

РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2n-ГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© 2007 С.В. Попов, С.В. Потапова¹

В работе рассматриваются параболические уравнения $2n$ -го порядка с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гельдера. Показано, что гельдеровские классы их решений существенно зависят как от форм условий склеивания при выполнении необходимых и достаточных условий на данные задачи, так и от нецелого показателя.

В краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гельдеровским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением эволюции гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x,t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удастся показать, что нецелый показатель $p - [p]$ пространства $H_{x,t}^{p,p/2n}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения:

$$\operatorname{sgn} x u_t = Lu, \quad (1)$$

где

$$Lu = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(k(x, t) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) + c(x, t)u,$$

$$k(x, t) \geq \delta > 0, \quad c(x, t) \leq 0.$$

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H_{x,t}^{p,p/2n}$, $p = 2nl + \gamma$, $0 < \gamma < 1$. удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \quad x < 0 \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t) \quad (k = 0, \dots, 2n - 1), \quad (3)$$

¹ Попов Сергей Вячеславович (madu@sitc.ru), Потапова Саргылана Викторовна (sargyp@mail.ru), кафедра математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета, 677011, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

где σ_k — действительные постоянные, $l \geq 1$ — целое число.

Большое число работ посвящено изучению таких уравнений при $n = 1$ (см. [4] и имеющуюся там библиографию).

Рассматриваются параболические уравнения $2n$ -го порядка ($n \geq 2$) с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [4, 5], а также систем этих уравнений [6].

Общие условия сопряжения для параболических уравнений четвертого порядка были исследованы в работах [17, 18] и для них были найдены зависимости показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания. В частности, было замечено, что при $p - [p] \geq 1 - 4\theta(\sigma_k) > 0$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных начальных данных.

Центральным местом данной работы является явное представление условий $2nl$ -разрешимости

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 2nl \quad (4)$$

для краевых задач (1)–(3), когда n — произвольное натуральное число. Для доказательства $2nl$ -разрешимости при $n = 2$ и $n = 3$ необходимо рассмотрение общих условий склеивания, более того, находится зависимость показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания, а при $n \geq 4$, оказалось, достаточно рассмотрения на линии раздела непрерывных условий склеивания, включая $2n - 1$ -ую производную (случай $\sigma_k = 1$).

Уравнения четвертого порядка. Для удобства вместо уравнения (1) в области $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$ будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L \equiv -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \right). \quad (5)$$

Решение системы уравнений ищется из пространства Гельдера $H_{x,t}^{p,p/4}$, $p = 4l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (6)$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \sigma_k(-1)^k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t) \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (7)$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ ($i = 1, 2$). Тогда функции

$$\omega_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U_0(x, t; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad \omega_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U_0(\xi, T; x, t) \varphi_2(\xi) d\xi,$$

являются решениями уравнений (5), удовлетворяющими условиям (6) в $\mathbb{R}$. Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (5):

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \int_0^t U_0(x, t; 0, \tau) \alpha_0(\tau) d\tau + \int_0^t U_1(x, t; 0, \tau) \alpha_1(\tau) d\tau + \omega_1(x, t), \\ u^2(x, t) &= \int_t^T U_0(0, \tau; x, t) \beta_0(\tau) d\tau + \int_t^T U_2(0, \tau; x, t) \beta_1(\tau) d\tau + \omega_2(x, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где U_i ($i = 0, 1, 2$) — фундаментальное и элементарные решения Б. Пини [1, 7, 8].

В силу общих результатов [9, 10] плотности α_k , β_k ($k = 0, 1$) должны принадлежать пространству H^q ($q = \frac{p-3}{4}$), причем

$$\alpha_k^{(s)}(0) = \beta_k^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l-1). \quad (9)$$

Из условий склеивания (7) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно α_k , β_k

