МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ СДВИГ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$[1]

© 2007 В.А. Кушманцева[2]

В работе доказано, что если изометрия T пространства $L_p[0,1]$ порождена несохраняющим меру автоморфизмом отрезка [0,1], то множество функций, чьи орбиты относительно изометрии T эквивалентны естественному базису пространства l_p, образуют плотное множество в пространстве L_p. Рассмотрены близкие к указанному факту задачи. В качестве математического инструмента использована почти транзитивность группы изометрий пространства L_p.

Введение

Отправной точкой данной работы является статья [1], где показано, что множество функций $g \in L_1[0,1]$, чьи орбиты $\{g, Tg, T^2g, \ldots\}$ под действием изометрии T специального вида эквивалентны стандартному базису пространтсва l_1, образуют открытое плотное множество; результат верен и для $L_p[0,1]$ с показателем $1 < p < \infty$, но без утверждения открытости множества. Приведенное в [1] доказательство указанного выше факта очень сложно технически, поэтому первая цель данной работы заключается в упрощении доказательства. Вторая цель — взглянуть на известные ранее результаты под углом доказанной в [1] теоремы и ответить на сформулированные там вопросы. В качестве математического инструмента используется свойство почти транзитивности группы изометрий пространства L_p. Хорошо известно, что все обратимые изометрии пространства $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ порождаются регулярными автоморфизмами пространства с мерой, а необратимые — их проекциями, — операторами условного математического ожидания (см, к примеру, [2] и [3, глава 6]). Остановимся на процедуре построения обратимых изометрий, следуя идеям А. Пелчинского и С. Ролевича [4, с. 253–254]. Зафиксируем произвольную функцию $r(x) \in L_p[0,1]$ нормы единица такую, что

$$\inf_{0<x<1} |r(x)| > 0. \tag{1}$$

Положим

$$\tau(x) = \int_0^x |r(t)|^p dt. \tag{2}$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Кушманцева Вероника Асасовна (kushmantceva@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Функция $\tau(x)$ строго возрастает, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$, поэтому $\tau(x)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение отрезка [0,1] на себя. Это и есть автоморфизм, по которому строится изометрия: для любой функции $g(x) \in L_p[0,1]$

$$(Ug)(x) \equiv U_r g(x) = r(x) g(\tau(x)). \tag{3}$$

Оператор (3) изометричен, т.к.

$$\|U_r g\|^p = \int_0^1 |g(\tau(x)) r(x)|^p dx = \|g\|^p.$$

Заметим, что (3) влечет условие $U_r(1) = r$, а из (1) следует обратимость изометрии:

$$U_r^{-1} g(x) = g(\tau^{-1}(x)) \frac{1}{r(\tau^{-1}(x))}; \qquad U_r^{-1}(r) = 1. \tag{4}$$

Отсюда получается, что любые две функции f и g одинаковой нормы с условием (1) могут быть переведены изометриями (3) и (4) одна в другую через единичную функцию 1:

$$g = (U_g U_f^{-1}) f. \tag{5}$$

В частности, любая изометрия (3) инвариантна на множестве функций, равных по модулю единице почти везде. Если других инвариантных множеств нет, то преобразование τ сохраняет меру, поскольку производная Радона–Никодима $\dfrac{d\mu(\tau(x))}{d\mu(x)} = |r(x)|^p = 1$. Обратное также справедливо: если $\mu(\tau(e) = \mu(e)$ для любого измеримого множества e, то $|r(x)|^p = 1$(п.в.). Если же f и g — произвольные функции нормы единица без условия (1), то сначала для любого ϵ находят две близкие функции f_1 и g_1 с условием (1):

$$\inf_{0<x<1} f_1(x) > \frac{\epsilon}{4}, \qquad \inf_{0<x<1} g_1(x) > \frac{\epsilon}{4}, \qquad \|f - f_1\| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \|g - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда изометрия $V = U_{g_1} U_{f_1}^{-1}$ переводит f_1 в g_1, при этом

$$\|Vf - g\| \leqslant \|Vf - Vf_1\| + \|Vf_1 - g_1\| + \|g_1 - g\| < \epsilon/2 + 0 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Изложенное выше трактуется так, что единичная сфера пространства $L_p (1 \leqslant p < \infty)$ относительно группы изометрий имеет две плотные орбиты, или *почти транзитивна*; все функции с условием (1) являются образами тождественной единицы 1, а без (1) — образами $2^{1/p}\chi_{[0,1/2]}$.

