

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

© 2006 О.Ю. Данилкина²

В работе рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Доказана теорема о существовании единственного обобщенного решения.

Введение

Задачи с нелокальными условиями для параболических и для гиперболических уравнений активно изучаются в настоящее время. Впервые внимание к такого рода задачам было привлечено в работах Дж. Кэннона [1] и Л.И. Камынина [2]. Впоследствии в работах ряда авторов эта проблема получила дальнейшее развитие [3, 4]. Проведенные исследования показали, что присутствие интегрального слагаемого в нелокальном условии приводит к дополнительным трудностям при изучении разрешимости поставленных нелокальных задач и не позволяет непосредственно применять многие стандартные методы исследования.

Нелокальные условия, содержащие помимо интегрального оператора значение функции на границе области, можно трактовать как интегральные операторы второго рода. Задачи с такими условиями исследованы в работах [5, 6].

В предлагаемой работе рассмотрена задача с нелокальным условием, которое представляет собой интегральный оператор первого рода. Разрешимость задачи установлена для частного случая.

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ — цилиндр в пространстве R^{n+1} , $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$ — боковая поверхность Q_T .

Рассмотрим в области Q_T уравнение

$$u_t = \Delta u - c(x)u + f(x, t). \quad (1.1)$$

Поставим для уравнения (1.1) задачу с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (1.2)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной

²Данилкина Ольга Юрьевна (danola@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного университета путей сообщения, 443066, Россия, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

и нелокальным условием

$$\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx = E(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.3)$$

где функции $\varphi(x)$, $K(x, t)$, $E(t)$ заданы.

Предположим, что свободный член в уравнении (1.1) представим в виде произведения функций $f_1(x) \cdot f_2(t)$. Поскольку уравнение (1.1) линейно, свободный член в нем — произведение функций разных переменных, коэффициент $c(x)$ зависит от одной переменной, то можно предположить, что след производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на боковой поверхности цилиндра Q_T также представим в виде произведения функций

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_T} = q(t)g(x). \quad (1.4)$$

Положим $\psi(x) = \left. \frac{\partial u(x, 0)}{\partial n} \right|_{S_T}$.

Тогда из (1.4) следует, что $\psi(x) = q(0)g(x)$.

Это означает, что

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{q(0)}.$$

Положим $r(t) = \frac{q(t)}{q(0)}$. Тогда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_T} = r(t)\psi(x). \quad (1.5)$$

Рассмотрим теперь задачу (1.1)–(1.3), (1.5). Поскольку функция $r(t)$ неизвестна, то данную задачу можно трактовать как обратную задачу о нахождении пары функций (u, r) . Условие (1.3) играет теперь роль условия интегрального переопределения (см. [7, 8]).

Будем считать, что выполняются следующие условия:

$$K(x, t) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T]), \quad E(t) \in W_2^1(0, T), \quad \varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega}); \quad (1.6)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q_T), \quad c(x) \in C(\overline{\Omega}). \quad (1.7)$$

Пусть пара (u, r) является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.5). Умножим (1.1) на $K(x, t)$ и проинтегрируем полученное выражение по области Ω . Имеем:

$$\int_{\Omega} K u_t dx = \int_{\Omega} K \Delta u dx + \int_{\Omega} K f dx - \int_{\Omega} c K u dx. \quad (1.8)$$

Тогда после интегрирования по частям в первом слагаемом в правой части (1.8) и применения условия (1.5) получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(x, t) u_t dx = & - \int_{\Omega} K_x(x, t) u_x dx + r(t) \int_{\partial\Omega} K(x, t) \psi(x) ds + \\ & + \int_{\Omega} K(x, t) f(x, t) dx - \int_{\Omega} c(x) K(x, t) u dx. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Преобразуем (1.9) с учетом условия (1.3):

$$E_t + \int_{\Omega} (-K_t + cK) u dx + \int_{\Omega} K_x u_x dx - \int_{\Omega} K f dx = r(t) \int_{\partial\Omega} K \psi(x) ds.$$

Отсюда

$$r(t) = \frac{1}{h(t)} \left[E_t + \int_{\Omega} \overline{K} u dx + \int_{\Omega} K_x u_x dx - \int_{\Omega} K f dx \right], \quad (1.10)$$

где $h(t) = \int_{\partial\Omega} K(x, t)\psi(x) ds$, $\bar{K} = -K_t + cK$.