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4}) \int_0^t \frac{\alpha_0(\tau) + \alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{4}}} d\tau + \omega_1(0, t) = \frac{\sigma_0}{4}\Gamma(\frac{1}{4}) \int_t^T \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{4}}} d\tau + \sigma_0\omega_2(0, t), \\ -\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \int_0^t \frac{\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau - \frac{\sigma_1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \int_t^T \frac{\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \omega_{1x}(0, t) + \sigma_1\omega_{2x}(0, t) = 0, \\ -\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4}) \int_0^t \frac{\alpha_0(\tau) - \alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \omega_{1xx}(0, t) = -\frac{\sigma_2}{4}\Gamma(\frac{3}{4}) \int_t^T \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \sigma_2\omega_{2xx}(0, t), \\ \frac{\pi}{2}(\alpha_0(t) + \sigma_3\beta_0(t)) + \omega_{1xxx} + \sigma_3\omega_{2xxx} = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Для удобства записи будем считать $T = 1$. Из уравнений (10) при помощи формул обращения оператора Абеля ([4]) получим эквивалентную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\beta_0(t) + \beta_1(t)) - \\ - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/4} \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/4}} d\tau, \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2} \frac{\beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\beta_0(t) - \beta_1(t)) - \\ - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/4} \frac{\alpha_0(\tau) - \alpha_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_2(\tau)}{(t-\tau)^{1/4}} d\tau, \\ \alpha_0(t) + \sigma_3\beta_0(t) = \frac{1}{2}\Phi_3(t), \end{array} \right. \quad (11)$$

где

$$\Phi_j(t) = \frac{4}{\pi\Gamma(\frac{1+j}{4})} \left((-1)^j \sigma_j \frac{\partial^j \omega_2}{\partial x^j}(0, t) - \frac{\partial^j \omega_1}{\partial x^j}(0, t) \right) \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_0^i(t) &= \int_0^t \frac{\Phi_0^{(i+1)}(\tau) - \Phi_0^{(i+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau, \\ F_j^i(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_j^{(i)}(\tau) - \Phi_j^{(i)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{4}}} d\tau, \\ F_3^i(t) &= \Phi_3^{(i)}(t) - \Phi_3^{(i)}(0), \\ G_1^i(t) &= \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\Phi_1^{(i)}(1) - \Phi_1^{(i)}(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ (i &= 0, \dots, l-1, \quad j = 1, 2). \end{aligned}$$

Так как $\Phi_k^{l-1} \in H^{q_k}$, $q_k = 1 + \frac{\gamma - k}{4}$, то функции $F_k^{l-1}(t)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/4}(0, 1)$, причем $F_k^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/4})$ для малых t .

Мы доказываем существование решений α_i , β_i системы уравнений (11) из пространства H^q ($q = (p-3)/4$, $p = 4l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$), удовлетворяющие условиям (9).

Предположим, что функции α_i , β_i принадлежат искомому пространству. Тогда из второго и четвертого уравнений системы (11) следует что, для того чтобы $\alpha_i(0) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$-\frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{1}{2} \Phi_1(0), \quad \sigma_3 \beta_0(0) = \frac{1}{2} \Phi_3(0). \quad (12)$$

Из первого и третьего уравнений системы (11) следует выполнение условий

$$\frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{4}}} d\tau = -\Phi_0(0), \quad \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{3}{4}}} d\tau = -\Phi_2(0). \quad (13)$$

При выполнении условий (12), (13) систему уравнений (11) можно переписать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\beta_0(t) + \beta_1(t)) - \\ - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = 4\Phi'_0(0)t^{1/4} + F_0^0(t), \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_1^0(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\beta_0(t) - \beta_1(t)) - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_2^0(t), \\ \alpha_0(t) + \sigma_3 \beta_0(t) - \sigma_3 \beta_0(0) = F_3^0(t). \end{array} \right. \quad (14)$$

Положим

$$\beta_1(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{F_1^0(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau} d\tau - \frac{1}{\sigma_1} G_1^0(0)$$

и покажем, что это условие эквивалентно условию $\beta_1(1) = 0$. В самом деле, второе уравнение системы (11) также эквивалентно уравнению

$$-\sigma_1 \beta_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1-t}\right)^{1/2} \frac{\alpha_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\Phi_1(\tau)}{(\tau - t)^{1/2}} d\tau. \quad (15)$$

Подставляя в (15) $t = 0$, а также $\alpha_1(t)$ из второго уравнения (14), при этом имея в виду формулу [11, с.177]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\tau^{a-1}(1-\tau)^{b-1}}{\tau - t} d\tau &= t^{a-1}(1-t)^{b-1} \cot(b\pi) - \\ &- \frac{\Gamma(a)}{\pi\Gamma(b-1)} \Gamma(a+b-1) F(2-a-b, 1, 2-b; 1-t), \end{aligned} \quad (16)$$

получим

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\alpha_1(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{1}{2} \Phi_1(1), \quad (17)$$

которое, очевидно, эквивалентно $\beta_1(1) = 0$.