1. Постановка задачи

Итак, существует взаимно-однозначное соответствие между группой изометрий пространства L_p и группой автоморфизмов пространства с мерой. Нас интересует вопрос: *когда орбита функции $g \in L_p$ относительно изометрии (3) эквивалентна стандартному базису пространства l_p*? Понятно, что интересны лишь изометрии, порожденные несохраняющими меру преобразованиями τ, т.к. иначе $U_\tau^2 = I$. Наша ближайшая цель — обсудить все многообразие несохраняющих меру преобразований и выделить из них по возможности одно наиболее простого вида. Все τ определяются формулой (2) для всевозможных функций $r(x)$ со свойством (1) и условием $|r(x)| \neq 1$(п.в.) Но с точки зрения метрической классификации В.А. Рохлина [5] выделяются лишь три типа функций.

1–ый тип: функция принимает каждое свое значение лишь на множестве положительной меры.

Простейшая функция здесь — двузначная:

$$r_1(x) = C_1\chi_{[0,b]}(x) + C_2\chi_{[b,1]}(x), \qquad (0 < b < 1)$$

Константы C_1, C_2, b связаны условием $\|r\| = 1$. Положим для удобства $|C_1|^p(b) = 1/2$, $C_2^p(1-b) = 1/2$, $b = h/2$, и для определенности дальнейших вычислений $1/2 \leqslant h < 1$. Тогда $|C_1|^p = \dfrac{1}{h}, |C_2|^p = 1/(2-h)$, и по (2) получаем

$$\tau_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{h},\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{h}{2}, \\ \dfrac{1}{2-h}x + \dfrac{1-h}{2-h}, \qquad \text{если } h/2 < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Это преобразование сжатия–расширения, и именно соответствующая ему изометрия изучена в статье [1].

2–ой тип: функция принимает каждое свое значение только один раз (строго непрерывна). Простейшая функция в этом случае — степенная: $r_2(x) = (1/2+x)^{1/p}$, тогда $\tau_2(x) = x/2 + x^2/2$.

3–ий тип — комбинация первых двух: функция принимает каждое свое значение либо только один раз, либо на множестве положительной меры. Рассмотрим здесь

$$r_3(x) = \delta\chi_{[0,l]}(x) + (np)^{\frac{1}{p}} x^{\frac{n-1}{p}} \chi_{[l,1]}(x), \tag{7}$$

где $\delta = l^{\frac{n-1}{p}}$ из условия $\|r_3\| = 1$. Тогда

$$\tau_3(x) = \begin{cases} \delta^p \cdot x,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ x^{np},\ l < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим теперь, что нам пока не важен вид функций r_i, важно лишь то, что функции типов 2 и 3 могут быть по формуле (5) переведены в тип 1.То есть доказана

Лемма. Если τ — не сохраняющее меру преобразование отрезка [0,1], порожденное изометрией пространства $L_p[0,1]$, то τ изометрически изоморфно сжатию–расширению (6).

Обозначим соответствующую (6) функцию r_1 через

$$r(x) = (1/h)^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,h/2]}(x) + (1/2-h)^{\frac{1}{p}}\chi_{[(h/2),1]}(x). \tag{9}$$

Пусть T — изометрия, порожденная преобразованием (6) и функцией (9), тогда для каждой функции $g \in L_p$ имеем

$$(Tg)(x) = \begin{cases} (1/h)^{\frac{1}{p}} g(x/h), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h/2, \\ (1/(2-h))^{\frac{1}{p}} g(\dfrac{x}{2-h} + \dfrac{1-h}{2-h}), \qquad h/2 < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

2. Циклические векторы изометрии

Переходим к решению задачи, сформулированной в пункте 1. Эквивалентность орбиты функции g стандартному базису пространства l_p означает, что для любой последовательности чисел $a_k \in l_p$, $k = 0, 1, \ldots$, найдутся константы $A > 0$, $B > 0$ что

$$A(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|)^{1/p} \leqslant \|\sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k g\| \leqslant B(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|)^{1/p}. \tag{11}$$

