

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА В ПРОСТРАНСТВЕ К-ФОРМ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ¹

© 2007 Д.Е. Шафранов²

В этой работе проведена редукция задачи Коши для линейной системы Осколкова к задаче Коши для линейного уравнения соболевского типа. Доказано существование инвариантных пространств и дихотомии решений задачи Коши для линейной системы Осколкова в пространстве k -форм, определенных на ориентированном компактном римановом многообразии без края.

Введение

Система уравнений

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p + f, \nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости типа Кельвина–Фойгта [1]. Здесь $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_k = u_k(x, t)$ и $f = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_k = f_k(x)$ — вектор-функции, отвечающие скорости и внешним силам; $p = p(x, t)$ — функция, соответствующая давлению; параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости, причем экспериментально замечено, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу [2].

Систему (1) можно записать в эквивалентном виде

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu \Delta u - (u \cdot \nabla)u - p + f, \quad \nabla(\nabla \cdot u) = 0. \quad (2)$$

Обсуждение перехода от (1) к (2) смотрите в [3].

Отбрасыванием конвективного члена $(u \cdot \nabla)u$ в однородной системе (2) получим линейную систему Осколкова

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu \Delta u - p, \quad \nabla(\nabla \cdot u) = 0. \quad (3)$$

Задача Коши для системы (3) редуцируется к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \quad (4)$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (5)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной

²Шафранов Дмитрий Евгеньевич (shafr@math.susu.ac.ru), кафедра уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

Работа, помимо введения, содержит еще три пункта. В первых двух пунктах формулируются известные теоремы из [4–6] и [7], адаптированные к нашей ситуации. В третьем пункте проводится редукция и сформулированы основные результаты — теорема о существовании устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств и теорема о существовании дихотомии решений задачи Коши для системы (3).

1. Относительно p -ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны). Введем в рассмотрение L -резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M .

Назовем оператор M (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если оператор M (L, σ) -ограничен, то при подходящем выборе контура γ (скажем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$) можно построить проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ — правая, а $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L -резольвенты оператора M .

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \operatorname{im} P(\operatorname{im} Q)$ и через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. (теорема о расщеплении) Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, тогда

- (i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Положим операторы $G = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, тогда L -резольвенту $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M можно разложить в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k G^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Определение 1. Точка ∞ для L -резольвенты оператора M называется

- (i) *устраняемой особой точкой*, если оператор $G \equiv \mathbf{0}$;
- (ii) *полосом порядка $p \in \mathbb{N}$* , если оператор $G^p \neq \mathbf{0}$, но $G^{p+1} \equiv \mathbf{0}$;
- (iii) *существенно особой точкой*, если оператор $G^q \neq \mathbf{0}$, $q \in \mathbb{N}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Условимся векторы $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ называть *собственными*. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ называется *цепочкой M -присоединенных* векторов собственного вектора φ_0 , если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$; $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$. Цепочка M -присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Однако она обязательно конечна, если существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L \setminus \{0\}$. Порядковый номер M -присоединенного вектора называется его *высотой*.

Теорема 2. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, причем

- (i) ∞ — устраняемая особая точка. Тогда $\mathfrak{U}^0 = \ker L$, и ни один собственный вектор оператора L не имеет M -присоединенных векторов.

(ii) ∞ — полюс порядка p . Тогда множество $\mathfrak{U}^0 \setminus \{0\}$ содержит только собственные и M -присоединенные векторы высоты не больше p .

Условимся в дальнейшем, во-первых, устранимую особую точку L -резольвенты оператора M считать *полюсом порядка нуль*, а во-вторых, оператор M называть (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен и ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Приведем достаточные условия (L, p) -ограниченности оператора M , которые в некотором смысле обращают теорему 2, в случае, когда оператор L *бирасщепляющий*, т.е. его ядро и образ дополняемы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Запишем первое условие.

(A1) Любая цепочка M -присоединенных векторов имеет длину, равную $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Обозначим через $\text{coim } L = \mathfrak{U} \ominus \ker L$ — некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к ядру $\ker L$. Пусть $\tilde{L}$ — сужение оператора L на $\text{coim } L$. В силу теоремы Банаха существует оператор $\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\text{im } L; \text{coim } L)$. В силу выполнения условия (A1) существуют линейалы $\mathfrak{U}^{0q} = \tilde{L}^{-1} M[\mathfrak{U}^{0q-1}]$, $\mathfrak{U}^{00} = \ker L$, $q = 1, 2, \dots, p$.

