УДК 515.16

КОНТАКТНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ИКУТЫ

© 2007 Н.С. Баклашова[1]

Доказано, что интегральные многообразия инволютивного подраспределения келерова распределения локально конформно квази-сасакиева многообразия с параллельной контактной формой Ли и C-инвариантным келеровым распределением являются вполне вещественными подмногообразиями.

Введение

В работе [1] Икута установил, что интегральные многообразия инволютивных подраспределений келерова распределения обобщенного многообразия Хопфа являются вполне вещественными подмногообразиями. В настоящей работе построен контактный аналог келерова распределения и установлен контактный аналог результата Икуты.

Пусть M — $(2n+1)$-мерное гладкое многообразие размерности свыше трех, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d — оператор внешнего дифференцирования. Напомним [2], что почти контактной метрической (короче, АС-) структурой на многообразии M называется совокупность $(\xi, \eta, \Phi\, g)$, где ξ — векторное поле на M, называемое *характеристическим*, η — дифференциальная 1-форма на M, называемая *контактной формой*, Φ — тензор типа $(1,1)$ на M, называемый *структурным эндоморфизмом*. При этом

$$1)\ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \Phi(\xi)=0;\quad 3)\ \eta\circ\Phi=0;\quad 4)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi;$$
$$5)\ \langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\cdot\eta(Y);\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Такие структуры естественно возникают на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [2], на пространствах главных T^{-1}-расслоений над симплектическими многообразиями с целочисленной фундаментальной формой (расслоения Бутби–Вана [2]) и, более обще, над почти эрмитовыми многообразиями [3] и являются естественными обобщениями так называемых контактных метрических структур, возникающих на нечетномерных многообразиях с фиксированной 1-формой максимального ранга (контактной структурой).

AC-структура называется *контактной метрической*, если $d\eta=\Omega$, где $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ — дифференциальная 2-форма на M, называемая *фундаментальной формой структуры*. *AC*-структура называется *нормальной*, если $2N_\Phi+d\eta\otimes\xi=0$, где

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}\Big([\Phi X,\Phi Y]+\Phi^2[X,Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]\Big)$$

[1]Баклашова Наталья Серафимовна (natbak@yandex.ru), кафедра геометрии математического факультета Московского педагогического государственного университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14

— тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Сасакиевы структуры играют фундаментальную роль в контактной геометрии, являясь контактным аналогом келеровых структур в эрмитовой геометрии [2]. Нормальная AC-структура с замкнутой фундаментальной формой называется квази-сасакиевой (короче, *QS-структурой*) структурой. Квази-сасакиевы структуры были введены Блэром в его докторской диссертации и изучались многими авторами. Они являются естественным обобщением сасакиевых структур и в известной мере также являются контактным аналогом келеровых структур [2].

Хорошо известно, что многообразие, допускающее AC-структуру (короче, AC-многообразие), нечетномерно и ориентируемо. В $C^\infty(M)$-модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на таком многообразии внутренним образом определены два взаимно-дополнительных проектора $\mathfrak{m} = \eta\otimes\xi$ и $\mathfrak{l} = id - \mathfrak{m} = -\Phi^2$. Их образы обозначим $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$, соответственно. Таким образом, $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{L}$.

Задание AC-структуры на многообразии M^{2n+1} равносильно заданию G-структуры $\mathcal{G}$ на M со структурной группой $G = U(n)\times\{1\}$. Эта G-структура называется *присоединенной.* Элементами тотального пространства этой G-структуры являются комплексные реперы многообразия M вида $\{p, \xi_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat 1}, \ldots, \varepsilon_{\hat n}\}$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них имеют, соответственно, вид:

$$\left(\Phi^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \sqrt{-1}I_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & I_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_n & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Будем полагать, что индексы i, j, k, $\ldots$ пробегают значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, d, $\ldots$ — значения от 1 до n. Положим $\hat a = a + n$. Обозначим $\{\omega^i\}$ компоненты формы смещения на пространстве присоединенной G-структуры. Тогда, в силу сказанного выше, $\omega_a = \omega^{\hat a}$, причем

$$\pi^*\Omega = -2\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a, \qquad (1)$$

где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на ее базу.

Определение 1. *Конформным преобразованием* AC-структуры $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от структуры к AC-структуре $\tilde{\mathcal{S}} = \left(\tilde\xi, \tilde\eta, \Phi, \tilde g\right)$, где $\tilde\xi = e^\sigma\xi$, $\tilde\eta = e^{-\sigma}\eta$, $\tilde g = e^{-2\sigma}g$, σ Э— произвольная гладкая функция на M, называемая *определяющей функцией преобразования.* AC-структура $\mathcal{S}$ на M называется локально *конформно квази-сасакиевой*, короче, $LCQS$-структурой, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру. Будем называть это преобразование *локально конформным.*

Теорема 1. На всяком $LCQS$-многообразии M внутренним образом определена дифференциальная 1-форма α, такая, что $\alpha|_U = d\sigma$, где σ — определяющая функция соответствующего локального конформного преобразования.

