

ОБОБЩЕННАЯ И ФРЕДГОЛЬМОВА РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2007 О.А. Вихрева¹

В данной работе изучается один класс весовых пространств типа Соболева. Кроме того, доказаны теоремы обобщенной и фредгольмовой разрешимости для смешанной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка, вырождающегося на основании цилиндрической области.

1. Предварительные сведения

Изучению весовых пространств С.Л. Соболева и эллиптических уравнений с вырождением на границе посвящено много работ [1–8]. В работе [1] доказаны теоремы вложения и компактности для пространства со степенным характером вырождения метрики, которая определяется неотрицательно определенной квадратичной формой. В работе [3] рассматривается некоторое обобщение результата [1] на случай произвольного вырождения метрики на границе области. В работе [4] даны теоремы существования и единственности для первой и второй краевых задач со степенным вырождением, рассмотрены также спектральные свойства и фредгольмовость. В работе [7] доказана альтернатива Фредгольма для третьей краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения.

Данная работа позволяет обобщить полученные ранее результаты [1, 3] для одного класса весовых пространств С.Л. Соболева на случай произвольного вырождения метрики на границе области Q . Также доказаны теоремы обобщенной и фредгольмовой разрешимости для смешанной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка, вырождающегося на основании цилиндрической области.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subseteq R^n$ ограниченная область с границей γ . Положим $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $\Gamma = \gamma \times (0, T)$, $0 \leq t \leq T$.

¹Вихрева Ольга Анатольевна (safonovata@mail.ru), Институт математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова, 677011, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

В области Q рассмотрим эллиптическое уравнение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(t) \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) +$$

$$+ a(x, t) u_t + c(x, t) u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

где весовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию: $\varphi(t) > 0$ непрерывная функция при $0 \leq t \leq T$, $\varphi(0) = 0$ при $t = 0$, а $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{ij}(x)$ -вещественные непрерывные в Ω функции, удовлетворяющие условиям симметричности: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Предположим, что выполнено неравенство

$$Re \sum a_{ij} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \xi \in C^n. \quad (2)$$

Положим
$$I = \int_0^T \frac{1}{\varphi(t)} dt.$$

Введем вспомогательную функцию

$$S(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{d\xi}{\varphi}, & I < \infty, \\ \int_t^T \frac{d\xi}{\varphi}, & I = \infty. \end{cases}$$

Будем считать, что вблизи Ω_0 выполнено условие

$$a \geq -C^2 S^{-1}(t). \quad (3)$$

Пусть $\overset{\circ}{H}_1$ — замыкание класса функций из $C^\infty(\bar{Q})$, равных нулю вблизи $t = 0$ и Γ , по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2 = \int_Q \left[\varphi |u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i}|^2 + |u|^2 \right] dQ.$$

Краевая задача: Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{\tilde{\Gamma}} = 0, \quad (u_t - \mu(x)u)|_{\bar{\Omega}_T} = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{\Gamma} = \begin{cases} \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Gamma}, & I < \infty, \\ \bar{\Gamma}, & I = \infty \end{cases}$ и $\mu(x)$ — вещественная непрерывная функция в $\bar{\Omega}$.

Определение 1. Функция $u \in \overset{\circ}{H}_1(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1), (4), если выполнено интегральное тождество

$$B(u, \eta) = \int_Q [\varphi u_t \bar{\eta}_t + \sum a_{ij} \bar{\eta}_{x_i} u_{x_j} + a u \bar{\eta}_t - (c - a_t) u \bar{\eta}] dQ -$$

$$- \int_{\Omega_T} [\varphi(T) \mu(x) + a(x, T)] u \bar{\eta} dx = - \int_Q f \bar{\eta} dQ, \quad (5)$$

где $\eta \in \hat{H}_1(Q) = \{\eta \in \overset{\circ}{H}_1(Q), \text{ равных нулю вблизи } \Omega_0\}$.