Справедливо утверждение

Лемма 1.1. Пусть выполняются условия (1.6), (1.7) и условие согласования

$$E(0) = \int_{\Omega} K(x, 0)\varphi(x) dx. \quad (1.11)$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.5) эквивалентна задаче (1.1), (1.2), (1.5), (1.10).

Доказательство. Как показано выше, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.5) является и решением (1.1), (1.2), (1.5), (1.10). Докажем обратное.

Пусть пара (u, r) является решением задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10). Тогда из условия (1.10) следует, что

$$r(t) \int_{\partial\Omega} K(x, t)\psi(x) ds = E_t + \int_{\Omega} (-K_t + cK)u dx + \int_{\Omega} K_x u_x dx - \int_{\Omega} Kf dx.$$

Отсюда с учетом условия (1.5) получим, что

$$E_t = \int_{\Omega} K_t u dx + \int_{\Omega} K \Delta u dx - \int_{\Omega} K c u dx + \int_{\Omega} K f dx. \quad (1.12)$$

С другой стороны, из уравнения (1.1) следует равенство (1.8). Сопоставляя (1.8) и (1.12), видим, что

$$E_t = \int_{\Omega} K_t u dx + \int_{\Omega} K u_t dx.$$

Таким образом, мы приходим к задаче Коши относительно $\int_{\Omega} K u dx$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} K u dx = E_t, \quad (1.13)$$

$$\int_{\Omega} K(x, 0)u(x, 0) dx = E(0), \quad (1.14)$$

где условие (1.14) вытекает из условия согласования (1.11).

Согласно [9], задача Коши (1.13), (1.14) имеет единственное решение

$$\int_{\Omega} K u dx = E(t).$$

Лемма доказана.

Определение 1. Следуя [10], обозначим через $V_2(Q_T)$ гильбертово пространство, состоящее из всех элементов пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$, с нормой:

$$|u|^2 = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_T} u_x^2 dx dt.$$

Обозначим $\widehat{W}_2^1(Q_T) = \{u(x, t) \in W_2^1(Q_T), u(x, T) = 0\}$.

Введем понятие обобщенного решения задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10).

Стандартным образом получим интегральное тождество. Предполагая, что (u, r) — решение задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10), умножим (1.1) на функцию $\eta(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ и проинтегрируем полученное тождество по цилиндру Q_T :

$$\int_{Q_T} (u_t - \Delta u)\eta dx dt = \int_{Q_T} (-c(x)u + f(x, t))\eta dx dt.$$

Интегрируя левую часть по частям с учетом (1.2), (1.5), получаем тождество:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (-u\eta_t + u_x\eta_x + cu\eta) dx dt = \int_{S_T} r\psi\eta ds dt + \\ + \int_{Q_T} f\eta dx dt + \int_{\Omega} \varphi\eta(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Определение 2. Назовем пару функций (u, r) решением вспомогательной задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10), если $u \in V_2(Q_T)$, $r(t) \in L_2(0, T)$ и $\forall \eta(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, функции $u(x, t), r(t)$ удовлетворяют интегральному тождеству (1.15), равенству (1.10) и $r(0) = 1$.

2. Основной результат

Результатом предлагаемой работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть выполняются условия Леммы 1.1, а также

$$0 < c_0 \leq |c(x)| \leq c_1, \quad \int_{\partial\Omega} K(x, t)\psi(x) ds \geq h_1 > 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \overline{K}^2 dx \leq K_0, \quad \int_{\Omega} K_x^2 dx \leq K_1, \quad 0 < t < T, \quad \text{где } K_0, K_1 > 0; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} E_t(0) + \int_{\Omega} \overline{K}(x, 0)\varphi(x) dx + \int_{\Omega} K_x(x, 0)\varphi_x(x) dx - \\ - \int_{\Omega} K(x, 0)f(x, 0) dx = \int_{\partial\Omega} K(x, 0)\psi(x) ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10).

Для доказательства теоремы сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. Пусть функция $u(x, t) \in V_2(Q_T)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (1.5) при заданной функции $r(t) \in L_2(0, T)$. Тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \int_{Q_{\tau}} cu^2 dx dt + \\ + \int_{S_{\tau}} ur(t)\psi(x) ds dt + \int_{Q_{\tau}} fu dx dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

для п.в. $\tau \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть функция $r(t) \in L_2(0, T)$. Предположим, что функция $u \in W_2^1(Q_T)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (1.5). Следовательно, $\forall \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$, $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.15).