Доказательство. Пусть U_1 и U_2 — две пересекающиеся окрестности, допускающие локально конформные преобразования в квази-сасакиеву структуру с определяющими функциями σ_1 и σ_2, соответственно. Очевидно, фундаментальные формы преобразованных структур имеют вид

$$\tilde{\Omega}_1 = e^{-2\sigma_1}\Omega, \qquad \tilde{\Omega}_2 = e^{-2\sigma_2}\Omega, \tag{2}$$

где Ω — фундаментальная форма исходной структуры. Поскольку преобразованные структуры квази-сасакиевы, $d\Omega_i = 0$, $i = 1, 2$. Дифференцируя внешним образом с учетом этого обстоятельства тождества (2), получаем, что на $U_1 \cap U_2$ справедливо тождество

$$d\Omega = 2d\sigma_i \wedge \Omega, \qquad i = 1,\ 2. \tag{3}$$

Обозначим $\tau = \sigma_1 - \sigma_2$. Тогда, с учетом (3), получаем, что $d\tau \wedge \Omega = 0$. Положив $d\tau = \tau^i\omega_i$ и учитывая (1), перепишем это тождество в виде

$$\tau_{[a}\delta^c_{b]}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega_c + \tau^{[a}\delta^{b]}_c\omega_a \wedge \omega^c \wedge \omega_b + \tau_0\omega \wedge \omega^a \wedge \omega_a = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм получаем отсюда, что

$$\tau_{[a}\delta^c_{b]} = 0, \qquad \tau^{[a}\delta^{b]}_c = 0, \qquad \tau_0 = 0.$$

Свертывая первые два соотношения с учетом того, что $\dim M > 3$, находим, что $\tau_i = 0$, т.е. $d\tau = 0$, а значит, $d\sigma_1|_{U_1\cap U_2} = d\sigma_2|_{U_1\cap U_2}$.

Определение 2. Назовем глобальную 1-форму , построенную указанным образом, *контактной формой Ли LCQS-многообразия.*

Замечание 1. Заметим, что контактная форма Ли, будучи локально точной, замкнута. Очевидно, $LCQS$-многообразие является глобально конформно квази-сасакиевым тогда и только тогда, когда его контактная форма Ли точна. В частности, любое $LCQS$-многообразие, первое число Бетти которого равно нулю, в частности, любое односвязное $LCQS$-многообразие получается из некоторого квази-сасакиева многообразия глобальным конформным преобразованием метрики.

Определение 3. *Келеровым распределением* на $LCQS$-многообразии назовем распределение $\mathfrak{K}$, внутренним образом определенное системой Пфаффа

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

где $\beta = \alpha \circ \Phi$, $\gamma \circ \Phi^2$.

Предложение 1. Келерово распределение инвариантно относительно эндоморфизма Φ.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{K}$, т.е.

$$\alpha(X) = 0, \qquad \beta(X) = 0, \qquad \gamma(X) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varsigma(\Phi X) &= \beta(X) = 0, \\ \beta(\Phi X) &= \varsigma\left(\Phi^2 X\right) = \gamma(X) = 0, \\ \gamma(\Phi X) &= \varsigma\left(\Phi^3 X\right) = -\varsigma(\Phi X) = 0, \end{aligned}$$

а значит, $\Phi X \in \mathfrak{K}$.

Хорошо известно [2], что AC-структура на многообразии M сасакиева тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Доказательство этого факта приведено, например, в [4]. Аналогично доказывается, что AC-структура на M является квази-сасакиевой тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \left\langle \tilde{C}X, Y\right\rangle\xi - \eta(Y)\tilde{C}X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{4}$$

где $\tilde{C}$ — самосопряженный эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, причем, с необходимостью,

$$\tilde{C}(X) = \nabla_{\Phi X}\xi, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что на квази-сасакиевом многообразии M

$$\begin{aligned} \nabla_X\left(\Phi^2\right)Y &= \nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi\circ\nabla_X(\Phi)(Y) = \\ &= \left\langle \tilde{C}X, \Phi Y\right\rangle \xi - \eta(Y)\circ\Phi\tilde{C}(X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{6}$$

Хорошо известно [4], что тензор аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид:

$$T(X,Y) = \langle X, Y\rangle \alpha^{\#} - \alpha(X)Y - \alpha(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