3. Ограниченность вложения H_1 в $L_{2,\sigma}(Q)$

Пусть H_1 — гильбертово пространство, полученное замыканием класса $C^\infty(\overline{Q})$ по норме

$$\|u\|_{H_1}^2 = \int_Q \left[\varphi |u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i}|^2 + |u|^2 \right] dQ.$$

Теорема 1. Для любой функции из H_1 справедлива оценка

$$\|u\|_{L_{2,\sigma}(Q)}^2 = \int_Q \sigma(t) |u|^2 dQ \leq C_1 \|u\|_{H_1}^2, \quad (6)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $u(x, t)$, $\sigma(t)$ — достаточно гладкая функция, $\sigma(t) > 0$ при $t > 0$ и при $0 \leq t \leq 2h < T$

$$\sigma(t) = \begin{cases} O(\varphi^{-1}(t)S^{-2}(t)), & \text{при } I = \infty, \\ O(\varphi^{-1}(t)S^{-1}(t)|\ln S(t)|^{-1-\varepsilon_0}), & \varepsilon_0 > 0, I < \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Для случая $I = \infty$ рассмотрим неотрицательную гладкую функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) = 1$ при $0 \leq t \leq h$, $\xi(t) = 0$ при $2h \leq t \leq T$. Заметим, что искомую оценку (6) достаточно доказать для $u(x, t)$ из $C^\infty(\overline{Q})$. Положим $\vartheta(x, t) = \xi(t)u(x, t)$. Тогда в силу обобщенного неравенства Харди [6] будем иметь оценку

$$\|\vartheta\|_{L_{2,\sigma}(Q)}^2 \leq C_2 \int_\Omega dx \int_0^{2h} \varphi^{-1}(t)S^{-2}(t)\vartheta^2(x, t)dt \leq 4C_2 \int_\Omega dx \int_0^{2h} \varphi(t)\vartheta_t^2(x, t)dt,$$

из которой на основании

$$|\vartheta_t|^2 \leq 2\xi^2 |u_t|^2 + 2\xi_t^2 |u|^2$$

получаем

$$\|\vartheta\|_{L_{2,\sigma}(Q)}^2 \leq C_1 \int_Q [\varphi |u_t|^2 + |u|^2] dQ. \quad (7)$$

Тогда (6) немедленно следует из неравенства (7).

При $I < \infty$ и $0 < \delta < h$ выберем τ, t так, чтобы выполнялось $h < \tau < 2h$, $0 < t < \delta$. Тогда из известной формулы Ньютона–Лейбница следует неравенство

$$|u(x, t)|^2 \int_h^{2h} S^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \left[\int_h^{2h} S^{-1}(\tau) |u(x, \tau)|^2 d\tau + h \int_0^{2h} \varphi(t) |u_t(x, t)|^2 dt \right].$$

Умножив обе части этого неравенства на $\sigma(t)$, затем интегрируя полученное неравенство по Ω и t от 0 до δ получаем

$$\int_0^\delta dt \int_\Omega \sigma(t) |u(x, t)|^2 dx \leq C_3 |\ln S(\delta)|^{-\varepsilon_0} \|u\|_{H_1}^2. \quad (8)$$

Из (8) следует оценка (6). Теорема доказана.

Следствие 1. Для любой функции из $\dot{H}_1$ справедлива оценка

$$\|u\|_{L_{2,\sigma_0}(Q)}^2 \leq C_1 \|u\|_{H_1}^2, \quad (9)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $u(x, t)$, $\sigma_0(t)$ -достаточно гладкая функция, $\sigma_0(t) > 0$ при $t > 0$ и $0 \leq t \leq 2h$

$$\sigma_0(t) = O(\varphi^{-1}(t)S^{-2}(t)).$$

Доказательство. Рассмотрим любую функцию $u(x, t)$ из $\mathring{H}_1$. Из ограниченности вложения $\mathring{H}_1$ в H_1 неравенство (9) при $I = \infty$ следует из теоремы 1.

Пусть $I < \infty$ и область Q лежит в параллелепипеде $K_T = \Delta \times (0, T')$, $T < T'$. (без ограничения общности можно считать, что область Q именно такая). Функцию $u(x, t)$ продолжим нулем вне области Q . Используя обобщенное неравенство Харди [6], получаем

$$\|u\|_{L_{2,\sigma_0}}^2 \leq C_4 \int_{\Delta} dx \int_0^{\infty} \varphi^{-1} S^{-2} u^2(x, t) dt \leq 4C_4 \int_{\Delta} dx \int_0^{\infty} \varphi u_t^2(x, t) dt.$$

Отсюда следует (9). Следствие доказано.

