

ДИАГОНАЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕР¹

© 2007 В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев²

Введено понятие диагональной непрерывности последовательности мер и получен критерий равностепенной абсолютной непрерывности двух последовательностей мер. Этот критерий можно рассматривать как секвенциальный аналог известной теоремы об эквивалентности абсолютной непрерывности и нуль-непрерывности для двух мер.

Введение

В работах [1–3] в связи с исследованием вопроса о предельном переходе под знаком интеграла, когда меняются не только подынтегральная функция, но и интегрирующая мера, Г.Я. Арешкиным и В.М. Климкиным было введено понятие равностепенной абсолютной непрерывности (РАН) двух последовательностей мер.

Простейшие примеры (в частности, если $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_k = \lambda$, $\psi_k = \frac{1}{k}\lambda$, где λ — мера Лебега на отрезке) показывают, что в общем случае РАН последовательности мер $\{\varphi_k\}_k$ относительно последовательности мер $\{\psi_k\}_k$ не имеет места. В работах [4–6] было введено понятие диагональности последовательности $\{\psi_k\}_k$ и показано, что при некоторых естественных ограничениях на последовательность $\{\varphi_k\}_k$ оно является достаточным для РАН последовательности $\{\varphi_k\}_k$ относительно последовательности $\{\psi_k\}_k$.

Понятие диагональности не охватывает, однако, такой простой случай последовательности мер, как $\left\{\frac{1}{k}\lambda\right\}_k$, где λ — мера Лебега на отрезке. В настоящей работе вводится понятие диагональной непрерывности последовательности мер $\{\psi_k\}_k$, которое отчасти восполняет этот пробел. При условии, что последовательность $\{\psi_k\}_k$ диагонально непрерывна, получен критерий для РАН последовательности $\{\varphi_k\}_k$ относительно последовательности $\{\psi_k\}_k$. Этот критерий можно рассматривать как секвенциальный аналог известной теоремы об эквивалентности абсолютной непрерывности и нуль-непрерывности для двух мер.

Следует заметить, что свойство диагональной непрерывности последовательности мер никак не связано с известным свойством семейства мер иметь базис или контрольную субмеру (см. [7, 8]). Действительно, всякое счетное семейство

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

²Алякин Владимир Алексеевич (aval@ssu.samara.ru), Клепнев Дмитрий Эдуардович (dek1@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

мер имеет базис (см., например, [8]), в то время как имеются примеры последовательностей мер, не являющихся диагонально непрерывными (см. ниже примеры (7)–(8)).

1. Определения и обозначения

Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — кольцо его подмножеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Всюду, где не указано иное, в работе рассматриваются функции множества $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющие условию $\varphi(\emptyset) = 0$.

Конечно-аддитивная функция множества называется мерой. Неотрицательная монотонная конечно-полуаддитивная функция множества называется субмерой. Функция множества $s(\varphi): \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, где

$$\forall E \in \mathfrak{A} \quad s(\varphi)(E) = \sup\{|\varphi(F)| : F \in \mathfrak{A} \cap 2^E\},$$

называется супремацией функции множества φ .

Как известно (см., например, [9]), для всякой меры φ ее супремация $s(\varphi)$ является субмерой, ее полная вариация $v(\varphi)$ — мерой, при этом справедливы неравенства

$$\forall E \in \mathfrak{A} \quad |\varphi(E)| \leq s(\varphi)(E) \leq v(\varphi)(E) \leq 2 s(\varphi)(E). \quad (1.1)$$

Определение 1.1. Функция множества φ называется абсолютно непрерывной относительно функции множества ψ (обозначение: $\varphi \ll \psi$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathfrak{A} \quad s(\psi)(E) < \delta \Rightarrow |\varphi(E)| < \varepsilon.$$

Если $\varphi \ll \psi$ и $\psi \ll \varphi$, то функции множества φ и ψ называются эквивалентными (обозначение: $\varphi \sim \psi$).