Поскольку в пространствах L_p плотно множество ступенчатых функций с условием (1), то будем рассматривать орбиту функции 1, начиная с функции (9), т.е. множество $\{r, Tr, \dots, T^k r, \dots.\}$ Нетрудно подсчитать по формулам (9)и (10), что

$$\begin{aligned} T^k r(x) = (1/h)^{\frac{k+1}{p}} \chi_{[0,h^{k+1}/2]}(x) + (1/h)^{\frac{k}{p}} (1/2-h)^{\frac{1}{p}} \chi_{[h^{k+1}/2,h^k/2]}(x) + \dots + \\ +(1/2-h)^{\frac{k+1}{p}} \chi_{(h/2,1]}(x)(k=0,1,\dots.). \end{aligned} \tag{12}$$

При этом

$$\tau^{k+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{h^(k+1)}, \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{h^{k+1}}{2}, \\ \dfrac{x}{h^k \cdot (2-h)} + \dfrac{1-h}{2-h}, \ \dfrac{h^{k+1}}{2} < x \leqslant h^k/2, \\ \dots, \\ \dfrac{x}{(2-h)^(k+1)} + \dfrac{1-h}{(2-h)^(k+1)} + \\ \qquad + \dfrac{1-h}{(2-h)^k} + \dots + \dfrac{1-h}{2-h}, \ \dfrac{h}{2} < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{13}$$

(соответствует $T^k r(x)$). (Заметим, что в последней строчке сумма слагаемых, начиная со второго, равна $1-(1/2-h)^{k+1}$, поэтому при $x=1$ действительно $\tau^k(1)=1$). Воспользуемся теперь теоремой Гурария–Мацаева [6]: *Если последовательность натуральных чисел* $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ *лакунарна, то последовательность функций*

$$g_k(x) = (n_k p)^{\frac{1}{p}} x^{n_k - 1/p} (k = 0, 1, \dots) \tag{14}$$

эквивалентна естественному базису пространства l_p*, и эта же последовательность является базисной в* $L_p (1 \leqslant p < \infty)$*: для любой последовательности чисел* $(a_k) \in l_p$ *сущесвуют константы* $A > 0, B > 0$, *зависящие только от показателя лакунарности и* p*, такие что*

$$A(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|)^{1/p} \leqslant \| \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k \| \leqslant B(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|)^{1/p}. \tag{15}$$

Зафиксируем произвольное ϵ и выберем последовательность натуральных чисел $1 = n_0 < n_1 < \dots$ так, чтобы $h^{n_k+1}/2 < 1/2^k$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} (h^{n_k+1}/2)^{n_k q} < \epsilon^q. \tag{16}$$

Последовательность (n_k) автоматически лакунарна, т.к. из условия $\dfrac{1}{2} \leqslant h < 1$ следует оценка $\dfrac{h^{k+1}}{2} > \dfrac{1}{2^k}$. Пусть теперь $(a_n) \in l_p$ $(n = 0, 1, \dots)$ — произвольная последовательность нормы a. Положим

$$\alpha = (h^{n_k+1}/2)^{n_k - \frac{1}{p}} \tag{17}$$

и построим функции

$$f_k(x) = \alpha \chi_{[0,h^{n_k+1}/2]}(x) + g_k(x) \chi_{(h^{n_k+1}/2,1]}(x).$$

Функции f_k построены по типу r_3 (7) с $l = \dfrac{h_k^n + 1}{2}$, $\delta = \alpha$, $n = n_k$ (см. (7)). Подставим α из определения (17) и воспользуемся неравенством Гельдера для следующей