Введем в системе (14) новые искомые функции $\bar{\beta}_i(t) = \beta_i(t) - \beta_i(0)(1-t)$ ($i = 0, 1$). Тогда (14), воспользовавшись формулой (16), представим в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}_0(t) + \bar{\beta}_1(t)) - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = \\ \quad = 4\Phi'_0(0)t^{1/4} + F_0^0(t) - \frac{16\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F(-\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}; t)t^{1/4}, \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_1^0(t) + \frac{4\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; t)t^{1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}_0(t) - \bar{\beta}_1(t)) - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = \\ \quad = F_2^0(t) - \frac{16\sigma_2}{3\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F(-\frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}; t)t^{3/4}, \\ \alpha_0(t) + \sigma_3\bar{\beta}_0(t) = \sigma_3\beta_0(0)t + F_3^0(t). \end{array} \right. \quad (18)$$

Далее, если $l > 1$, то возьмем производные в полученных системах уравнений (18). Исходя из формулы

$$\frac{d}{dt}[F(a, b, c; t)t^{c-1}] = (c-1)t^{c-2}F(a, b, c-1; t), \quad (19)$$

получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}'_0(t) + \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{t^{-3/4}\sigma_0}{4\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau - t)} d\tau - \\ \quad - \frac{t^{1/4}\sigma_0}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau - t)} d\tau = \\ \quad = \Phi'_0(0)t^{-3/4} + 4\Phi''_0(0)t^{1/4} + F_0^1(t) - \frac{4\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F(-\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}; t)t^{-3/4}, \\ \alpha'_1(t) + \frac{t^{-1/2}\sigma_1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau - t)} d\tau + \frac{t^{1/2}\sigma_1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau - t)} d\tau = \\ \quad = \frac{1}{2}\Phi'_1(0)t^{-1/2} + F_1^1(t) + \frac{2\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; t)t^{-1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{t^{-1/4}\sigma_2}{4\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau - t)} d\tau - \\ \quad - \frac{t^{3/4}\sigma_2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau - t)} d\tau = \\ \quad = -\Phi'_2(0)t^{-1/4} + F_2^1(t) - \frac{4\sigma_2}{\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}; t)t^{-1/4}, \\ \alpha'_0(t) + \sigma_3\bar{\beta}'_0(t) = \sigma_3\beta_0(0) - \frac{1}{2}\Phi'_3(0) + F_3^1(t). \end{array} \right. \quad (20)$$

Для дальнейшего нам понадобится одно важное свойство сингулярного интеграла.

Если $\varphi(t) \in H^{1+\gamma}(0, 1)$, то

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{\varphi(0)}{t} - \frac{\varphi(1)}{1-t} + \int_0^1 \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (21)$$

В силу (21) из второго и четвертого уравнений системы (20) следует, что для того чтобы $\beta'_i(1) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \sigma_1 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = 4\beta_1(0) + \pi\Phi'_1(0), \\ \sigma_3 \bar{\beta}'_0(0) = \sigma_3\beta_0(0) - \frac{1}{2}\Phi'_3(0). \end{cases} \quad (22)$$

Из остальных уравнений системы (20) следует выполнение условий

$$\begin{cases} \sigma_0 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{5/4}} d\tau = \frac{16\sigma_0}{3}(\beta_0(0) + \beta_1(0)) - 4\pi\Phi'_0(0), \\ \sigma_2 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{7/4}} d\tau = \frac{16\sigma_2}{3}(\beta_0(0) - \beta_1(0)) + \frac{4}{3}\pi\Phi'_2(0). \end{cases} \quad (23)$$

Так как справедливы равенства

$$\begin{aligned} F(-3/4, 1, 1/4; t) - 1 &= -3F(1/4, 1, 5/4; t)t, \\ F(-1/2, 1, 1/2; t) - 1 &= -F(1/2, 1, 3/2; t)t, \\ F(-1/4, 1, 3/4; t) - 1 &= -\frac{1}{3}F(3/4, 1, 7/4; t)t, \end{aligned}$$