Определение 1.2. Последовательность функций множества $\{\varphi_k\}_k$ называется равномерно абсолютно непрерывной (РАН) относительно последовательности функций множества $\{\psi_k\}_k$ (обозначение: $\{\varphi_k\}_k \lll \{\psi_k\}_k$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathfrak{A} \forall k \in \mathbb{N} \quad s(\psi_k)(E) < \delta \Rightarrow |\varphi_k(E)| < \varepsilon.$$

Определение 1.3. Функция множества φ называется нуль-непрерывной относительно функции множества ψ , если

$$\forall E \in \mathfrak{A} \quad s(\psi)(E) = 0 \Rightarrow \varphi(E) = 0.$$

Известна следующая теорема (см., например, [10, с. 157]), связывающая абсолютную непрерывность и нуль-непрерывность.

Теорема 1.4. Пусть $\mathfrak{A}$ — σ -кольцо, субмера φ непрерывна сверху на $\emptyset$, субмера ψ σ -полуаддитивна. Субмера φ абсолютно непрерывна относительно субмеры ψ тогда и только тогда, когда φ нуль-непрерывна относительно ψ .

В настоящей работе получен аналог этого утверждения для РАН последовательности мер $\{\varphi_k\}_k$ относительно последовательности мер $\{\psi_k\}_k$ при условии диагональной непрерывности последовательности мер $\{\psi_k\}_k$.

2. Диагонально непрерывные последовательности мер

В этом параграфе дается определение диагональной непрерывности последовательности мер и изучаются основные свойства таких последовательностей.

Определение 2.1. Последовательность функций множества $\{\varphi_k\}_k$ называется диагонально непрерывной, если существует субмера φ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

(ДН1) для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{X}$ из

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E_k) = 0$$

следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(E_k) = 0;$$

(ДН2) для всякого множества $E \in \mathfrak{X}$ из $\varphi(E) = 0$ следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E) = 0.$$

Субмеру φ будем называть подходящей субмерой.

Замечание 2.2. В работе [5] рассматривался частный случай, когда $\{\varphi_k\}_k$ — последовательность субмер, сходящаяся поточечно к подходящей субмере φ : $\forall E \in \mathfrak{X} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = \varphi(E)$.

Замечание 2.3. В случае, когда функции множества последовательности $\{\varphi_k\}_k$ — меры, в силу неравенств (1.1) в определении 2.1 можно супремации заменить полными вариациями.

Теорема 2.4. Если последовательность функций множества $\{\varphi_k\}_k$ является диагонально непрерывной с подходящей субмерой φ , то и всякая ее подпоследовательность $\{\varphi_{m_k}\}_k$ также будет диагонально непрерывной с подходящей субмерой φ .

Доказательство. Пусть $M = \{m_k\}_k \subset \mathbb{N}$ — некоторая возрастающая последовательность номеров и пусть $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{X}$ — такая последовательность множеств, что $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_{m_k})(E_k) = 0$. Положим $\forall m \in M \ F_m = E_m$ и $\forall m \in \mathbb{N} \setminus M \ F_m = \emptyset$. Получим такую последовательность множеств $\{F_k\}_k \subset \mathfrak{X}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(F_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_{m_k})(E_k) = 0$. В силу условия (ДН1) получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(F_k) = 0$, откуда $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(F_{m_k}) = 0$. Следовательно, для подпоследовательности $\{\varphi_{m_k}\}_k$ и субмеры φ выполнено условие (ДН1). Справедливость условия (ДН2) проверяется тривиально. Лемма доказана.

Замечание 2.5. Ясно, что если φ — подходящая субмера, то и всякая эквивалентная ей субмера ψ также будет подходящей. В частности, если $c > 0$, то субмера $\psi = c\varphi$ является подходящей. Таким образом, если существует нетривиальная подходящая субмера, она не единственная подходящая субмера. Как показывает следующая теорема, если существует тривиальная подходящая субмера, она является единственной подходящей.

Теорема 2.6. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность функций множества, а φ и ψ — подходящие субмеры. Тогда субмера φ нуль-непрерывна относительно субмеры ψ (и наоборот).

Доказательство. Пусть $E \in \mathfrak{R}$ и $\varphi(E) = 0$. Тогда в силу условия (ДН2) $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E) = 0$, откуда в силу условия (ДН1) (полагая $\forall k \in \mathbb{N} E_k = E$) получаем $\psi(E) = 0$. Теорема доказана.

