y_n) = \\ &= q_{1|n}^{(\mathbf{x})}(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(w_{n-1}), \dots, q_{n-2|n}^{(z_{n-2}, w_{n-2})}(w_{n-1}), z_{n-1}, w_{n-1}, w_{n-1})(y_n). \end{aligned}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством первого равенства. Остальные равенства доказываются аналогично. Введем вспомогательный вектор

$$\mathbf{u} = (z_2, q_{3|n}^{(z_3, w_3)}(w_2), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(w_2), w_2) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_{1|2\dots n}^{(x)}(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(y_n), y_n) &= \\ &= q_{1|2\dots n}^{(q_{1|2\dots n}^{(x)}(\mathbf{u}), \mathbf{u})}(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(y_n), q_{3|n}^{(z_3, w_3)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(y_n), y_n) = \\ &= q_{1|2\dots n}^{(q_{1|2\dots n}^{(x)}(\mathbf{u}), \mathbf{u})}\left(q_{2|n}^{(z_2, w_2)}(y_n), q_{3|n}^{(q_{3|n}^{(z_3, w_3)}(w_2), w_2)}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{(q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(w_2), w_2)}(y_n), y_n\right) = \\ &= q_{1|n}^{(q_{1|2\dots n}^{(x)}(z_2, q_{3|n}^{(z_3, w_3)}(w_2), \dots, q_{n-1|n}^{(z_{n-1}, w_{n-1})}(w_2), w_2), w_2)}(y_n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет сформулировать новый вариант определения воспроизводимости условных квантилей, в котором квантили, как поверхности (линии) постоянного уровня, будут определяться с помощью заданных вероятностей (порядков).

Определение 4. Будем говорить, что для распределения вероятностей $F_{1\dots n}(y_1, \dots, y_n)$ выполняется свойство воспроизводимости многомерных условных квантилей при сужении на одномерные условные квантили, если для любого набора $(\pi, p_2, \dots, p_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ существует число $p_1 \in [0, 1]$ такое, что

$$q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) = q_{1|n}^{p_1}(y_n)$$

для любого $y_n \in \mathbb{R}$.

В следующей теореме мы приводим формулу для вычисления числа p_1 .

Теорема 9. Если для семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяющих условию А, выполняется свойство воспроизводимости многомерных условных квантилей (7), то для любого набора $(\pi, p_2, \dots, p_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ справедливы следующие равенства

- 1) $F_{1|n}(q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) | y_n) = \text{const},$
- 2) $q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) = q_{1|n}^{p_1}(y_n),$

где $p_1 = F_{1|n}(q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) | y_n)$.

Доказательство. Для произвольных чисел $\pi, p_2, \dots, p_{n-1}$ из отрезка $[0, 1]$ рассмотрим условные квантили определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} F_{1|2\dots n}(q_{1|2\dots n}^{\pi}(y_2, \dots, y_n) | y_2, \dots, y_n) &= \pi, \\ F_{2|n}(q_{2|n}^{p_2}(y_n) | y_n) &= p_2, \\ &\dots\dots\dots \\ F_{n-1|n}(q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n) | y_n) &= p_{n-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее, используя свойство воспроизводимости (7), можно утверждать, что функция $q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n)$ является условной квантилью, соответствующей условному распределению $F_{1|n}(\cdot | \cdot)$, т.е. для любого $y_n \in \mathbb{R}$

$$F_{1|n}(q_{1|2\dots n}^{\pi}(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) | y_n) = \text{const}.$$

Поэтому набору чисел $(\pi, p_2, \dots, p_{n-1})$ можно поставить в соответствие единственное число $p_1 \in [0, 1]$ такое, что

$$p_1 = F_{1|n}(q_{1|2\dots n}^\pi(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n)|y_n). \quad (7)$$

Таким образом, свойство воспроизводимости (7) можно переписать в следующем виде

$$q_{1|2\dots n}^\pi(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) = q_{1|n}^{p_1}(y_n). \quad (8)$$

Теорема 10. Если для семейства случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяющих условию А, выполняется свойство воспроизводимости многомерных условных квантилей (7), то для любого набора чисел $p_2, \dots, p_{n-1}$ из отрезка $[0, 1]$, найдется функция распределения $w = H_{p_2\dots p_{n-1}}(z)$, $z \in [0, 1]$ такая, что в каждой точке $(y_1, y_n) \in \mathbb{R}^2$ справедливо равенство

$$F_{1|2\dots n}(y_1|q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) = H_{p_2\dots p_{n-1}}(F_{1|n}(y_1|y_n)); \quad (9)$$

Доказательство. Выберем произвольную точку $(y_1, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Для этой точки найдем числа

$$\begin{aligned} \pi &:= F_{1|2\dots n}(y_1|q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n), \\ p_1 &:= F_{1|n}(y_1|y_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем вспомогательную функцию

$$G_{p_2, \dots, p_n}(\pi) := F_{1|n}(q_{1|2\dots n}^\pi(q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n)|y_n).$$

Левая часть этого равенства не зависит от y_n , так как, ввиду пункта 2 теоремы 8, при фиксированных $p_2, \dots, p_{n-1}$, от y_n не зависит правая часть равенства. Таким образом

$$G_{p_2, \dots, p_{n-1}}(\pi) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1],$$

и

$$p_1 = G_{p_2, \dots, p_{n-1}}(\pi).$$

Используя непрерывность и строгое монотонное возрастание условных распределений $F_{1|2\dots n}$ и $F_{1|n}$ по своим первым аргументам можно утверждать, что $G_{p_2, \dots, p_{n-1}}$ — непрерывная и строго возрастающая функция, обладающая свойствами

$$G_{p_2, \dots, p_{n-1}}(0) = 0, \quad G_{p_2, \dots, p_{n-1}}(1) = 1.$$

Тогда, используя теорему о существовании и непрерывности обратной функции, можно определить

$$H_{p_2, \dots, p_{n-1}}(\cdot) := G_{p_2, \dots, p_{n-1}}^{-1}(\cdot),$$

т.е.

$$\pi = H_{p_2, \dots, p_{n-1}}(p_1)$$

что вместе с (2) завершает доказательство нашего утверждения.