то в силу формулы (21) систему уравнений (20) при выполнении условий (22), (23) можно представить так:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}'_0(t) + \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\bar{\beta}'_0(\tau) + \bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &\quad = 4\Phi''_0(0)t^{1/4} + F_0^1(t) + \frac{4\sigma_0}{\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}; t\right)t^{1/4}, \\ &\alpha'_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &\quad = F_1^1(t) - \frac{2\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; t\right)t^{-1/2}, \\ &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\bar{\beta}'_0(\tau) - \bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &\quad = F_2^1(t) + \frac{4\sigma_2}{3\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F\left(\frac{3}{4}, 1, \frac{7}{4}; t\right)t^{3/4}, \\ &\alpha'_0(t) + \sigma_3(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_0(0)) = F_3^1(t). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Подставляя значения $\bar{\beta}'_i(t) = \beta'_i(t) + \beta_i(0)$ в систему (24) и имея в виду формулу

(16), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\beta'_0(t) + \beta'_1(t)) - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta'_0(\tau) + \beta'_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = \\ \quad = 4\Phi_0''(0)t^{1/4} + F_0^1(t), \\ \alpha'_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta'_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_1^1(t), \\ \sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\beta'_0(t) - \beta'_1(t)) - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_2^1(t), \\ \alpha'_0(t) + \sigma_3(\beta'_0(t) - \beta'_0(0)) = F_3^1(t). \end{array} \right. \quad (25)$$

Таким образом, мы получили уравнения (25), имеющие точно такой же вид, как и первоначальные уравнения (14). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) - \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sigma_1\beta_1^{(s)}(0) + \pi\Phi_1^{(s+1)}(0), \\ \sigma_3\beta_0^{(s+1)}(0) = \frac{1}{2}\Phi_3^{(s+1)}(0), \\ \sigma_0 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) + \beta_1^{(s)}(\tau) - \beta_0^{(s)}(0) - \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{5/4}} d\tau = 4\sigma_0(\beta_0^{(s)}(0) + \beta_1^{(s)}(0)) - 4\pi\Phi_0^{(s+1)}(0), \\ \sigma_2 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) - \beta_1^{(s)}(\tau) - \beta_0^{(s)}(0) + \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{7/4}} d\tau = \frac{4}{3}\sigma_2(\beta_0^{(s)}(0) - \beta_1^{(s)}(0)) + \frac{4}{3}\pi\Phi_2^{(s+1)}(0), \\ s = 1, \dots, l-2, \end{array} \right. \quad (26)$$

мы придем к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) + \alpha_1^{(l-1)}(t)) + \sigma_0(\beta_0^{(l-1)}(t) + \beta_1^{(l-1)}(t)) - \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau) + \beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = 4\Phi_0^{(l)}(0)t^{1/4} + F_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) - \alpha_1^{(l-1)}(t)) - \sigma_2(\beta_0^{(l-1)}(t) - \beta_1^{(l-1)}(t)) - \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau) - \beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t) + \sigma_3(\beta_0^{(l-1)}(t) - \beta_0^{(l-1)}(0)) = F_3^{l-1}(t), \end{array} \right. \quad (27)$$

где

$$\beta_1^{(s)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{F_1^s(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau} d\tau - \frac{1}{\sigma_1} G_1^s(0), s = 1, \dots, l-1.$$

Заметим, как и выше, условия (28) эквивалентны $\beta_1^{(s)}(1) = 0$ при $s = 1, \dots, l-1$.

Далее, вводя новые искомые функции $\tilde{\beta}_i^{(l-1)}(t) = \beta_i^{(l-1)}(t) - \beta_i^{(l-1)}(0)(1-t)$, $\sigma_3\beta_0^{(l-1)}(0) = \frac{1}{2}\Phi_3^{(l-1)}(0)$ в системе (27) получим уравнения вида (18). Так как функ-

ции $\alpha_i^{(l-1)}$, $\beta_i^{(l-1)}$ мы ищем из пространства $H^{(1+\gamma)/4}$, то из первого уравнения полученной системы уравнений следует, что должно выполняться условие

$$\sigma_0 \int_0^1 \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau^{5/4}} d\tau = \frac{16\sigma_0}{3} (\beta_0^{(l-1)}(0) + \beta_1^{(l-1)}(0)) - 4\pi\Phi_0^{(l)}(0). \quad (28)$$