Возьмем в (1.15) в качестве функции $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } \tau < t \leq T, \end{cases} \quad \text{где } 0 < \tau < T.$$

Равенство (1.15) после интегрирования по частям в первом слагаемом в левой части примет вид:

$$\int_{Q_{\tau}} (u_t u + u_x^2 + cu^2) dx dt = \int_{S_{\tau}} r\psi u ds dt + \int_{Q_{\tau}} fu dx dt.$$

Снова проинтегрируем по частям первое слагаемое. Тогда функция $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, \tau) dx + \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt + \int_{Q_{\tau}} cu^2 dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{S_{\tau}} r\psi u ds dt + \int_{Q_{\tau}} fu dx dt. \end{aligned}$$

Покажем, что это тождество будет справедливо для функции $u(x, t) \in V_2(Q_T)$.

Рассмотрим последовательность функций $u^m \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих (1.15), а значит и (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^m)^2(x, \tau) dx + \int_{Q_{\tau}} (u_x^m)^2 dx dt + \int_{Q_{\tau}} c(u^m)^2 dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{S_{\tau}} r\psi u^m ds dt + \int_{Q_{\tau}} fu^m dx dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно [10], функции из $W_2^1(Q_T)$ образуют всюду плотное множество в $V_2^{1,0}(Q_T)$, а значит, и в $V_2(Q_T)$. Следовательно, существует функция $u^* \in V_2(Q_T)$ такая, что $\|u^m - u^*\|_{Q_T} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$:

$$\limsup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} (u^m - u^*)^2 dx + \int_{Q_T} (u_x^m - u_x^*)^2 dx dt \rightarrow 0.$$

Таким образом, последовательность функций u^m сильно сходится к u^* в пространстве $L_2(\Omega)$, и последовательность производных u_x^m сильно сходится к u_x^* в $L_2(Q_T)$.

Покажем, что функции u^m сильно сходятся к u^* и в $L_2(Q_T)$.

Пусть функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать номер N_{ε} такой, что для любой функции $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство ([10, с. 529]):

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon}} (u, \varphi_k)^2 + 2\varepsilon^2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad (2.6)$$

где число N_{ε} не зависит от u . Выберем в (2.6) $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon}} (u, \varphi_k)^2 + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.7)$$

Поскольку функции $u^m - u^* \in W_2^1(\Omega)$ для любого $t \in [0, T]$ и любых $m = 1, 2, \dots$, то применяя неравенство (2.7) к разности $u^m - u^*$ получим, что

$$\|u^m - u^*\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 4 \left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon}} (u^m - u^*, \varphi_k)^2 \right)^{1/2} + \|u_x^m - u_x^*\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Отсюда

$$\|u^m - u^*\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq 4 \int_0^T \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon}} (u^m - u^*, \varphi_k)^2 dt + \|u_x^m - u_x^*\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (2.8)$$

Переходя в (2.8) к пределу при $m \rightarrow \infty$ в силу сильной сходимости $u^m(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ и u_x^m в $L_2(Q_T)$ получим, что последовательность u^m сходится к u^* сильно и

в $L_2(Q_T)$.

Вернемся к равенству (2.5) для функций $u^m(x, t)$. Покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{S_\tau} r(t) \psi(x) u^m ds dt = \int_{S_\tau} r(t) \psi(x) u^* ds dt. \quad (2.9)$$

Отметим, что для функции $u \in W_2^1(\Omega)$ и области Ω с гладкой границей справедливо неравенство ([11, с. 77]):

$$\int_{\partial\Omega} u^2 ds \leq \int_{\Omega} (\varepsilon u_x^2 + a(\varepsilon) u^2) dx, \quad (2.10)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное, значение $a(\varepsilon)$ определяется областью Ω .