Теорема 2. Ограниченное в H_1 множество компактно в $L_{2,r}(Q)$, где $r(t) > 0$ для $t > 0$, причем

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} \sup_{t \leq \xi} r(t)\sigma^{-1}(t) = 0 \text{ при } I = \infty, \quad r(t) = \sigma(t) \text{ при } I < \infty$$

(функция $\sigma(t)$ определена в теореме 1).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и M есть множество, для которого $\|u\|_{H_1} \leq C_5$. Рассмотрим случай $I = \infty$. Для достаточно малого δ , $0 < \delta < h$, на основании (6) имеем

$$\int_0^{\delta} dt \int_{\Omega} r(t) |u(x, t)|^2 dx \leq C_1 C_5^2 \sup_{t \leq \delta} \frac{r(t)}{\sigma(t)} < \varepsilon^2, \quad u \in M. \quad (10)$$

Поскольку вложение $W_2^1(Q \cap (t > \delta))$ в $L_{2,r}(Q \cap (t > \delta))$ компактно (см. [2]), для множества M существует конечная ε -сеть $u_i(x, t)$ в пространстве $L_{2,r}(Q \cap (t > \delta))$. В силу (10) функции

$$\tilde{u}_i(x, t) = \begin{cases} u_i(x, t), & x \in \Omega, \quad t > \delta, \\ 0, & x \in \Omega, \quad t < \delta \end{cases}$$

образуют конечную $\varepsilon\sqrt{2}$ -сеть для M в пространстве $L_{2,r}(Q)$. Следовательно, M — компактное множество в $L_{2,r}(Q)$.

При $I < \infty$ из (8) следует оценка

$$\int_0^{\delta} dt \int_{\Omega} r(t) |u(x, t)|^2 dx \leq C_3 C_5^2 |\ln S(\delta)|^{-\varepsilon_0} < \varepsilon^2, \quad u \in M,$$

когда δ достаточно малое число. Отсюда аналогично получаем, что M компактно в $L_{2,r}(Q)$. Теорема доказана.

4. Существование и единственность обобщенного решения

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2), (3) и

$$c - \frac{1}{2}a_t \leq 0, \quad (x, t) \in Q,$$

$$\varphi \mu + \frac{1}{2}a \leq 0 \quad \text{на } \Omega_T.$$

Тогда задача (1), (4) может иметь не более одного обобщенного решения из $\mathring{H}_1(Q)$.

Доказательство. При $I = \infty$ введем вспомогательную функцию $\eta = u\omega(t)$, где

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \delta, \\ |\ln(S(\delta))|^{\varepsilon_1} - |\ln(S(t))|^{\varepsilon_1}, & \delta \leq t \leq \delta_1, \\ 1, & \delta_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Здесь $0 < \varepsilon_1 < 1$, а число δ_1 выбирается из соотношения

$$|\ln(S(\delta))|^{\varepsilon_1} - |\ln(S(\delta_1))|^{\varepsilon_1} = 1.$$

Заметим, что $\delta < \delta_1$, $\delta_1 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Интегрируя по частям в выражении $B(u, u\omega) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B(u, u\omega(t)) = \operatorname{Re} \int_Q & \left[\varphi |u_t|^2 \omega(t) + \varphi u_t \bar{u} \omega_t + \right. \\ & + \sum a_{ij} \bar{u}_{x_i} u_{x_j} \omega(t) + \frac{1}{2} a |u|^2 \omega_t - \left(c - \frac{1}{2} a_t \right) |u|^2 \omega(t) \Big] dQ - \\ & - \int_{\Omega_T} \left[\varphi(T) \mu(x) + \frac{1}{2} a(x, T) \right] |u|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим второе слагаемое в (11)

$$\left| \operatorname{Re} \int_Q \varphi u_t \bar{u} \omega_t dQ \right| \leq \left(\int_Q \varphi |u_t|^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \varphi |u|^2 \omega_t^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C \varepsilon_1 \|u\|_{H_1}^2}{(\ln S(\delta_1))^{1-\varepsilon_1}},$$

причем правая часть неравенства стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$.

Третье слагаемое в (11) оценивается с учетом (2):

$$\int_Q \omega \operatorname{Re} \sum a_{ij} \bar{u}_{x_i} u_{x_j} dQ \geq \int_Q \omega v \sum |u_{x_i}|^2 dQ.$$

Для оценки четвертого слагаемого в (11) представим в виде суммы их положительных и отрицательных частей $a = a^+ + a^-$.