Тогда при выполнении (28), мы в конечном итоге, придем к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) + \alpha_1^{(l-1)}(t)) + \sigma_0(\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)) - \\ - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4} \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \bar{F}_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \bar{F}_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) - \alpha_1^{(l-1)}(t)) - \sigma_2(\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) - \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)) - \\ - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) - \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \bar{F}_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t) + \sigma_3\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) = \bar{F}_3^{l-1}(t), \end{array} \right. \quad (29)$$

где функции

$$\begin{aligned} \bar{F}_0^{l-1}(t) &= F_0^{l-1}(t) - \frac{16\sigma_0}{3\pi} (\beta_0^{(l-1)}(0) + \beta_1^{(l-1)}(0)) [F(-3/4, 1, 5/4; t) - 1] t^{1/4}, \\ \bar{F}_1^{l-1}(t) &= F_1^{l-1}(t) + \frac{4\sigma_1}{\pi} \beta_1^{(l-1)}(0) F(-1/2, 1, 3/2; t) t^{1/2}, \\ \bar{F}_2^{l-1}(t) &= F_2^{l-1}(t) - \frac{16\sigma_2}{3\pi} (\beta_0^{(l-1)}(0) - \beta_1^{(l-1)}(0)) F(-1/4, 1, 7/4; t) t^{3/4}, \\ \bar{F}_3^{l-1}(t) &= F_3^{l-1}(t) + \sigma_3\beta_0^{(l-1)}(0)t \end{aligned}$$

принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/4}$, причем $\bar{F}_j^{l-1}(t) = O(t^{\frac{1+\gamma}{4}})$ ($j = 0, 1, 2, 3$) для малых t .

Перейдем к доказательству существования функций $\alpha_i^{(l-1)}(t)$, $\beta_i^{(l-1)}(t)$ из пространства $H^{q-(l-1)}$ в полученной системе уравнений (29).

Исключим $\alpha_i^{(l-1)}(t)$ из системы (29). Имеем

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{Q}(t), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= (\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t), \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)), \\ A &= \begin{pmatrix} \sigma_0 - \sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_3 & \sigma_0 + \sigma_2 \\ \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ B(t, \tau) &= \begin{pmatrix} \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} \\ \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} + 2\sqrt{2}\sigma_1(\frac{t}{\tau})^{1/2} \end{pmatrix}, \\ \vec{Q}(t) &= (\bar{F}_0^{l-1} + \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_3^{l-1}, \bar{F}_0^{l-1} - \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_1^{l-1}). \end{aligned}$$

Систему сингулярных уравнений (30) можно переписать так:

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{B}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t, \tau)\vec{\beta}(\tau) d\tau = \vec{Q}(t), \quad (31)$$

где

$$B \equiv B(t, t) = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0 - \sigma_2 & \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$M(t, \tau) = \frac{B - B(t, \tau)}{\tau - t}.$$

Для того чтобы выделить характеристическую часть оператора K , перепишем систему сингулярных уравнений (31) в виде

$$CK\vec{\beta} = C\vec{Q}(t), \quad (32)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 & \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 & \sigma_0 + \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$CA = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 - \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \\ \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CB = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре–Бертрана [2, 3, 6], выделим характеристическую часть K^0 оператора CK системы уравнений (32):

$$K^0\vec{\beta} \equiv aE\vec{\beta}(t) - \frac{bE}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (33)$$

где E — единичная матрица,

$$a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,$$

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Полученную систему сингулярных интегральных уравнений

$$K^0\vec{\beta} = \vec{G}, \quad \vec{G} = aA^{-1} \left(\vec{Q} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t, \tau)\vec{\beta}(\tau) d\tau \right) \quad (34)$$

будем решать в классе функций ограниченных на концах отрезка $(0, 1)$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию

$$\vec{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Тогда система (34) примет вид

$$\begin{cases} \vec{\Psi}^+(t) = \frac{a+bi}{a-bi} \vec{\Psi}^-(t) + \frac{\vec{G}(t)}{a-bi} & (0 < t < 1), \\ \vec{\Psi}^+(t) = \vec{\Psi}^-(t) & (t < 0, \quad t > 1). \end{cases}$$