Лемма 2.7. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность функций множества и φ — подходящая субмера. Если последовательность множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ такова, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_m)(E_k) = 0, \quad (2.1)$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(E_k) = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. Предположим противное, что для некоторой последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ выполняется (2.1), но не (2.2). Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{E'_k\}_k$ последовательности $\{E_k\}_k$, что $\forall k \in \mathbb{N} \varphi(E'_k) \geq \varepsilon$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_1)(E'_k) = 0$, то существует такой номер p_1 , что $s(\varphi_1)(E'_{p_1}) < 1$. Допустим, что $m \geq 1$, и уже найдены такие номера $p_1 < p_2 < \dots < p_m$, что $\forall k \in \{1, \dots, m\} s(\varphi_k)(E'_{p_k}) < \frac{1}{k}$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_{m+1})(E'_k) = 0$, то существует такой номер $p_{m+1} > p_m$, что $s(\varphi_1)(E'_{p_{m+1}}) < \frac{1}{m+1}$.

Таким образом получаем построенную по индукции такую возрастающую последовательность номеров $\{p_k\}_k \subset \mathbb{N}$, что $\forall k \in \mathbb{N} s(\varphi_k)(E'_{p_k}) < \frac{1}{k}$. Но $\forall k \in \mathbb{N} \varphi(E'_{p_k}) \geq \varepsilon$. Получили противоречие с условием (ДН1). Лемма доказана.

Теорема 2.8. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность функций множества и φ — подходящая субмера.

- 1) Если все функции φ_k являются исчерпывающими (то есть сходящимися к нулю на всякой дизъюнктивной последовательности множеств), то и субмера φ является исчерпывающей.
- 2) Если все функции φ_k обладают непрерывными сверху на пустом множестве супремациями, то и субмера φ является непрерывной сверху на пустом множестве.
- 3) Если $\mathfrak{R}$ — σ -кольцо, $\{\varphi_k\}_k$ — последовательность конечных σ -аддитивных мер на $\mathfrak{R}$, то субмера φ является непрерывной сверху на пустом множестве.

Доказательство. Утверждения теоремы непосредственно следуют из леммы 2.7 в силу условия (ДН1).

Теорема 2.9. Пусть $\mathfrak{R}$ — σ -кольцо, $\{\varphi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность конечных σ -аддитивных мер. Если φ и ψ — подходящие субмеры, то $\varphi \sim \psi$.

Доказательство. При сделанных предположениях супремации $\{s(\varphi_k)\}_k$ непрерывны сверху на $\emptyset$, следовательно, в силу теоремы 2.8 субмеры φ и ψ также непрерывны сверху на $\emptyset$, значит, в силу теоремы 1.4 $\varphi \ll \psi$ тогда и только тогда, когда φ нуль-непрерывна относительно ψ . Последнее в силу теоремы 3.6 выполнено. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2.10. Пусть $\mathfrak{R}$ — σ -кольцо, $\{\varphi_k\}_k$ — последовательность конечных неотрицательных σ -аддитивных мер, причем для всякого множества $E \in \mathfrak{R}$ последовательность $\{\varphi_k(E)\}_k$ сходится к конечному пределу $\varphi(E)$. Последовательность мер $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна тогда и только тогда, когда субмера φ подходящая.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть последовательность $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна, ψ — подходящая субмера. Возьмем такое множество $E \in \mathfrak{R}$, что $\psi(E) = 0$. Тогда в силу условия (ДН2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = 0$, следовательно, в силу условия (ДН1) $\varphi(E) = 0$. Таким образом, субмера φ нуль-непрерывна относительно субмеры ψ . Поскольку, в силу теоремы Никодима (см., например, [9, с. 320]), φ является непрерывной сверху на $\emptyset$ мерой, то из теоремы 2.4 следует, что $\varphi \ll \psi$, поэтому субмера φ удовлетворяет условию (ДН1). Очевидно, что условие (ДН2) также выполняется. Таким образом, φ является подходящей субмерой. Теорема доказана.