Оценим теперь $\left| \int_{S_\tau} r \psi u^m ds dt - \int_{S_\tau} r \psi u^* ds dt \right|$, используя сначала неравенство Коши–Буняковского, а затем неравенство (2.10):

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_\tau} r \psi u^m ds dt - \int_{S_\tau} r \psi u^* ds dt \right|^2 &= \left| \int_{S_\tau} r \psi (u^m - u^*) ds dt \right|^2 \leq \\ &\leq \left(\int_{S_\tau} r^2 \psi^2 ds dt \right) \left(\int_{S_\tau} (u^m - u^*)^2 ds dt \right) \leq \left(\int_0^\tau r^2 dt \right) \left(\int_{\partial\Omega} \psi^2 ds \right) \times \\ &\times \left(\varepsilon \int_{Q_\tau} (u_x^m - u_x^*)^2 dx dt + a(\varepsilon) \int_{Q_\tau} (u^m - u^*)^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

А тогда, в силу сильной сходимости u^m к u^* в $W_2^{1,0}(Q_T)$,

$$\left| \int_{S_\tau} r \psi u^m ds dt - \int_{S_\tau} r \psi u^* ds dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Отметим также, что

$$\left| \int_{Q_\tau} c(x) (u^m)^2 dx dt \right| \leq c_1 \|u^m\|_{L_2(Q_T)}^2, \quad (2.11)$$

$$\left| \int_{Q_\tau} f(x, t) u^m dx dt \right| \leq \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)} \|u^m\|_{L_2(Q_T)}. \quad (2.12)$$

Используя сильную сходимость функций $u^m(x, t)$ к $u^*(x, t)$, оценки (2.9), (2.11), (2.12), перейдем в тождестве (2.5) к пределу при $m \rightarrow \infty$. В результате получим равенство (2.4) для функции $u \in V_2(Q_T)$.

Лемма 2.1. доказана.

Лемма 2.2. Пусть функция $u(x, t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (1.5) при заданной функции $r(t) \in L_2(0, T)$. Тогда

$$|u|_{Q_T} \leq \text{const}. \quad (2.13)$$

Доказательство. В силу леммы 2.1 функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \int_{Q_\tau} c u^2 dx dt + \\ &+ \int_{S_\tau} u r(t) \psi(x) ds dt + \int_{Q_\tau} f u dx dt. \end{aligned}$$

Применим "ε-неравенство" к интегралу по поверхности в правой части и элементарное неравенство к последнему слагаемому. Тогда, с учетом (2.1), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt \leq & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + c_1 \int_{Q_{\tau}} u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_{\tau}} f^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{S_{\tau}} u^2 ds dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_{\tau}} r^2 \Psi^2 ds dt + \frac{1}{2} \int_{Q_{\tau}} u^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Применим неравенство (2.10) к четвертому слагаемому в правой части неравенства (2.14). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt \leq & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_{\tau}} f^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} (2c_1 + 1 + a(\varepsilon)\varepsilon^{-1}) \int_{Q_{\tau}} (z^m)^2 dx dt + \frac{G\varepsilon}{2} \int_0^{\tau} (p^m)^2 dt, \end{aligned}$$

где $G = \int_{\partial\Omega} \Psi^2 ds$.

Обозначим $F(\tau) = \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_{\tau}} f^2 dx dt + G\varepsilon \int_0^{\tau} (p^m)^2 dt$, $M = 2c_1 + 1 + a(\varepsilon)\varepsilon^{-1}$.

Тогда

$$\int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt \leq M \int_{Q_{\tau}} u^2 dx dt + F(\tau). \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} u^2(x, \tau) dx \leq M \int_{Q_{\tau}} u^2 dx dt + F(\tau).$$

Применяя неравенство Гронуолла к последнему выражению, получим, что

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} u^2 dx dt \leq \frac{F(\tau)}{M} (e^{M\tau} - 1).$$

А тогда из (2.15) следует, что

$$\int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_{\tau}} u_x^2 dx dt \leq F(\tau) e^{M\tau}.$$

Поскольку $\tau \in [0, T]$, то тогда

$$|u|_{V_2(Q_T)} \leq \text{const.}$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы.

Будем искать решение задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10) в виде последовательности $\{(u^m, r^m)\}$, $m = 1, 2, \dots$, которую определим следующим образом:

$$r^m(t) = \frac{1}{h(t)} \left[E_t + \int_{\Omega} \bar{K} u^{m-1} dx + \int_{\Omega} K_x u_x^{m-1} dx - \int_{\Omega} K f dx \right] \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (-u^m \eta_t + u_x^m \eta_x + c u^m \eta) dx dt = & \int_{S_T} r^m(t) \Psi(x) \eta ds dt + \\ & + \int_{Q_T} f \eta dx dt + \int_{\Omega} \varphi \eta(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\forall \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$, и $\forall m = 1, 2, \dots$, полагая $u^0 = 0$.