Решения уравнений (34) эквивалентны решению задачи Римана (35) при дополнительном условии $\vec{\Psi}(\infty) = 0$. Рассмотрим $k = 1$. Так как $g = \frac{a+ib}{a-ib} = e^{i2\pi\theta}$,

$$\theta = \frac{1}{\pi} \arctan \left| \frac{a}{b} \right| \text{ и}$$

$$\exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln g}{\tau - z} \right) = z^{-\theta} (z - 1)^{\theta},$$

то в указанном классе, в случае, когда a и b одного знака, каноническая функция $X(z) = z^{1-\theta}(z-1)^{\theta}$, индекс задачи (35) $\varkappa = -1$. В случае же, когда a и b разного знака, каноническая функция $X(z) = z^{\theta}(z-1)^{1-\theta}$. Согласно общей теории [2, 3]

$$\vec{\Psi}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau) d\tau}{(a - bi)X^+(\tau)(\tau - z)}$$

при условии

$$\int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)}{X(\tau)} d\tau = 0. \quad (35)$$

Тогда

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\Psi}^+(t) - \vec{\Psi}^-(t) = \frac{1}{2} \vec{G}(t) + \frac{X(t)}{2\pi} \int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau) d\tau}{X(\tau)(\tau - t)}. \quad (36)$$

Формулы (35) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие ограниченности $\vec{\beta}(t)$ при $t = 1$.

Подставляя в (36) значения $\vec{G}_k(t)$, приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K^* k \vec{\beta} = \vec{Q}^*, \quad (37)$$

где

$$K^* k \vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 N(t, \tau) \vec{\beta}(\tau) d\tau.$$

Всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (37) будут, очевидно, принадлежать пространству Гельдера во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. В самом деле, функции $\vec{Q}^*$ будут, очевидно, удовлетворять условию Гельдера во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. Функция $M(t, \tau)$ имеет интегрируемые особенности при $t = \tau$ во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. В силу соответствующих теорем поведения интегралов типа Коши на концах контура интегрирования [2, 3, 4], легко вывести, что $M(t, \tau)$, $\vec{Q}^*$ на концах 0,1 будут вести себя как $t^{\frac{1}{2}+\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$ или $t^{\frac{1}{2}-\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$, причем соответственно [3, §51] $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0, 1-\delta)$, или $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(\delta, 1)$, где δ — положительное, фиксированное малое число.

Таким образом, ядро $M(t, \tau)$, имея подвижные и неподвижные бесконечности порядка меньше единицы, удовлетворяет всем условиям, которые накладываются на эти функции в теории интегральных уравнений Фредгольма. Более того [3, §101], путем замены аргумента интегрирования τ можно избавиться от неподвижных бесконечностей. Из указанных свойств ядра $M(t, \tau)$ и свободного члена $\vec{Q}^*$ следует, что всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (37) на концах 0,1 ведут себя как $t^{\frac{1}{2}+\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$, если a и b одинакового знака или как $t^{\frac{1}{2}-\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$, если же a и b разного знака.

В силу леммы о принадлежности классу Гельдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [14, 15]) при выполнении неравенства $\frac{1+\gamma}{4} <$

$\frac{1}{2} - \theta$ ($\theta < \frac{1}{4}$) получим, что решения уравнений Фредгольма (37) принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0, 1)$ и обращаются в нуль на концах $0, 1$ порядка $\frac{1+\gamma}{4}$. Кроме того, решения уравнений Фредгольма (37) удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} - \theta$ при $1 - 4\theta < \gamma < 1$ и условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} - \theta - \varepsilon$ при $\gamma = 1 - 4\theta$.

Таким образом, при выполнении условий (12), (13), (22), (23), (26), (28), система уравнений (37) эквивалентна исходной системе уравнений (10). При этом отметим на выполнение условий

$$\sigma_3 \beta_0^{(s)}(0) = \frac{1}{2} \Phi_3^{(s)}(0), \quad \beta_1^{(s)}(1) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, l-1), \quad \vec{\beta}^{(l-1)}(1) = 0.$$

Разрешимость системы уравнений Фредгольма (37) следует из единственности решения основной задачи (5)–(7) и однозначности представления их через потенциалы. Значения функций $\vec{\beta}^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\vec{\beta}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\vec{\beta}^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \vec{\beta}^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad (38)$$

$$(s = 0, \dots, l-2).$$

Тогда для выполнения условий $\beta_0^{(s)}(1) = 0$ при $s = 0, \dots, l-2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-2-s} \beta_0^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad (39)$$

$$(s = 0, \dots, l-2).$$

Подставляя значения функций $\vec{\beta}^{(s)}(t)$ в условия (12), (13), (22), (23), (26), (28) получим $4l$ условий разрешимости задачи (5)–(7) в пространстве $H_{x,t}^{p,p/4}$. Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 4l. \quad (40)$$