3. Примеры

В этом параграфе рассматриваются примеры диагонально непрерывных последовательностей мер. В случае, когда условия теоремы 2.10 выполнены, рассматриваемое в настоящей работе понятие диагональной непрерывности совпадает с рассмотренным в работе [5]. Поэтому наибольший интерес представляют случаи, когда условия теоремы 2.10 нарушаются. Такие случаи рассмотрены в примерах 3.3–3.6.

Пример 3.1. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — последовательность субмер, причем для всякого множества $E \in \mathfrak{R}$ последовательность $\{\varphi_k(E)\}_k$ не возрастает. Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна. В качестве субмеры φ можно взять предельную субмеру

$$\forall E \in \mathfrak{R} \quad \varphi(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E).$$

Пример 3.2. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — такая последовательность субмер, что

$$\forall E \in \mathfrak{R} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = 0.$$

Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна. В качестве подходящей субмеры можно взять предельную субмеру $\varphi = 0$ и, в силу теоремы 2.6, только ее.

Пример 3.3. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — последовательность конечных мер, равномерно сходящаяся на кольце $\mathfrak{R}$ к мере φ . Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна, подходящей субмерой будет $s(\varphi)$.

В самом деле, в силу равномерной сходимости имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad \forall E \in \mathfrak{R} \quad |\varphi_k(E) - \varphi(E)| < \varepsilon,$$

следовательно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad \forall E \in \mathfrak{R} \quad \begin{cases} |\varphi_k(E)| < |\varphi(E)| + \varepsilon, \\ |\varphi(E)| < |\varphi_k(E)| + \varepsilon, \end{cases}$$

откуда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad \forall E \in \mathfrak{R} \quad \begin{cases} s(\varphi_k)(E) \leq s(\varphi)(E) + \varepsilon, \\ s(\varphi)(E) \leq s(\varphi_k)(E) + \varepsilon. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть последовательность множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E_k) = 0.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_1 \ s(\varphi_k)(E_k) < \frac{\varepsilon}{2}$, при этом в силу (3.1) $\exists n_2 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_2 \ s(\varphi)(E_k) < s(\varphi_k)(E_k) + \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $n = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда $\forall k \geq n \ s(\varphi)(E_k) < \varepsilon$, что в силу произвольности ε означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi)(E_k) = 0.$$

Таким образом, условие (ДН1) выполнено.

Проверим условие (ДН2). Пусть множество $E \in \mathfrak{R}$ таково, что $s(\varphi)(E) = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (3.1) $\exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n \ s(\varphi_k)(E) < s(\varphi)(E) + \varepsilon = \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E) = 0.$$

Таким образом субмера $s(\varphi)$ является подходящей для последовательности $\{\varphi_k\}_k$.

Пример 3.4. Пусть $X = [0, +\infty)$, $\mathfrak{R}$ — σ -алгебра лебеговых подмножеств X . Пусть λ — мера Лебега на X . Положим $\forall k \in \mathbb{N} \forall E \in \mathfrak{R} \ \varphi_k(E) = \lambda(E \cap [0, k])$. Тогда

$$\forall E \in \mathfrak{R} \ \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = \lambda(E).$$

Положим $\forall k \in \mathbb{N} \ E_k = [k, k+1]$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E_k) = 0, \text{ но } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) = 1.$$

Таким образом, предельная субмера λ не является подходящей. В то же время мера

$$\forall E \in \mathfrak{R} \ \varphi(E) = \int_E e^{-x} dx$$

является подходящей субмерой. В самом деле, пусть последовательность множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E_k) = 0. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(E_k) &= \int_{E_k \cap [0, k]} e^{-x} dx + \int_{E_k \cap (k, +\infty)} e^{-x} dx \leq \\ &\leq \lambda(E_k \cap [0, k]) + \int_{(k, +\infty)} e^{-x} dx = \varphi_k(E_k) + e^{-k}, \end{aligned}$$

откуда в силу (3.2) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(E_k) = 0.$$

Если же для некоторого множества $E \in \mathfrak{R} \ \varphi(E) = 0$, то $\lambda(E) = 0$, следовательно, $\forall k \in \mathbb{N} \ \varphi_k(E) = 0$. Таким образом, φ является подходящей субмерой, при этом она не эквивалентна предельной субмере λ .