Следствие. Для любого вектора $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned} F_{1|2\dots n}(y_1|q_{2|n}^{p_2}(y_n), \dots, q_{n-1|n}^{p_{n-1}}(y_n), y_n) = \\ = H(F_{1|n}(y_1|y_n)|F_{2|n}(y_2|y_n), \dots, F_{n-1|n}(y_{n-1}|y_n)), \end{aligned} \quad (11)$$

где $H(z_1|z_2, \dots, z_{n-1})$ — условная функция распределения случайной величины $\zeta_1 := F_{1|n}(\xi_1|\xi_n)$ относительно случайных величин

$$\zeta_2 := F_{2|n}(\xi_2|\xi_n), \dots, \zeta_{n-1} := F_{n-1|n}(\xi_{n-1}|\xi_n).$$

Доказательство. Введем обозначения :

$$y_k := q_{k|n}^{p_k}(y_n),$$

тогда

$$F_{k|n}(y_k|y_n) = p_k, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

В новых переменных равенство (14) принимает вид

$$F_{1|2\dots n}(y_1|y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = H_{F_{2|n}(y_2|y_n)\dots F_{n-1|n}(y_{n-1}|y_n)}(F_{1|n}(y_1|y_n)).$$

Это соотношение позволяет интерпретировать функцию $H_{p_2\dots p_n}(p_1)$ как условное распределение $H(p_1|p_2, \dots, p_n)$, случайной величины $\zeta_1 := F_{1|n}(\xi_1|\xi_n)$ относительно случайных величин $\zeta_2 := F_{2|n}(\xi_2|\xi_n), \dots, \zeta_{n-1} := F_{n-1|n}(\xi_{n-1}|\xi_n)$ (см. [9]).

Литература

- [1] Ширяев, А.Н. Вероятность. Т. 1 / А.Н.Ширяев. – М.: МЦНМО, 2004.
- [2] Rosenblatt, M. Remarks on a multivariate transformation / M. Rosenblatt. – Ann. Math. Stat.. – 1952. – V. 23. – P. 470–472.
- [3] Мартынов, Г.В. Критерии омега-квадрат / Г.В. Мартынов. – М.: Наука, 1978.
- [4] Шатских, С.Я. Об одном свойстве условной медианы / С.Я. Шатских. – В сб. Мера и интеграл. – Куйбышев: Куйбышевский ун-т, 1988. – С. 156–163.
- [5] Bertoin, J. Probabilities: course de licence de mathematiques appliquees / J. Bertoin. – Universite Paris 6, 2001.
- [6] Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2 / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.
- [7] Шатских, С.Я. Об одном варианте преобразования независимости / С.Я. Шатских. – В сб. Мера и интеграл. – Самара: Самарский ун-т, 1995. – С. 99–112.
- [8] Shatskih S. Ya. Multivariate Cauchy distribution as locally gaussian distributions / S.Ya. Shatskih // Journal of Math. Sciences. – NY, 1996. – V. 78. – №1. – P. 102–108.
- [9] Шатских, С.Я. Преобразование независимости семейства случайных величин обладающих воспроизводимостью условных квантилей / С.Я. Шатских. – Вестник Самарского госуниверситета. Естественная серия. – №2(24). – 2002. – С. 107–119.
- [10] Комлев, А.Н. Преобразования независимости случайных величин и связанные с ним свойства условных квантилей / А.Н. Комлев, С.Я. Шатских // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2005, Т. 12. – В. 3. – С. 661–662.
- [11] Уилкс, С. Математическая статистика / С. Уилкс. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
- [12] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1962.
- [13] Скороход, А.В. Об одном представлении случайных величин / А.В. Скороход // Теория вероятностей и её применения. – Т. XXI. – В. 3. – 1976. – С. 645–648.
- [14] Гихман, И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Киев: Наук. думка, 1982.

[15] Kallenberg O. Foundations of modern probability / O.Kallenberg. Springer, 1997.

Поступила в редакцию 05/VII/2007;
в окончательном варианте — 05/VII/2007.

CONDITIONAL DISTRIBUTION AS A TRANSFORMATION OF INDEPENDENCE OF RANDOM VARIABLES

© 2007 A.N. Komlev, S.Ya. Shatskih²

The paper deals with the conditional distributions of the corresponding systems of random variables as a transformation of independence. In the case of variables with the smooth joint distribution function it is shown, that the conditional distribution is an example of the transformations of independence. While for systems of discrete random variables the conditional distribution does not have a similar property. With the transformations of independence related properties of the joint distributions of random variables which have reproducibility of multivariate conditional quantiles under the restriction to univariate conditional quantiles are studied.

Paper received 05/VII/2007.

Paper accepted 05/VII/2007.

²Komlev Alexander Nikolaevich (alexander04@list.ru), Shatskih Sergey Yakovlevich (shatskih@ssu.samara.ru), Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.