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 4l + \gamma$). Тогда при выполнении $4l$ условий вида (40) существует единственное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6), (7) из пространства ($\theta = \frac{1}{\pi} \arctan |\frac{a}{b}| < \frac{1}{4}$)

- 1) $H_{x,t}^{p,p/4}$, если $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;
- 2) $H_{x,t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, если $1 - 4\theta < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/4}$, если $\gamma = 1 - 4\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то, как показано в [16, 1], единственное решение задачи (5)–(7) существует из искомого пространства $H_{x,t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (40).

Пример 1. Для системы уравнений (5) с начальными условиями (6) рассмотрим условия склеивания (7) при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$. В этом случае система сингулярных уравнений (34) будет иметь вид

$$(\sqrt{2} + 1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2} + 1)E}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{G} \quad (41)$$

и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l+2$ условий вида (40).

Пример 2. Для системы уравнений (5) с начальными условиями (6) рассмотрим условия склеивания (7) при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1$. В этом случае система сингулярных уравнений (34) будет иметь вид

$$(\sqrt{2}-1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2}+1)E}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \vec{G}, \quad (42)$$

в этом случае $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 0,054 < 0,25$ и мы находимся в условиях доказанной теоремы и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий вида (40).

Уравнения шестого порядка. Аналогично, как и для уравнения четвертого порядка, методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при $n=3$ приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \vec{Q}(t), \quad (43)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}(\sigma_0 - \sigma_4) - \sigma_5 & \frac{1}{12}(\sqrt{3}\sigma_0 - \sqrt{3}\sigma_4 - \sigma_1 + \sigma_3 - 4\sigma_5) & \frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{3}\sigma_0 + \sqrt{3}\sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_3) \\ \frac{\sqrt{3}}{6}(\sigma_0 - \sigma_4) & \frac{1}{12}(\sqrt{3}\sigma_0 - \sqrt{3}\sigma_4 + 3\sigma_1 - 3\sigma_3) & \frac{1}{4}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sqrt{3}\sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_3) \\ \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_4) & \frac{1}{12}(3\sigma_0 + 3\sigma_4 + \sqrt{3}\sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_3) & \frac{1}{4}(\sqrt{3}\sigma_0 - \sqrt{3}\sigma_4 + \sigma_1 - \sigma_3) \end{pmatrix},$$

$$B(t, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(\sigma_0 + 2\sigma_2 + \sigma_4) & \frac{1}{12}(\sigma_0 - 4\sigma_2 + \sigma_4 - \sqrt{3}\sigma_1 - \sqrt{3}\sigma_3) & \frac{\sqrt{3}}{12}(\sigma_0 - \sigma_4 - \sqrt{3}\sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_3) \\ \frac{1}{6}(\sigma_0 - 4\sigma_2 + \sigma_4) & \frac{1}{12}(\sigma_0 + 8\sigma_2 + \sigma_4 + 3\sqrt{3}\sigma_1 + 3\sqrt{3}\sigma_3) & \frac{\sqrt{3}}{12}(\sigma_0 - \sigma_4 + 3\sqrt{3}\sigma_1 - 3\sqrt{3}\sigma_3) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_0 - \sigma_4) & \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sigma_0 - \sigma_4 + \sqrt{3}\sigma_1 - \sqrt{3}\sigma_3) & \frac{1}{4}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sqrt{3}\sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_3) \end{pmatrix}.$$

Полученную систему сингулярных интегральных уравнений (43) решаем в классе функций ограниченных на концах отрезка $(0, 1)$. Рассуждая, так же как для случая четвертого порядка, получим следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 6l + \gamma$), $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{a}{b} \right|$ ($a = a(\sigma_k), b = b(\sigma_k)$). Тогда при выполнении $6l$ условий вида (40) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $\left(\theta \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right) \right)$:

- 1) $H_{x, t}^{p, p/6}$, если $0 < \gamma < 2 - 6\theta$;
- 2) $H_{x, t}^{q, q/6}$, $q = 6l + 2 - 6\theta$, если $2 - 6\theta < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x, t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/6}$, если $\gamma = 2 - 6\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы при $\theta \leq \frac{1}{6}$, то единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x, t}^{p, p/6}$ при выполнении $6l$ условий вида (40). Если же выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{3}$, то,

как показано в [19], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x,t}^{p,p/6}$ при выполнении $10l+2$ условий вида (40).