Пример 3.5. Пусть λ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$ и $\{c_k\}_k$ — некоторая неубывающая положительная (не обязательно ограниченная) числовая последовательность. Положим $\forall k \in \mathbb{N} \ \varphi_k = c_k \lambda$. Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ диагонально непрерывна. В качестве субмеры φ можно взять $\varphi = \lambda$.

Пример 3.6. Пусть λ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$, $[a, b] \subset (0, +\infty)$ и $\{c_k\}_k \subset [a, b]$ — некоторая числовая последовательность. Положим $\forall k \in \mathbb{N} \ \varphi_k = c_k \lambda$. Тогда

последовательность $\{\varphi_k\}_k$ — диагонально непрерывна. В качестве субмеры φ можно взять $\varphi = \lambda$. При этом, если последовательность $\{c_k\}_k$ расходится, предельная субмера не существует.

Приведем примеры последовательностей функций множества, не являющихся диагонально непрерывными.

Пример 3.7. Пусть λ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Положим $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_k = k^{(-1)^k} \lambda$. Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ не является диагонально непрерывной. В самом деле, предположим, что существует подходящая субмера φ . Рассмотрим последовательность множеств $\{E_k\}_k$, в которой $E_1 = E_3 = E_5 = \dots = [0, 1]$ и $E_2 = E_4 = E_6 = \dots = \emptyset$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E_k) = 0,$$

откуда в силу условия (ДН1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(E_k) = 0.$$

Тогда $\varphi([0, 1]) = 0$, но последовательность $\{\varphi_k([0, 1])\}_k$ при этом расходится. Получаем противоречие с условием (ДН2). Отметим, что предельная субмера не существует.

Пример 3.8. Пусть $X = [0, \pi]$, $\mathfrak{R}$ — σ -алгебра лебеговых подмножеств X . Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall E \in \mathfrak{R} \varphi_k(E) = \int_E (1 + \operatorname{sgn} \sin kx) dx.$$

Тогда

$$\forall E \in \mathfrak{R} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = \lambda(E). \quad (3.3)$$

Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} E_k = \{x \in [0, 1] : \sin kx < 0\}.$$

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E_k) = 0,$$

но

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом предельная субмера существует, но не является подходящей. В силу теоремы 3.10 последовательность $\{\varphi_k\}_k$ не является диагонально непрерывной.

4. Равностепенная абсолютная непрерывность двух последовательностей мер

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{R}$ — δ -кольцо, $\{\varphi_k\}_k$ — равномерно исчерпывающая последовательность конечных σ -аддитивных мер, $\{\psi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность мер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_k \ll \psi_k$. Тогда последовательность $\{\varphi_k\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности $\{\psi_k\}_k$ тогда и только тогда, когда

$$\forall E \in \mathfrak{R} \lim_{k \rightarrow \infty} s(\psi_k)(E) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E) = 0. \quad (4.1)$$

Лемма 4.2. [6] Пусть $\{\varphi_k\}_k$ и $\{\psi_k\}_k$ — последовательности функций множеств. Если $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_k \ll \psi_k$, то $\{\varphi_k\}_k \lll \{\psi_k\}_k$ тогда и только тогда, когда для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ из того, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\psi_k)(E_k) = 0,$$

следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E_k) = 0.$$

Лемма 4.3. Пусть $\{\varphi_k\}_k$ — равномерно исчерпывающая последовательность субмер. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ — такая последовательность множеств, что $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_k(E_k) \geq 2\varepsilon$. Тогда существуют такая возрастающая последовательность номеров $\{p_k\}_k \subset \mathbb{N}$ ($p_0 = 1$) и такая невозрастающая последовательность множеств $\{F_k\}_k \subset \mathfrak{R}$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} F_k \subset \bigcup_{j=p_{k-1}}^{p_k-1} E_j$$

и

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall m \geq p_k \varphi_m(F_k) \geq \varepsilon.$$