(A2) $M[\mathfrak{U}^{0p}] \oplus \text{im } L = \mathfrak{F}$.

Теорема 3. Пусть оператор L бирасщепляющий, и выполнены условия (A1) и (A2). Тогда оператор M (L, p) -ограничен.

Определение 2. Подпространство $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}^1$ называется *инвариантным пространством* уравнения (5), если для любого $u_o \in \mathfrak{P}$ решение $u = u(t)$ задачи (4), (5) лежит в $\mathfrak{P}$ поточно.

Теорема 4. Пусть оператор M (L, p) -ограничен и для L спектра оператора M выполнено: $\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M)$ и существует контур $\gamma \in \mathbb{C}$, ограничивающий область Ω такую, что $\Omega \supset \sigma_1^L(M)$ и $\overline{\Omega} \cap \sigma_2^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют инвариантные пространства уравнения (5).

Определение 3. Пусть $\mathfrak{U}^{l(r)}$ — инвариантные пространства уравнения (5), причем $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^l \oplus \mathfrak{U}^r$. Решения $u = u(t)$ уравнения (5) имеют экспоненциальную дихотомию, если существуют константы $N_l, N_r, \nu_l, \nu_r > 0$ такие, что

- (i) $\|u^l(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq N_l e^{-\nu_l(t-t_0)} \|u^l(t_0)\|_{\mathfrak{U}} \quad t \leq t_0$;
- (ii) $\|u^r(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq N_r e^{-\nu_r(t-t_0)} \|u^r(t_0)\|_{\mathfrak{U}} \quad t \geq t_0$.

Здесь $u^l(t) \in \mathfrak{U}^l, u^r(t) \in \mathfrak{U}^r$.

Наличие экспоненциальной дихотомии решений уравнения (5) означает, что фазовое пространство уравнения (5) распадается на прямую сумму инвариантных пространств, причем решения начинающиеся в $\mathfrak{U}^r$ экспоненциально убывают и остаются в $\mathfrak{U}^r$, а решения начинающиеся в $\mathfrak{U}^l$ экспоненциально растут остаются в $\mathfrak{U}^l$. Инвариантное пространство $\mathfrak{U}^{r(l)}$ уравнения (5) называется *устойчивым (неустойчивым)*.

Теорема 5. Пусть оператор M (L, p) -ограничен и $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$. Тогда решения уравнения (5) имеют экспоненциальную дихотомию.

2. Гладкие k -формы и разложение Ходжа

Пусть Ω_n — n -мерное ориентированное гладкое (т.е. класса C^∞) компактное связное риманово многообразие без края. Через $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$, $\mathbb{H}^{-1} = \mathbb{H}^{n+1} = \{0\}$ обозначим линейное пространство гладких k -форм на многообразии Ω_n . Формулой

$$(\alpha, \beta)_0 = \int_{\Omega_n} \alpha \wedge * \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{H}^k, \quad (1)$$

где $*$ — оператор Ходжа, определим скалярное произведение в пространстве $\mathbf{H}^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, а соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_0$. Продолжим скалярное произведение (1) на прямую сумму $\bigoplus_{k=0}^n \mathbf{H}^k$, требуя, чтобы различные пространства $\mathbf{H}^k$ были ортогональны. Пополнение пространства $\mathbf{H}^k$ по норме $\|\cdot\|_0$ обозначим через $\mathfrak{H}_k^0$.

Теорема 6. (теорема Ходжа–Кодаиры) Для произвольного $k = 0, 1, \dots, n$ существует расщепление пространства $\mathfrak{H}_k^0$ в прямую ортогональную сумму

$$\mathfrak{H}_k^0 = \mathfrak{H}_{kd}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\delta}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta},$$

причем пространство $\mathfrak{H}_{k\Delta}$ конечномерно.