Пример 3. Для уравнения (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_j = 1$ ($j = 0, 1, \dots, 5$). В этом случае характеристическая часть системы сингулярных уравнений (30) будет иметь вид

$$a\vec{\beta}(t) + \frac{b}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{G}, \quad a = b = \frac{(7 + 4\sqrt{3})^3}{486}, \quad \theta = \frac{1}{4} \quad (44)$$

и мы находимся в условиях теоремы 2 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l$ условий вида (40),

Пример 4. Если рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_4 = -1$, то $\theta \approx 0,023 < \frac{1}{6}$ и мы находимся в условиях замечания 2 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l$ условий вида (40). И наконец, если рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 2$, то $\theta \approx 0,49 > \frac{1}{3}$ и мы также находимся в условиях замечания 2 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $10l+2$ условий вида (40).

Уравнения $2n$ -го порядка при $n \geq 4$. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при непрерывных условиях склеивания ($\sigma_k = 1$) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа вида (30).

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 2nl + \gamma$). Тогда при выполнении $2nl$ условий вида (40) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $H_{x,t}^{p,p/2n}$.

Литература

- [1] Popov, S.V. Parabolic equations of the fourth order with varying evolution direction / S.V. Popov // Mat. Zametki YaGU. – 2001. – V. 8. – №2. – P. 112–133.
- [2] Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
- [3] Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
- [4] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов. – Новосибирск: Наука, 1985. – 105 с.
- [5] Монахов, В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений / В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.
- [6] Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н.П. Векуа. – М.: Наука, 1968. – 380 с.
- [7] Pini, B. Sul problema fondamentale di valori contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari / B. Pini // Ann. mat. pura ed appl. – 1957. – V. 43. – P. 261–297.
- [8] Pini, B. Su una equazione paraboliche non lineare del quarto ordine / B. Pini // Rend. sem. fac. sc. Univ. Cagliari. – 1957. – V. 27. – №3–4. – P. 136–168.

- [9] Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1965. – Т. 83. – С. 3–163.
- [10] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
- [11] Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т.2 Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1970. – 327 с.
- [12] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – Учеб. пособ. для вузов. – М.: ВШ, 1985. – 304 с.
- [13] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Пресдорф. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
- [14] Попов, С.В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.В. Попов // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1991. – В. 102. – С. 100–113.
- [15] Пинигина, Н.Р. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / Н.Р. Пинигина, С.В. Попов // Мат. заметки ЯГУ. – 2002. – Т. 9. – №1. – С. 71–82.
- [16] Попов С.В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / // Ред. журн. "Сиб. мат. журнал". – Новосибирск, 1988. – 56 с.
Деп. в ВИНТИ 07.12.88, № 8646–Б88.
- [17] Попов, С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 400. – №1. – С. 29–31.
- [18] Попов, С.В. Гельдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // Мат. заметки ЯГУ. – 2004. – Т. 11. – №1. – С. 84–100.
- [19] Попов, С.В. Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции / С.В. Попов // Мат. заметки ЯГУ. – 2000. – Т. 7. – №2. – С. 93–112.

Поступила в редакцию 4/VI/2007;

в окончательном варианте — 4/VI/2007.

SOLVABILITY OF $2n$ -PARABOLIC EQUATIONS WITH VARYING EVOLUTION DIRECTION

© 2007 S.V. Popov, S.V. Potapova²

In the paper the Hölder solvability of $2n$ parabolic equations with varying evolution direction is considered. It is shown that Hölder class of solutions essentially depends on Hölder constant and forms of pasting conditions. Necessary and sufficient conditions in the terms of the data of the initial problem are given.

Paper received 4/VI/2007

Paper accepted 4/VI/2007

² Popov Sergey Vyacheslavovich (madu@sitc.ru), Potapova Sargylana Viktorovna (sargyp@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Mathematics and Informatics Institute, Yakutsk State University, Yakutsk, Russia.