где $\alpha^{\#}$ — вектор, дуальный форме α. С учетом этого, прежде всего, вычислим в явном виде эндоморфизм $\tilde{C}$ соответствующей QS-структуры, локально определенный на многообразии M формулой (5). Имеем, согласно (5):

$$\begin{aligned} \tilde{C}(X) &= \tilde{\nabla}_{\Phi X}\left(\tilde{\xi}\right) = \tilde{\nabla}_{\Phi X}\left(e^{\sigma}\xi\right) = e^{\sigma}\left(d\sigma(\Phi X)\,\xi + \tilde{\nabla}_{\Phi X}\xi\right) = \\ &= e^{\sigma}\left(d\sigma(\Phi X)\,\xi + \nabla_{\Phi X}\xi + T(\Phi X, \xi)\right) = e^{\sigma}\left(\nabla_{\Phi X}\xi - \alpha(\xi)\,\Phi X\right). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение эндоморфизм $C = e^{-\sigma}\tilde{C}$, в силу доказанного, глобально определенный формулой

$$C(X) = e^{\sigma}\left(\nabla_{\Phi X}\xi - \alpha(\xi)\,\Phi X\right), \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi\left(\tilde{\nabla}_X Y\right) = \\ &= \nabla_X(\Phi Y) + T(X, \Phi Y) - \Phi\left(\nabla_X(Y) + T(X,Y)\right) = \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + T(X,\Phi Y) - \Phi\left(T(X,Y)\right) = \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + \Omega(X,Y)\,\alpha^{\#} - \langle X, Y\rangle \Phi\left(\alpha^{\#}\right) + \alpha(Y)\,\Phi X - \alpha(\Phi Y)\,X. \end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, согласно (4),

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{g}\left(\tilde{C}X, Y\right)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)\,\tilde{C}X = \langle CX, Y\rangle\,\xi - \eta(Y)\,CX.$$

Сравнивая с (7) получаем, что

$$\begin{aligned} \nabla_X(\Phi)Y = -\Omega(X,Y)\,\alpha^{\#} + \langle X, Y\rangle \Phi\left(\alpha^{\#}\right) - \alpha(Y)\,\Phi X + \\ + \alpha(\Phi Y)\,X + \langle CX, Y\rangle\,\xi - \eta(Y)\,CX, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \nabla_X(\beta)Y &= \nabla_X(\alpha\circ\Phi)Y = \nabla_X(\alpha)\,\Phi Y + \alpha\left(\nabla_X(\Phi)Y\right) = \\ &= \nabla_X(\alpha)\,\Phi Y - \|\alpha\|^2\,\Omega(X,Y) + \alpha(X)\,\alpha(\Phi Y) - \alpha(Y)\,\alpha(\Phi X) + \\ &\quad + \langle CX, Y\rangle\,\alpha(\xi) - \eta(Y)\,\alpha(CX). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\beta(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(\nabla_X(\alpha)\,\Phi Y - \nabla_Y(\alpha)\,\Phi X - \|\alpha\|^2\,\Omega(X,Y) + 2\alpha(X)\,\beta(Y) - \\ -2\alpha(Y)\,\beta(X) + \eta(X)\,\alpha(CY) - \eta(Y)\,\alpha(CX)\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X\left(\Phi^2\right)Y &= \tilde{\nabla}_X\left(\Phi^2 Y\right) - \Phi^2\left(\tilde{\nabla}_X Y\right) = \\ &= \nabla_X\left(\Phi^2 Y\right) + T\left(X, \Phi^2 Y\right) - \Phi^2\left(\nabla_X Y + T(X,Y)\right) = \\ &= \nabla_X\left(\Phi^2\right)Y + T\left(X, \Phi^2 Y\right) - \Phi^2\left(T(X,Y)\right) = \\ &= \nabla_X\left(\Phi^2\right)Y - \langle \Phi X, \Phi Y\rangle\,\alpha^{\#} - \langle X, Y\rangle\,\Phi^2\left(\alpha^{\#}\right) + \\ &\quad + \alpha(Y)\,\Phi^2 X - \alpha\left(\Phi^2 Y\right)X. \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, согласно (6),

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\left(\Phi^2\right)Y = \tilde{\nabla}_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi\left(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y\right) = \\ = \tilde{g}\left(\tilde{C}X, \Phi Y\right)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)\Phi\left(\tilde{C}X\right) = \\ = \Omega(CX, Y)\xi - \eta(Y)\Phi(CX).\end{aligned}$$