Покажем, что пара (u^m, r^m) определена корректно, то есть для каждой функции $r^m(t)$, определяемой (3.1), существует функция $u^m(x, t)$, являющаяся решением задачи (1.1), (1.2), (1.5) и, следовательно, удовлетворяющая (3.2). Для доказательства воспользуемся методом Галеркина. Временно опустим верхний индекс у функций $u^m(x, t)$ и $r^m(t)$.

Пусть функции $\varphi_k(x)$ образуют фундаментальную систему в $W_2^1(\Omega)$, причем $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_k^l$.

Будем искать приближенное решение $u(x, t)$ в виде $u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$, где функции $c_k^N(t)$ определяются из условий:

$$\frac{d}{dt}(u^N, \varphi_k) + (u_{x_i}^N, \varphi_{k x_j}) + (cu^N, \varphi_k) = (f, \varphi_k) + \int_{\partial\Omega} r(t)\psi(x)\varphi_k ds, \quad (3.3)$$

$$c_k^N(0) = (\varphi, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

Равенства (3.3) — это система N обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}c_k^N(t) + Ac_k^N(t) = F_k(t) \quad (3.5)$$

с ограниченными коэффициентами и суммируемыми по $[0, T]$ свободными членами (что следует из условий (1.6), (1.7)). Поэтому (3.5) вместе с (3.4) однозначно определяет значения $c_k^N(t)$ ([9], с.27).

Умножим каждое из уравнений (3.3) на свое c_k^N , просуммируем полученные равенства от $k = 1$ до $k = N$ и проинтегрируем по t от 0 до t_1 , $t_1 < T$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^N)^2 dx + \int_{Q_{t_1}} (u_x^N)^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2(x) dx - \int_{Q_{t_1}} c(u^N)^2 dx dt + \\ &+ \int_{S_{t_1}} u^N r(t) \psi(x) ds dt + \int_{Q_{t_1}} f u^N dx dt. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 2.1. для функции u справедлива оценка (2.13):

$$|u^N|_{Q_T} \leq \text{const}. \quad (3.6)$$

Покажем, что из последовательности $\{u^N\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно t из $[0, T]$ подпоследовательность. Для этого докажем, что функции $l_{N,k}(t) = (u^N(x, t), \varphi_k(x))$ равномерно сходятся на $[0, T]$.

Из оценки (3.6) следует, что функции $l_{N,k}(t)$ равномерно ограничены. Покажем, что они равномерно непрерывны на $[0, T]$ при фиксированном k и произвольных $N \geq k$, то есть, что $|l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} l_{N,k}(t) dt + \int_t^{t+\Delta t} (u_{x_i}^N, \varphi_{k x_j}) dt + \int_t^{t+\Delta t} (cu^N, \varphi_k) dt &= \\ &= \int_t^{t+\Delta t} (f, \varphi_k) dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\Omega} r(t) \psi(x) \varphi_k ds dt. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| &\leq \\ &\leq \int_t^{t+\Delta t} (|u_{x_i}^N, \varphi_{k x_j}| + |cu^N, \varphi_k| + |(f, \varphi_k)| + \\ &\quad + \left| \int_{\partial\Omega} r(t)\psi(x)\varphi_k ds \right|) dt. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} |u_{x_i}^N \varphi_{k x_j}| dx dt &\leq \left(\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} (u_{x_i}^N)^2 dx dt \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} (\varphi_{k x_j})^2 dx dt \right)^{1/2} = \Delta t \|u_x^N\|_{L_2(Q_{t,t+\Delta t})} \|\varphi_{kx}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Тогда, в силу (3.6),

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} |u_{x_i}^N \varphi_{k x_j}| dx dt \leq \Delta t \text{Const} \|\varphi_{kx}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Заметим, что

$$\|u\|_{2,1,Q_T} \leq \text{const} \|u\|_{Q_T} \text{ (см. [10, с. 89])}. \quad (3.7)$$

Из (1.6), (1.7), (3.6), (3.7) следует:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} |cu^N \varphi_k| dx dt &\leq c_1 \Delta t \|u^N\|_{Q_{t,t+\Delta t}} \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \leq \Delta t \text{Const} \|\varphi_{kx}\|_{L_2(\Omega)}; \\ \int_t^{t+\Delta t} |r(t)| \left| \int_{\partial\Omega} \psi(x)\varphi_k ds \right| dt &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0; \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} |f \varphi_k| dx dt &\leq \Delta t \|f\|_{Q_{t,t+\Delta t}} \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

А тогда $|l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| \leq \varepsilon(\Delta t) \|\varphi_k\|_{W_2^1(\Omega)}$, где $\varepsilon(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ и не зависит от N . Это означает, что $l_{N,k}$, $N = k, k + 1, \dots$, равномерно непрерывны по t .