Здесь оператор

$$d : \mathfrak{H}_{k-1}^0 \rightarrow \mathfrak{H}_k^0,$$

определенный как замыкание в норме $\|\cdot\|_0$, продолженной на $\bigoplus_{k=0}^n \mathbf{H}^k$, т.е. как сильное расширение операции d — (внешнего) дифференцирования k -форм, оператор

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d* : \mathfrak{H}_{k+1}^0 \rightarrow \mathfrak{H}_k^0,$$

а $\Delta = -d\delta - \delta d$ — оператор Лапласа–Бельтрами. Пространство $\mathfrak{H}_{kd}^0$ ($\mathfrak{H}_{k\delta}^0$) является пополнением линейала $d\delta[\mathbf{H}^k] = d[\mathbf{H}^{k-1}]$ ($\delta d[\mathbf{H}^k] = \delta[\mathbf{H}^{k+1}]$) по соответствующей норме, а пространство $\mathfrak{H}_{k\Delta}$ содержит только гармонические k -формы (т.е. такие $\alpha \in \mathbf{H}^k$, что $\Delta\alpha = 0$).

Через $P_{k\Delta}$ обозначим ортопроектор на $\mathfrak{H}_{k\Delta}$. Формулами

$$(\alpha, \beta)_1 = (-\Delta\alpha, \beta)_0 + (\alpha_\Delta, \beta_\Delta)_0, \quad (2)$$

$$(\alpha, \beta)_2 = (\Delta\alpha, \Delta\beta)_0 + (\alpha, \beta)_1, \quad (3)$$

введем скалярные произведения на $\mathbf{H}^k$, где $\omega_\Delta = P_{k\Delta}\omega$. Пополнения линейала $\mathbf{H}^k$ по соответствующим нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ обозначим через $\mathfrak{H}_k^1$ и $\mathfrak{H}_k^2$ соответственно. Пространства $\mathfrak{H}_k^l, l = 1, 2$ — банаховы (их гильбертова структура нас в дальнейшем не интересует), причем имеем непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{H}_k^2 \subset \mathfrak{H}_k^1 \subset \mathfrak{H}_k^0$. Справедливо следующее

Следствие 1. Для любого $k = 0, 1, \dots, n$ существуют расщепления пространств

$$\mathfrak{H}_k^l = \mathfrak{H}_{kd}^{l1} \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta},$$

где $\mathfrak{H}_{k\Delta}^{l1} = (\mathbb{I} - P_{k\Delta})[\mathfrak{H}_{k\Delta}^l], l = 1, 2$.

3. Основные результаты

Пусть Ω_n — n -мерное ориентированное гладкое (т.е. класса C^∞) компактное связное риманово многообразие без края. Пусть $\mathfrak{H}_k^l, l = 0, 1, 2$ гильбертовы пространства дифференциальных k -форм, определенных на Ω_n пополненных по нормам соответствующим скалярным произведениям (1), (2) и (3) соответственно. Обозначим $\Delta = -d\delta - \delta d$ оператор Лапласа–Бельтрами действующий в пространстве k -форм.

Лемма 1. Формулой $A = \text{diag} \{\Delta, \dots, \Delta\} : \mathfrak{H}_k^2 \rightarrow \mathfrak{H}_k^0, k = 0, 1, \dots, n$ задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечномерным спектром $\sigma(A)$ сгущающимся только к точке ∞ .

Обозначим через A_δ (A_d) сужение оператора A на $\mathfrak{H}_{k\delta}^2$ ($\mathfrak{H}_{kd}^2$).

Лемма 2. Операторы $A_\delta, A_d \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_k^2; \mathfrak{H}_k^0)$, причем $\sigma(A_\delta) = \sigma(A_d) = \sigma(A)$, и $A = A_\delta \Sigma + A_d \Pi$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Здесь через $\Sigma : \mathfrak{H}_k^2 \rightarrow \mathfrak{H}_{k\delta}^2$ ($\Pi : \mathfrak{H}_k^2 \rightarrow \mathfrak{H}_{kd}^2$) обозначен ортопроектор (в смысле $\mathfrak{H}_k^0$) вдоль $\mathfrak{H}_{kd}^2 \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta}^2$ ($\mathfrak{H}_{k\delta}^2 \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta}^2$).

Далее непрерывные расширения проекторов Σ и Π на $\mathfrak{H}_k^l, l = 0, 1$ будем обозначать теми же символами.

Лемма 3. Формулой $B = d\delta : \mathfrak{H}_k^2 \rightarrow \mathfrak{H}_{kd}^0$ задается линейный непрерывный оператор, $\ker B = \mathfrak{H}_{k\delta}^2$.