Сравнивая с (9), получаем, что

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\left(\Phi^2\right)Y = \langle\Phi X, \Phi Y\rangle\alpha^{\#} + \langle X, Y\rangle\Phi^2\left(\alpha^{\#}\right) - \alpha(Y)\Phi^2X + \\ +\alpha\left(\Phi^2Y\right)X + \Omega(CX, Y)\xi - \eta(Y)\Phi(CX),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\nabla_X(\gamma)Y = \nabla_X\left(\alpha\circ\Phi^2\right)Y = \nabla_X(\alpha)\Phi^2Y + \alpha\left(\nabla_X\left(\Phi^2\right)Y\right) = \\ = \nabla_X(\alpha)\Phi^2Y + \|\alpha\|^2\langle\Phi X, \Phi Y\rangle - \|\Phi\alpha\|^2\langle X, Y\rangle + \alpha(X)\alpha\left(\Phi^2Y\right) - \\ -\alpha(Y)\alpha\left(\Phi^2X\right) + \Omega(CX, Y)\alpha(\xi) - \eta(Y)\alpha(\Phi(CX)).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}d\gamma(X, Y) = \frac{1}{2}\Big(\nabla_X(\alpha)\Phi^2Y - \nabla_Y(\alpha)\Phi^2X + 2\alpha(X)\gamma(Y) - 2\alpha(Y)\gamma(X) + \\ +2\Omega(CX, Y)\alpha(\xi) + \eta(X)\beta(CY) - \eta(Y)\alpha(CX)\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть M — $LCQS$-многообразие с параллельной формой Ли α и C-инвариантным келеровым распределением $\mathfrak{K}$. Примерами таких многообразий являются вполне геодезические гиперповерхности классического многообразия Хопфа $S^{2n-1}\times S^1$, снабженного классической локально конформно-келеровой структурой [5], наделенные индуцированной почти контактной метрической структурой [2]. Тогда сужения соотношений (8) и (10) (вместе с условием замкнутости формы Ли) на келерово распределение примут вид:

$$\begin{aligned}&1)\ d\alpha(X, Y) = 0; \\ &2)\ d\beta(X, Y) = -\|\alpha\|^2\,\Omega(X, Y); \\ &3)\ d\gamma(X, Y) = \Omega(CX, Y)\alpha(\xi); \quad X, Y\in\mathfrak{K}.\end{aligned} \tag{11}$$

Пусть $\mathfrak{D}\supset\mathfrak{K}$ — инволютивное подраспределение келерова распределения. Тогда дифференциальные формы α, β и γ, аннулируемые на распределении $\mathfrak{K}$, тем более аннулируются на распределении $\mathfrak{D}$, и, в силу инволютивности этого распределения, на нем аннулируются также их внешние дифференциалы. Но тогда в силу (11)

$$\Omega(X, Y) = 0, \quad X, Y\in\mathfrak{D},$$

или, что равносильно, $\langle X, \Phi Y\rangle = 0$, $X, Y\in\mathfrak{D}$. Иначе говоря, если распределение инволютивно, то

$$\Phi(\mathfrak{D})\subset\mathfrak{D}^{\perp}. \tag{12}$$

Распределение $\mathfrak{D}$, обладающее свойством (12), называется *антиинвариантным*, а его интегральные многообразия — *вполне вещественными подмногообразиями*. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть M — $LCQS$-многообразие с параллельной формой Ли и C-инвариантным келеровым распределением $\mathfrak{K}$. Тогда интегральные многообразия любого инволютивного распределения $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{K}$ являются вполне вещественными подмногообразиями многообразия M.

Литература

[1] Ikuta, K. α-submanifolds in locally conformal Kähler manifolds / K. Ikuta // Nat. Sc. Rep. – Jchanomisu Univ.,1980. – V. 31. – No. 1. – P. 42–54.
[2] Blair, D.E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Birkhauser / D.E. Blair. – Boston, Basel, Berlin, 2001.
[3] Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений / В.Ф. Кириченко // Фундам. и прикл. матем. – 2000. – Т. 6. №4. – С. 1095–1120.
[4] Кириченко, В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
[5] Vaisman, I. On locally and globally conformal Kähler manifolds / I. Vaisman // Trans. Amer. Math. – 1980. – S. 262. – No. 392. – P. 335–392.

Поступила в редакцию 26/*XI*/2006;
в окончательном варианте — 26/*XI*/2006.

AN IKUTA THEOREM CONTACT ANALOGUE

© 2007 N.S. Baklashova[2]

In the paper it is proved that integral manifolds of the involutive subdistribution of the Kähler distribution of locally conformal Quasi–Sasakian manifold with a parallel contact Lie form and a C-invariant Kähler distribution are completely real submanifolds.

Paper received 26/*XI*/2006.
Paper accepted 26/*XI*/2006.

[2]Baklashova Natalja Serafimovna, (natbak@yandex.ru), Dept. of Geometry, Moscow State Pedagogical University, 107140, Moscow, Russia.