Выделим подпоследовательность N_m , по которой функции $l_{N_m,k}(t)$ сходятся равномерно на $[0, T]$ к некоторой непрерывной функции $l_k(t)$ для каждого $k = 1, 2, \dots$.

Определим функцию $u = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) \varphi_k(x)$. Покажем, что последовательность u^{N_m} сходится к $u(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно t из $[0, T]$.

Возьмем произвольную функцию $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$. Покажем, что $(u^{N_m} - u, \varphi) \rightarrow 0$ при $N_m \rightarrow \infty$. Имеем:

$$\begin{aligned} (u^{N_m} - u, \varphi) &= \left(u^{N_m} - u, \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^s (\varphi, \varphi_k) (u^{N_m} - u, \varphi_k) + \\ &\quad + \left(u^{N_m} - u, \sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (3.8):

$$\begin{aligned} \left| (u^{N_m} - u, \sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k) \right|^2 &\leq \|u^{N_m} - u\|^2 \left\| \sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \\ &= \|u^{N_m} - u\|^2 \left(\sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k, \sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k \right) = \\ &= \|u^{N_m} - u\|^2 \left(\sum_{k=s+1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)^2 \right) \leq M_1 R(s), \end{aligned}$$

где $R(s)$ — остаток сходящегося ряда Фурье, M_1 не зависит от N_m .

Выберем s настолько большим, чтобы $M_1 R(s)$ стало меньше наперед заданного $\varepsilon_1 > 0$.

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.8):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s (\varphi, \varphi_k) (u^{N_m} - u, \varphi_k) &= \sum_{k=1}^s (\varphi, \varphi_k) ((u^{N_m}, \varphi_k) - (u, \varphi_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^s (\varphi, \varphi_k) (l_{N_m, k} - l_k). \end{aligned}$$

Из равномерной сходимости $l_{N_m, k}$ к l_k на $[0, T]$ следует, что при фиксированном достаточно большом s сумму $\sum_{k=1}^s (\varphi, \varphi_k) (l_{N_m, k} - l_k)$ можно сделать меньше уже выбранного ε_1 для всех t из $[0, T]$.

Таким образом, $|(u^{N_m} - u, \varphi)| < \varepsilon_1$ для всех t из $[0, T]$. Это и означает, что последовательность $\{u^{N_m}\}$ сходится к $u(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно t из $[0, T]$.

Следовательно, из последовательности $\{u^{N_m}\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится слабо в $L_2(Q_T)$ к функции u вместе с производными $u_x^{N_m}$. В силу слабой сходимости предельная функция также будет обладать свойством $|u|_{Q_T} \leq \text{Const}$, а следовательно, $u \in V_2(Q_T)$.

Покажем, что u удовлетворяет тождеству (1.15). Умножим каждое из уравнений (3.3) на свою гладкую функцию $d_k(t)$, $d_k(T) = 0$. Сложим полученные равенства по k от 1 до $N' \leq N$ и проинтегрируем результат по t от 0 до T . Получим

$$\begin{aligned} \int_0^T (-(u^N, \Phi_t^{N'}) + (u_{x_j}^N, \Phi_{x_i}^{N'}) + (cu^N, \Phi^{N'})) dt &= \int_0^T (f, \Phi^{N'}) dt + \\ &+ (\varphi(x), \Phi^{N'}(x, 0)) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} r(t) \psi(x) \Phi^{N'} ds dt, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Phi^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} d_k(t) \varphi_k(x)$.

Поскольку функции $\Phi^{N'}$, $\Phi_t^{N'}$, $\Phi_{x_i}^{N'}$ являются элементами $L_2(Q_T)$, и установлена слабая сходимость последовательности u^{N_m} в $L_2(Q_T)$, то можно, считая N' фиксированным, перейти в (3.9) к пределу по выбранной подпоследовательности N_m . Получим равенство (3.9) для функции $u(x, t) \in V_2(Q_T)$.

$$\begin{aligned} \int_0^T (-(u, \Phi_t^{N'}) + (u_{x_j}, \Phi_{x_i}^{N'}) + (cu, \Phi^{N'})) dt &= \int_0^T (f, \Phi^{N'}) dt + \\ &+ (\varphi(x), \Phi^{N'}(x, 0)) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} r(t) \psi(x) \Phi^{N'} ds dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что множество $\Phi = \bigcup_{N'=1}^{\infty} \Phi^{N'}$ плотно в пространстве $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ [12].