В силу условия теоремы имеет место

$$-\frac{1}{2} \int_Q a^- |u|^2 \omega_t dQ \leq \frac{C^2}{2} \int_Q S^{-1} |u|^2 \omega_t dQ + \frac{1}{2} \int_Q a^+ |u|^2 \omega_t dQ,$$

далее будем иметь неравенство

$$\int_Q S^{-1} |u|^2 \omega_t dQ \leq C \frac{\varepsilon_1}{[\ln S(\delta_1)]^{1-\varepsilon_1}} \|u\|_{H_1}^2,$$

из которого следует, что его левая часть стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Тогда из равенства (11) при $\delta \rightarrow 0$ получаем:

$$\int_Q \left[\varphi |u_t|^2 + v \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right] dQ \leq 0.$$

Отсюда $u = 0$.

При $I < \infty$ функцию представим в виде $a = a^+ + a^-$ суммы положительных и отрицательных частей. Получим следующие оценки:

$$\left| \operatorname{Re} \int_Q \varphi u_t \bar{u} \omega_t dQ \right| \leq \frac{C \varepsilon_1 \|u\|_{H_1}^2}{(-\ln S(\delta_1))^{1-\varepsilon_1}},$$

$$\int_Q S^{-1} |u|^2 \omega_t dQ \leq \frac{C \varepsilon_1}{(-\ln S(\delta_1))^{1-\varepsilon_1}} \|u\|_{H_1}^2.$$

Следовательно, $\int_Q \left[\varphi |u_t|^2 + \nu \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right] dQ \leq 0$. Отсюда $u = 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда краевая задача (1), (4) имеет обобщенное решение при $\forall f \in L_{2, \sigma_0^{-1}}(Q)$ ($\sigma_0(t)$ определена в следствии 1).

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы вложения [2] имеем неравенство

$$\left| \int_{\Omega_T} (\varphi u + a) u \bar{\eta} dx \right| \leq C_6 \|u\|_{H_1} \|\eta\|_{1,1}.$$

Тогда нетрудно показать, что справедлива оценка

$$|B(u, \eta)| \leq C_6 \|u\|_{H_1} \|\eta\|_{1,1} \quad \forall u \in \dot{H}_1, \forall \eta \in \hat{H}_1.$$

Следовательно, $B(u, \eta)$ — линейный непрерывный функционал при фиксированном $\eta \in \hat{H}_1(Q)$ относительно u над $\dot{H}_1(Q)$. Тогда, по теореме Рисса существует единственный элемент $T_1 \eta \in \dot{H}_1(Q)$ такой, что

$$B(u, \eta) = (u, T_1 \eta)_{H_1} \quad \forall u \in \dot{H}_1, \forall \eta \in \hat{H}_1.$$

Очевидно, что $D(T_1) = \hat{H}_1 = \{ \eta : \eta \in \dot{H}_1 \text{ обращается в нуль вблизи } t = 0 \}$ — область определения оператора T_1 плотна в $\dot{H}_1(Q)$. В силу неравенства

$$\left| \int_Q f \bar{\eta} dQ \right| \leq \|f\|_{L_{2, \sigma_0^{-1}}(Q)} \|\eta\|_{L_{2, \sigma_0}(Q)} \leq C_7 \|f\|_{L_{2, \sigma_0^{-1}}(Q)} \|\eta\|_{H_1(Q)} \quad \forall \eta \in \hat{H}_1(Q)$$

выражение

$$- \int_Q f \bar{\eta} dQ$$

является линейным непрерывным функционалом над $\dot{H}_1(Q)$. Поэтому существует $F \in \dot{H}_1$

$$- \int_Q f \bar{\eta} dQ = (F, \eta)_{H_1} \quad \forall \eta \in \hat{H}_1(Q).$$

Таким образом,

$$(u, T_1 \eta)_{H_1} = (T_1^* u, \eta)_{H_1} = (F, \eta)_{H_1} \quad \forall \eta \in \hat{H}_1(Q),$$

т.е. интегральное тождество (5) эквивалентно операторному уравнению

$$T_1^* u = F.$$

Для $\eta \in \dot{H}_1(Q)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\eta, T_1 \eta)_{H_1} &= \operatorname{Re} B[\eta, \eta] = \int_Q \left[\varphi |\eta_t|^2 + \Sigma a_{ij} \eta_{x_i} \bar{\eta}_{x_j} - \left(c - \frac{1}{2} a_t \right) |\eta|^2 \right] dQ \\ &- \int_{\Omega_T} (\varphi(T) u(x) + \frac{1}{2} a(x, T) |\eta|^2) dx \geq C_8 \int_Q \left[\varphi |\eta_t|^2 + \Sigma |\eta_{x_i}|^2 \right] dQ. \end{aligned}$$