Доказательство. Отметим, что, по существу, это утверждение доказано в работе [11]. Для полноты изложения приведем доказательство полностью. Положим $p_0 = 1$, $F_0 = X$, $\forall k \geq p_0 E_k^0 = E_k \cap F_0$. Получаем $\{E_k\}_{k \geq p_0} \subset \mathfrak{R}$, причем

$$\forall k \geq p_0 \varphi_k(E_k^0) \geq 2\varepsilon \geq \varepsilon.$$

В силу того, что последовательность субмер $\{\varphi_k\}_k$ равномерно исчерпывающая,

$$\exists p_1 > p_0 \forall k \geq p_1 \varphi_k \left(E_k^0 \setminus \bigcup_{j=p_0}^{p_1-1} E_j^0 \right) < \frac{\varepsilon}{2^1}.$$

Положим

$$F_1 = \bigcup_{j=p_0}^{p_1-1} E_j^0 \in \mathfrak{R}.$$

Тогда

$$F_1 \subset \left(\bigcup_{j=p_0}^{p_1-1} E_j \right) \cap F_0$$

и

$$\forall k \geq p_1 \varphi_k(F_1) \geq \varphi_k(E_k^0 \cap F_1) \geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^1}.$$

Положим $\forall k \geq p_1 E_k^1 = E_k^0 \cap F_1$. Получаем $\{E_k^1\}_{k \geq p_1} \subset \mathfrak{R}$, причем

$$\forall k \geq p_1 \varphi_k(E_k^1) \geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^1} \geq \varepsilon.$$

Аналогично

$$\exists p_2 > p_1 \forall k \geq p_2 \varphi_k \left(E_k^1 \setminus \bigcup_{j=p_1}^{p_2-1} E_j^1 \right) < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Положим

$$F_2 = \bigcup_{j=p_1}^{p_2-1} E_j^1 \in \mathfrak{R}.$$

Тогда

$$F_2 \subset \left(\bigcup_{j=p_1}^{p_2-1} E_j \right) \cap F_1$$

и

$$\forall k \geq p_2 \quad \varphi_k(F_2) \geq \varphi_k(E_k^1 \cap F_2) \geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^1} - \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Положим $\forall k \geq p_2 \quad E_k^2 = E_k^1 \cap F_2$. Получаем $\{E_k^2\}_{k \geq p_2} \subset \mathfrak{R}$, причем

$$\forall k \geq p_2 \quad \varphi_k(E_k^2) \geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^1} - \frac{\varepsilon}{2^2} \geq \varepsilon.$$

И так далее. В результате этого индуктивного процесса получаем искомые последовательности. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное, что (4.1) выполняется, а РАН — нет. Тогда в силу леммы 5.2 найдутся $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E_k\}_k \subset \mathfrak{R}$ и возрастающая последовательность номеров $\{m_k\}_k$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\psi_{m_k})(E_k) = 0$$

и

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\varphi_{m_k}(E_k)| > \varepsilon.$$

Пусть ψ — подходящая субмера для последовательности $\{\psi_k\}_k$. В силу теоремы 2.4 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(E_k) = 0,$$

следовательно, существует такая возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}_k$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(E_{n_k}) < +\infty,$$

при этом

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\varphi_{m_{n_k}}(E_{n_k})| > \varepsilon.$$

Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(E_k) < +\infty \quad \text{и} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |\varphi_k(E_k)| > \varepsilon.$$

В силу леммы 4.3 существуют такие возрастающая последовательность номеров $\{p_k\}_k$ и невозрастающая последовательность множеств $\{F_k\}_k \subset \mathfrak{R}$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad F_k \subset \bigcup_{j=p_{k-1}}^{p_k-1} E_j$$

и

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq p_k \quad s(\varphi_m)(F_k) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

В частности,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad s(\varphi_{p_k})(F_k) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Так как в силу полуаддитивности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(F_k) = 0,$$

то $\psi(G) = 0$, откуда в силу условия ДН2 получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\psi_k)(G) = 0.$$

Тогда по условию теоремы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(G) = 0.$$

Тогда

$$\exists n \forall k \geq n \quad s(\varphi_k)(G) < \frac{\varepsilon}{4}$$

и, следовательно, в силу полуаддитивности

$$\forall k \geq n \quad s(\varphi_{p_k})(F_k \setminus G) > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Однако последовательность $\{s(\varphi_k)\}_k$ на σ -алгебре $\mathfrak{R} \cap 2^{F_1}$ равномерно непрерывна сверху на $\emptyset$ (см., например, [10]), в силу чего должно выполняться

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_{p_k})(F_k \setminus G) = 0.$$

Противоречие. Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что условие диагональной непрерывности в теореме 4.1 является необходимым.