Пусть функция $\Phi(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ является пределом последовательности $\Phi^{N'}$. Тогда, переходя к пределу по N' в (3.10) получим, что тождество (3.10) справедливо для всех функций $\Phi(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$.

А значит функция u удовлетворяет условиям из Определения 4 и, следовательно, является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.5).

Таким образом, пара (u^m, r^m) определена корректно.

Покажем, что последовательность $\{(u^m, r^m)\}$ фундаментальная.

Положим $z^m = u^{m+1} - u^m$, $p^m = r^{m+1} - r^m$. Тогда из (3.1), (3.2) получим, что

$$p^m(t) = \frac{1}{h(t)} \left[\int_{\Omega} \overline{K} z^{m-1} dx + \int_{\Omega} K_x z_x^{m-1} dx \right] \quad (3.11)$$

и

$$\int_{Q_T} (-z^m \eta_t + z_x^m \eta_x + c z^m \eta) dx dt = \int_{S_T} p^m(t) \psi(x) \eta ds dt, \quad (3.12)$$

$\forall \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$, и $\forall m = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим $\|p^m\|_{L_2(0, T)}^2$. Из (3.11) вытекает, что

$$\int_0^{\tau} (p^m)^2 dt = \int_0^{\tau} \frac{1}{h^2(t)} \left(\int_{\Omega} \overline{K} z^{m-1} dx + \int_{\Omega} K_x z_x^{m-1} dx \right)^2 dt.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} (p^m)^2 dt &\leq \frac{2}{h_1^2} \int_0^{\tau} \left[\left(\int_{\Omega} \overline{K}^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} (z^{m-1})^2 dx \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} K_x^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} (z_x^{m-1})^2 dx \right) \right] dt \leq M^2 |z^{m-1}|_{V_2(Q_{\tau})}^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где положительная постоянная M определяется K, h, T и не зависит от m, u^m, r^m, t . Из (3.12) и Леммы 2.1 следует справедливость равенства

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (z^m)^2 dx + \int_{Q_{\tau}} (z_x^m)^2 dx dt = - \int_{Q_{\tau}} c (z^m)^2 dx dt + \int_{S_{\tau}} z^m p^m \psi ds dt. \quad (3.14)$$

Повторяя доказательство Леммы 2.2, получим из (3.14) следующую оценку:

$$|z^m|_{V_2(Q_{\tau})} \leq \sqrt{\varepsilon G} \exp \left[(c_1 + a(\varepsilon)(2\varepsilon)^{-1}) \tau \right] \|p^m\|_{L_2(0, \tau)}. \quad (3.15)$$

Таким образом, из (3.13), (3.15) следует

$$\begin{aligned} |z^m|_{V_2(Q_{\tau})} &\leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{G} M \exp \left[(c_1 + a(\varepsilon)(2\varepsilon)^{-1}) \tau \right] |z^{m-1}|_{V_2(Q_{\tau})}, \\ \|p^m\|_{L_2(0, \tau)} &\leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{G} M \exp \left[(c_1 + a(\varepsilon)(2\varepsilon)^{-1}) \tau \right] \|p^{m-1}\|_{L_2(0, \tau)}. \end{aligned}$$

Выберем теперь такое ε_0 , чтобы $0 < \sqrt{\varepsilon} \sqrt{G} M \leq \frac{1}{2}$ и такое $0 < \sigma \leq 1$, что $\exp \left[(c_1 + a(\varepsilon_0)(2\varepsilon_0)^{-1}) \sigma \right] \leq \frac{3}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} |z^m|_{V_2(Q_{\sigma})} &\leq \frac{3}{4} |z^{m-1}|_{V_2(Q_{\sigma})}, \\ \|p^m\|_{L_2(0, \sigma)} &\leq \frac{3}{4} \|p^{m-1}\|_{L_2(0, \sigma)}, \quad \forall m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $Q_\tau = \Omega \times (0, \sigma]$.