Тогда с учетом неравенства Пуанкаре–Фридрихса получаем оценку

$$\|T_1 \eta\|_{H_1} \geq C_9 \|\eta\|_{H_1} \quad \forall \eta \in \dot{H}_1(Q), \quad C_9 > 0.$$

Отсюда следует, что T_1 имеет ограниченный обратный оператор T_1^{-1} на $R(T_1)$. Тогда согласно лемме Вишика [1] область значений сопряженного оператора T_1^* совпадает со всем пространством $\dot{H}_1(Q)$:

$$R(T_1^*) = \dot{H}_1, \quad \|(T_1^*)^{-1}\| \leq \infty.$$

Поэтому в $\dot{H}_1(Q)$ найдется такой элемент u , что

$$T_1^* u = F \in \dot{H}_1(Q). \quad (12)$$

При этом $u(x, t)$ является искомым обобщенным решением смешанной задачи (1), (4). Теорема доказана.

Заметим, что обобщенное решение смешанной задачи (1), (4) существует для любой $f \in L_2(Q)$.

Покажем, что задача (1), (4) является фредгольмово разрешимой в $\dot{H}_1(Q)$.

5. Фредгольмовость и дискретность спектра

Лемма 1. Пусть T и T_1 — вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве H , причем оператор T имеет всюду плотную в H область значений, и существует обратный T^{-1} . Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что

$$\|T_1 \varphi\| \leq \varepsilon \|\varphi\| + M \|T \varphi\|. \quad (13)$$

Доказательство леммы можно найти в [1, 4].

Теорема 5. Пусть выполнены неравенства (2) и (3) и

$$c(x, t) = O(r), \quad a_t(x, t) = O(r),$$

где $r(t)$ определено в теореме 2.

Тогда для смешанной задачи (1), (4) имеет место альтернатива Фредгольма, а задача на собственные значения $Lu - \lambda r(t)u = 0$ приводит к дискретному и конечнократному спектру.

Доказательство. Выберем постоянные λ_0 и α таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} c - \frac{1}{2} a_t - \lambda_0 r(t) &\leq 0, \\ \varphi u + \frac{1}{2} a - \alpha &\leq 0 \quad \text{на } \Omega_T. \end{aligned}$$

Рассмотрим для $f \in L_{2,r^{-1}}(Q)$ смешанную задачу для уравнения

$$Lu - \lambda' r(t)u = f, \quad (14)$$

где $\lambda' = \lambda_0 - \lambda_1$, λ_1 — любое число. Положим

$$a(u, \eta) = \int_Q [\varphi u_t \bar{\eta}_t + \sum a_{ij} \bar{\eta}_{x_i} u_{x_j} + a u \bar{\eta}_t - (c - a_t - \lambda_0 r) u \bar{\eta}] dQ - \\ - \int_{\Omega_T} [\varphi(T)u(x) + a(x, T) - \alpha] u \bar{\eta} dx,$$

где $u \in \mathring{H}_1$, $\eta \in \hat{H}_1(Q) \subseteq \mathring{H}_1$.

Тогда обобщенная разрешимость задачи (14), (4) эквивалентна интегральному тождеству

$$a(u, \eta) - \lambda_1 \int_Q r u \bar{\eta} dQ - \alpha \int_{\Omega_T} u \bar{\eta} dx = - \int_Q f \bar{\eta} dQ, \quad (15) \\ \eta \in \hat{H}_1(Q).$$

В силу предположений теоремы $a(u, \eta)$ — линейный непрерывный функционал относительно u над $\mathring{H}_1(Q)$. Тогда получаем

$$a(u, \eta) = (u, T\eta)_{H_1}, \quad (u, B\eta)_{H_1} = \int_Q r(t) u \bar{\eta} dQ, \\ (u, C\eta)_{H_1} = \int_{\Omega_T} u \bar{\eta} dx, \quad (F, \eta)_{H_1} = - \int_Q f \bar{\eta} dQ,$$

где $F \in \mathring{H}_1$. При этом для $\eta \in \hat{H}_1(Q)$ аналогично доказательству теоремы 4 имеем неравенство

$$\operatorname{Re}(\eta, T\eta)_{H_1} \geq C_{10} \|\eta\|_{H_1}^2, \quad C_{10} > 0 \quad (16)$$

а операторы B, C вполне непрерывные в $\mathring{H}_1(Q)$, нетривиально определенные и самосопряженные, причем полную непрерывность оператора B гарантирует теорема 2, а полная непрерывность оператора C следует из компактности вложения $\mathring{H}_1(Q)$ в $L_2(\Omega_T)$ [2]. Теперь тождество (15) эквивалентно операторному уравнению

$$T^*u - \lambda_1 Bu - \alpha Cu = F \quad (17)$$

в пространстве $\mathring{H}_1(Q)$.