Фиксируем $k = 0, 1, \dots, n$, положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{H}_{k\delta}^2 \times \mathfrak{H}_{kd}^2 \times \mathfrak{H}_{kd}^0$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_{k\delta}^0 \times \mathfrak{H}_{kd}^0 \times \mathfrak{H}_{kd}^0$. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (u_\delta, u_d, u_p)$, $u_\delta = \Sigma u$, $u_d = \Pi u$, $u_p = p$; а элемент $f \in \mathfrak{F}$ имеет вид $f = (f_\delta, f_d, f_p)$. Формулами

$$L = \begin{pmatrix} \lambda - A_\delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda - A_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} vA_\delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & vA_d & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1)$$

зададим операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Теорема 7. При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$, $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M ($L, 1$)-ограничен.

Доказательство. Оператор L является бирасщепляющим, поэтому в силу теоремы 3 достаточно показать, что каждый вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет не более одного M -присоединенного вектора и $M[\mathfrak{U}^{01}] \oplus \text{im} L = \mathfrak{F}$.

Пусть вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$. В силу леммы 1 он имеет вид $\varphi = (0, 0, \varphi_p)$, $\varphi_p \neq 0$. Тогда $M\varphi = (0, -\varphi_p, 0) \in \text{im} L$.

Найдем вектор $\psi = (\psi_\delta, \psi_d, \psi_p) \notin \ker L \setminus \{0\}$ такой, что $L\psi = M\varphi$. В силу формул (1) получаем систему

$$\begin{cases} (\lambda - A_\delta)\psi_\delta = 0, \\ (\lambda - A_d)\psi_d = -\varphi_p. \end{cases}$$

Отсюда

$$M\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ vA_d(\lambda - A_d)^{-1}(-\varphi_p) - \psi_p \\ B(\lambda - A_d)^{-1}(-\varphi_p) \end{pmatrix} \notin \text{im} L,$$

так как $B(\lambda - A_d)^{-1}(-\varphi_p) \neq 0$ для $\varphi_p \neq 0$. Следовательно не существует M -присоединенных векторов высоты больше 1.

Покажем что $M[\mathfrak{U}^{01}] \oplus \text{im} L = \mathfrak{F}$. Для этого обозначим

$$\mathfrak{U}^{00} = \ker L, \text{coim} L = \mathfrak{H}_{k\delta}^2 \times \mathfrak{H}_{kd}^2 \times \{0\}.$$

Из формул (1) получим

$$\mathfrak{F}^{00} = M[\mathfrak{U}^{00}] = \{0\} \times \mathfrak{H}_{kd}^0 \times \{0\} \subset \text{im} L,$$

$$\mathfrak{U}^{01} = \tilde{L}^{-1}[\mathfrak{F}^{00}] = \Sigma(\lambda - A)^{-1}[\mathfrak{H}_{kd}^0] \times (\lambda - A_d)[\mathfrak{H}_{kd}^0] \times \{0\}.$$

В силу леммы 2 $(\lambda - A_d)[\mathfrak{H}_{kd}^0] = \mathfrak{H}_{kd}^2$. Следовательно

$$\mathfrak{U}^{01} = \Sigma(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_d)^{-1}[\mathfrak{H}_{kd}^2] \times \mathfrak{H}_{kd}^2 \times \{0\} \subset \text{coim} L.$$

Далее

$$\mathfrak{F}^{01} = M[\mathfrak{U}^{01}] = vA_\delta \Sigma(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_d)^{-1}[\mathfrak{H}_{kd}^2] \times (vA_\delta + \mathbf{I})[\mathfrak{H}_{kd}^2] \times B[\mathfrak{H}_{kd}^2].$$

Рассмотрим оператор $\tilde{Q} = \mathbf{I} - Q_1$, где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi & -\Pi vA_\delta(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_d)^{-1}\tilde{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma v A_\delta (\lambda - A)^{-1} (\lambda - A_d)^{-1} \tilde{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi v A_\delta (\lambda - A)^{-1} (\lambda - A_d)^{-1} \tilde{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор $\tilde{B}^{-1}$ — обратный к сужению $\tilde{B}$ оператора B на $\mathfrak{H}_{kd}^2$. Он существует и непрерывен в силу леммы 3.