Пример 4.4. Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_k = \lambda$, $\psi_k = k^{(-1)^k} \lambda$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Тогда условия теоремы 5.1 выполнены, за исключением диагональной непрерывности последовательности $\{\psi_k\}_k$ (см. пример 4.7). При этом легко видеть, что свойство $\{\varphi_k\}_k \lll \{\psi_k\}_k$ не выполняется.

В заключение приведем пример, показывающий, что в (4.1) условие $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi_k)(E) = 0$ нельзя заменить более слабым $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = 0$.

Пример 4.5. Пусть $X = [0, \pi]$, $\mathfrak{R}$ — σ -алгебра лебеговых подмножеств X . Положим

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall E \in \mathfrak{R} \quad \varphi_k(E) = \int_E \operatorname{sgn} \sin kx \, dx$$

и

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi_k(E) = \frac{1}{k} \lambda(E).$$

Тогда $\{\varphi_k\}_k$ — равномерно исчерпывающая последовательность конечных σ -аддитивных мер, $\{\psi_k\}_k$ — диагонально непрерывная последовательность мер, причем $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_k \ll \psi_k$. Также

$$\forall E \in \mathfrak{R} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s(\psi_k)(E) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = 0,$$

поскольку

$$\forall E \in \mathfrak{R} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(E) = 0.$$

Однако $\{\varphi_k\}_k \lll \{\psi_k\}_k$ не выполняется, поскольку

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad s(\varphi_k)(X) = \pi,$$

но

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad s(\psi_k)(X) = \frac{\pi}{k}.$$

Литература

- [1] Арешкин, Г.Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона / Г.Я. Арешкин // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1949. – Т. 10. – №2. – С. 69–76.
- [2] Арешкин, Г.Я. Об одном обобщении теоремы Витали о переходе к пределу под знаком интеграла / Г.Я. Арешкин, В.М. Климкин // Ученые записки ЛГ-ПИ им. А. И. Герцена. 1968. – Т. 387. – С. 79–91.
- [3] Климкин, В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности семейства векторнозначных мер / В.М. Климкин // Ученые записки Красноярского пединститута. – 1970. – Вып. 2. – С. 45–57.
- [4] Климкин, В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности / В.М. Климкин // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25. – №2. – С. 199–209.
- [5] Алякин, В.А. Теорема Витали–Хана–Сакса для двух последовательностей мер / В.А. Алякин // Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. – Куйбышев, 1984.
- [6] Алякин, В.А. Диагональные последовательности мер / В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2006. – №2(42). – С. 5–14.
- [7] Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
- [8] Алексюк, В.Н. Две теоремы о существовании квазيبазиса семейства квазимер / В.Н. Алексюк // Известия ВУЗов. Сер. "Математика". – 1968. – №6(73). – С. 11–18.
- [9] Богачев, В.И. Основы теории меры. Т. 1 / В.И. Богачев. – М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". – 2003. – 544 с.
- [10] Климкин, В.М. Введение в теорию функции множества: учебное пособие / В.М. Климкин. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989.
- [11] Drewnowski, L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I, II, III. / L. Drewnowski. - Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 1972. – V. 20. – P. 269–276, 277–286, 439–445.

Поступила в редакцию 1/V/2007;
в окончательном варианте — 31/V/2007.

DIAGONAL CONTINUOUS SEQUENCES OF MEASURES³

© 2007 V.A. Alyakin, D.E. Klepnev⁴

A notion of diagonal continuous sequences of measures is introduced. A criterion of uniform absolute continuity for two sequences of measures is obtained. It is possible to consider this criterion as a sequential analogue of well known theorem stating equivalence of absolute continuity and nil-continuity of two measures.

Paper received 1/V/2007;
Paper accepted 31/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴Alyakin Vladimir Alekseevich (aval@ssu.samara.ru), Klepnev Dmitrii Eduardovich (dek1@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.