Положим $D = T - \lambda_1 B - \alpha C$. В виду неравенства (16) для $\eta \in \hat{H}_1(Q)$ будем иметь

$$\operatorname{Re}(\eta, D\eta)_{H_1} \geq C_{10} \|\eta\|_{H_1}^2 - \lambda_1 (B\eta, \eta)_{H_1} - \alpha (C\eta, \eta)_{H_1}. \quad (18)$$

Заметим, что операторы B и C удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда условия леммы 1 выполняются для $B^{1/2}$ и $C^{1/2}$. Из неравенства (13) получим

$$\|C^{1/2}\eta\|_{H_1} \leq \varepsilon \|\eta\|_{H_1} + M \|B^{1/2}\eta\|_{H_1},$$

откуда имеем

$$(C\eta, \eta)_{H_1} \leq 2\varepsilon^2 \|\eta\|_{H_1}^2 + 2M^2 (B\eta, \eta)_{H_1}.$$

С учетом этой оценки из (18) получаем

$$\operatorname{Re}(\eta, D\eta)_{H_1} \geq (1 - 2\varepsilon^2 \alpha) \|\eta\|_{H_1}^2 + (-\lambda_1 - 2\alpha M^2) (B\eta, \eta)_{H_1}.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и большом $-\lambda_1 > 0$ оператор D имеет ограниченный обратный. Следовательно, $R(D^*) = \overset{0}{H}_1$ и $(D^*)^{-1}$ ограничен. Поэтому операторное уравнение (17) имеет решение

$$u = (D^*)^{-1}F = (L - \lambda^{\prime}rE)^{-1}f.$$

Значит, задача на собственные значения

$$Lu - \lambda u = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (u_t - \mu(x)u)|_{\bar{\Omega}_T} = 0$$

сведена к операторному уравнению

$$D^*u = (\lambda - \lambda^{\prime})Bu$$

или к уравнению

$$u = (\lambda - \lambda^{\prime})(D^*)^{-1}Bu.$$

Отсюда следует справедливость альтернативы Фредгольма, а также дискретность и конечнократность спектра. Теорема доказана.

Литература

- [1] Вишик, М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И.Вишик // Мат. сб. – 1954. – Т. 35. – №3. – С. 513–568.
- [2] Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л.Соболев. – М.: Наука, 1998. – 333 с.
- [3] Егоров, И.Е. Теоремы вложения и компактности для одного класса весовых пространств / И.Е.Егоров // Неклассические уравнения мат физики. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993. – С. 161–168.
- [4] Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М.Смирнов. – М.: Физматгиз, 1961. – 292 с.
- [5] Егоров И.Е. Весовые теоремы вложения и их применения / И.Е.Егоров // Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1992. – С. 114–117.
- [6] Kufner, A. Weighted Sobolev Spaces / A. Kufner. – Leipzig, 1980. – P. 152.
- [7] Тихонов, Н.А. О спектральных свойствах и фредгольмовости третьей краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения / Н.А.Тихонов // Мат. заметки ЯГУ. – Т. 9. – В. 1. – 2002. – С. 98–103.
- [8] Егоров И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е.Егоров, С.Г.Пятков, С.В.Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – С. 336.

Поступила в редакцию 8/VI/2007;
в окончательном варианте — 8/VI/2007.

GENERALIZED AND FREDHOLM'S SOLUBILITY OF THE MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION

© 2007 O.A. Vikhreva²

In the paper a class of Sobolev's weight spaces is studied. Moreover, the generalized and Fredholm's solubility theorems for the mixed boundary value problem for an elliptic equation of the second order generating on base of cylindrical domain are proved.

Paper received 26/*XI*/2006.

Paper accepted 26/*XI*/2006.

²Vikhreva Olga Anatolievna, Dept. of Mathematical Analyze of Institute of Mathematics and Informatics, Yakutsk State University, 677011, Yakutsk, Russia.