Оператор $\tilde{Q}$ является проектором, причем $\text{im } \tilde{Q} = \text{im } L$, $\ker \tilde{Q} = \mathfrak{F}^{01}$. Следовательно $\mathfrak{F}^{01} \oplus \text{im } L = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Обозначим через $\{\lambda_l\}$ последовательность собственных значений оператора A на многообразии Ω_n , занумерованную по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_l\}$ обозначим ортонормированную последовательность собственных функций.

Теорема 8. Для любых $\lambda \notin \sigma(A)$, $v \in \mathbb{R}_+$ и $k = 0, 1, \dots, n$ существуют бесконечномерное устойчивое $\mathfrak{U}^s$ и конечномерное неустойчивое $\mathfrak{U}^u$ инвариантные пространства линейной системы Осколкова (3).

Доказательство. Операторы L и M бирасщепляющие и тогда из формул (1) и в силу леммы 3 линейная система Осколкова (3) ортогонально проектируется на ядро оператора B

$$(\lambda - A_\delta) u_\delta = v A_\delta + \Sigma p.$$

Отсюда следует, что L спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{v \lambda_l}{\lambda - \lambda_l}, \lambda \neq \lambda_l : l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Но тогда его можно представить в виде $\sigma^L(M) = \sigma_s^L(M) \cup \sigma_u^L(M)$, причем

$$\sigma_s^L(M) = \left\{ \frac{v \lambda_l}{\lambda - \lambda_l}, \lambda > \lambda_l : l \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\sigma_u^L(M) = \left\{ \frac{v \lambda_l}{\lambda - \lambda_l}, \lambda < \lambda_l : l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда в силу теорем 4 и 7 существуют устойчивое $\mathfrak{U}^s$ и неустойчивое $\mathfrak{U}^u$ инвариантные пространства линейной системы Осколкова (3).

Так как число собственных значений λ_l оператора A больших, чем λ конечно, то в силу лемм 1 и 2 $\mathfrak{U}^s$ конечномерно, а $\mathfrak{U}^u$ бесконечномерно. Теорема доказана.

В силу формул (1) из теорем 5 и 7 следует

Теорема 9. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, $v \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1, \dots, n$ и $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$. Тогда решения линейной системы Осколкова (3) имеют экспоненциальную дихотомию.

Замечание 1. В работе [8] исследовалась разрешимость задачи Коши для линейного уравнения Осколкова, которое также является линеаризацией системы (1). Устойчивость решений задачи Коши для этого уравнения может быть исследована методом представленным в данной работе.

Литература

- [1] Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа Соболева С.Л. / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1991. — Т. 191. — С. 31–48.
- [2] Теория полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохийев и [др.] // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. — 1975. — №96. — С. 3–9.
- [3] Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. — 1994. — №1. — С. 62–70.

- [4] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А.Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – №4. – С. 47–74.
- [5] Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А.Свиридюк, А.В.Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №5. – С. 60–68.
- [6] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A.Sviridyuk, V.E.Fedorov. – Utrecht etc.: VSP, 2003. – 268 с.
- [7] Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. – М.: Мир, 1987. – 304 с.
- [8] Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного уравнения Осколкова на гладком многообразии / Г.А.Свиридюк, Д.Е.Шафранов // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информатика. – 2003. – №1. – С. 146–153.

Поступила в редакцию 9/VII/2007;
в окончательном варианте — 9/VII/2007.

STABILITY OF SOLUTIONS FOR THE LINEAR OSKOLKOV SYSTEM IN THE K-FORM SPACES DEFINED ON THE RIEMANNIAN MANIFOLD³

© 2007 D.E.Shafranov⁴

In the paper the Cauchy problem for the linear Oskolkov system is reduced to the the Cauchy problem for the linear Sobolev type equation. The existence of invariant spaces and the dichotomy of solutions the Cauchy problem for the linear Oskolkov system in the k-form spaces defined on the oriented compact Riemannian manifold without boundary are proved.

Поступила в редакцию 9/VII/2007;
в окончательном варианте — 9/VII/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S.Pulkina.

⁴Shafranov Dmitriy Evgenjevich(shafr@math.susu.ac.ru), Dept. of Mathematical and Physical Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, 454080, Russia.