Таким образом, последовательность $\{(u^m, r^m)\}$ фундаментальная в $V_2(Q_0) \times L_2(0, \sigma)$. Это означает, что существует единственная пара функций $(u, r) \in V_2(Q_0) \times L_2(0, \sigma)$ такая, что $u^m \rightarrow u$ в $V_2(Q_0)$ и $r^m \rightarrow r$ в $L_2(0, \sigma)$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в равенствах (3.1), (3.2), получим, что пара (u, r) является локальным решением задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10) в цилиндре Q_σ . И поскольку выполняется условие согласования (2.3)

$$\begin{aligned} E_t(0) + \int_{\Omega} \bar{K}(x, 0) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} K_x(x, 0) \varphi_x(x) dx - \\ - \int_{\Omega} K(x, 0) f(x, 0) dx = \int_{\partial\Omega} K(x, 0) \psi(x) ds, \end{aligned}$$

то $r(0) = 1$.

Покажем, что локальное решение единственно.

Предположим, что существуют две пары решений $(u_1, r_1), (u_2, r_2) \in V_2(Q_0) \times L_2(0, \sigma)$. Тогда из п.1 следует, что

$$|u_1 - u_2|_{V_2(Q_0)} \leq \frac{3}{4} |u_1 - u_2|_{V_2(Q_0)},$$

$$\|r_1 - r_2\|_{L_2(0, \sigma)} \leq \frac{3}{4} \|r_1 - r_2\|_{L_2(0, \sigma)}.$$

Следовательно, $u_1 \equiv u_2$ в $V_2(Q_0)$, $r_1 \equiv r_2$ в $L_2(0, \sigma)$.

Таким образом, решение задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10) в цилиндре Q_σ единственно.

Докажем теперь существование и единственность решения во всем цилиндре Q_T . Для этого положим для $t \geq \sigma$ $u(x, \sigma) = \varphi(x, \sigma)$, где $\varphi(x, \sigma)$ — это значение локального решения $u(x, t)$ при $t = \sigma$.

Повторяя изложенные выше вычисления для $\sigma \leq t \leq 2\sigma$, получим, что

$$|z^m|_{V_2(Q_{\sigma, 2\sigma})} \leq \frac{3}{4} |z^{m-1}|_{V_2(Q_{\sigma, 2\sigma})},$$

$$\|p^m\|_{L_2(\sigma, 2\sigma)} \leq \frac{3}{4} \|p^{m-1}\|_{L_2(\sigma, 2\sigma)}, \quad \forall m = 1, 2, \dots$$

Из этих неравенств и п.п. 1—2 следует, что существует решение задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10) при $\sigma \leq t \leq 2\sigma$, и оно единственно.

Повторяя эти рассуждения, мы за конечное число шагов приходим к выводу о существовании единственного решения (u, r) задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.10) во всем цилиндре Q_T .

Теорема доказана.

Литература

- [1] Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. — 1963. — V. 21. — P. 155–160.
- [2] Камынин, Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями / Л.И. Камынин // ЖВМиМФ. — Т. 4. — №6. — 1964. — С. 1006–1024.
- [3] Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16. — №11. — С. 1925–1935.

- [4] Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И.Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – №2. – С. 294–304.
- [5] Пулькина, Л.С. Неклассические уравнения математической физики / Л.С.Пулькина // Изд-во института математики СО РАН. – 2005. – С. 231–239.
- [6] Кожанов, А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера / А.И.Кожанов // Дифференц. уравнения. – 2004. – №6. – С. 763–774.
- [7] Костин, А.Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I / А.Б.Костин, А.И.Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – №1. – С. 107–116.
- [8] Костин, А.Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. II / А.Б.Костин, А.И.Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – №11. – С. 1519–1528.
- [9] Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 4-е изд. / Л.С.Понтрягин. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
- [10] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
- [11] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А.Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
- [12] Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П.Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

Поступила в редакцию 24/XI/2006;
в окончательном варианте — 24/XI/2006.

A NON-LOCAL PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION³© 2007 O.Y. Danilkina⁴

In the paper a non-local problem with integral condition for the heat equation is considered. The existence and uniqueness of the solution are proved.

Paper received 24/*XI*/2006.

Paper accepted 24/*XI*/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

⁴Danilkina Olga Yurjevna (danola@mail.ru), Dept. of Mathematics, Samara State Railway Communications University, Samara, Russia.