оценки:
$$\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\alpha\chi_{[0,\frac{h^{n_k+1}}{2}]}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\alpha(\frac{h^{n_k+1}}{2})^{1/p}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|(\frac{h^{n_k+1}}{2})^{n_k}<a\epsilon. \qquad (18)$$
Для функций f_k выполнено условие (1), поэтому существует изометрия V_k такая, что $T^kr=V_kf_k$, при этом по формуле (5) $V_k=U_{T^kr}U_{f_k}^{-1}$. Соответствующий изометрии V_k автоморфизм σ_k также есть композиция двух отображений . А так как $\dfrac{h^{n_k+1}}{2}<\dfrac{h^{k+1}}{2}$, то из формулы (13) получаем, что на первом слагаемом функции f_k преобразование σ_k тождественно:.
$$V_k(\alpha\chi_{[0,\frac{h^{n_k+1}}{2}]}(x))=\alpha\chi_{[0,\frac{h^{n_k+1}}{2}]}(x).$$
Второе слагаемое функцииf_k является функцией монотонной и непрерывной, поэтому при нахождении меры преобразования σ_k нужно лишь найти разность в концевых точках промежутка, которая, очевидно, не изменится, поэтому на втором слагаемом функции f_k изометрия V_k сведется к умножению на функцию, по модулю равную единице, которую продолжим тождественно на весь отрезок [0,1] (см. формулу (8)). Имеем
$$T^kr=V_kf_k=\alpha\chi_{[0,\frac{h^{n_k+1}}{2}]}+\psi_kg_k(\sigma_k)\chi_{(h^{n_k+1}/2,1]},\qquad|\psi|=1\quad\text{на }[0,1]. \qquad (19)$$
Заметим, что по (18) и определению (14)
$$\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_kg_k(\sigma_k)\chi_{0,(h^{n_k+1}/2]}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\|g_k\chi_{[0,\frac{h^{n_k+1}}{2}]}\|=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|(\frac{h^{n_k+1}}{2})^{n_k}<a\epsilon. \qquad (20)$$
Оценим теперь $\|\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kT^kr\|$. Оценка снизу следует из (19), определения (14), левой оценки (15) и (18):
$$\|\sum_{k=0}^{\infty}a_kT^kr\|=\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k(V_kf_k\pm\psi_kg_k(\sigma_k)\chi_{[0,(h^{n_k+1}/2]})\|=$$
$$=\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\alpha-\psi_kg_k)\chi_{[0,(h^{n_k+1}/2]}+\sum a_kg_k\|\geqslant$$
$$\geqslant\|\sum_{k=0}^{\infty}a_kg_k\|-\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\alpha\chi\|-\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_kg_k\chi\|\geqslant Aa-2a\epsilon=(A-2\epsilon)a.$$
Аналогично получается оценка сверху:
$$\|\sum_{k=0}^{\infty}a_kT^kr\|\leqslant\|\sum_{k=0}\infty a_kg_k\|+\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\alpha\chi\|+\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_kg_k(\sigma_k)\chi_{[0,(h^{n_k+1}/2]})\|<(B+2\epsilon)a.$$
В силу произвольности ϵ получаем, что орбита является базисной последовательностью в L_p, или вектор r—циклический для оператора (10):
$$Aa\leqslant\|\sum_{k=0}^{\infty}a_kT^kr\|\leqslant Ba. \qquad (20)$$
Т.е. для орбиты r справедлива оценка (11).

Если s—произвольная ступенчатая функция (мера носителя равна единице), то существует изометрия V такая, что $s=Vr$; из (10) следует, что изометрия T коммутирует с V, поэтому
$$\|\sum a_kT^ks\|=\|\sum a_kT^kVr\|=\|\sum V(a_kT^kr)\|=\|\sum a_kT^kr\|,$$

— т.е. можно воспользоваться неравенствами (20). Наконец, ступенчатые функции всюду плотны в пространстве L_p, поэтому получаем теорему Хеима [1].

Теорема 1. Пусть T — любая изометрия пространства $L_p[0,1]$ ($1 \leqslant p < \infty$), порожденная несохраняющим меру автоморфизмом отрезка [0,1]. Тогда множество функций f, для которых орбиты относительно изометрии T эквивалентны естественному базису пространства l_p и одновременно являются базисными последовательностями в L_p, образуют плотное множество в пространстве L_p.

3. Близкие задачи

Приведем теперь формулировку результата Хеима [1]:

Утверждение 1. Пусть T — изометрия вида (10). Множество функций f из L_1, для которых орбита f под действием изометрии T эквивалентна естественному базису пространства l_1, является открытым плотным множеством.

Данная формулировка показывает, что в [1] важен вид преобразования (6), что подтверждают сформулированные в конце работы [1] следующие 5 задач.

Задача 1. Когда орбита циклического вектора $x \in l_1$ является базисом для l_1?

Задача 2. Насколько широк класс изометрий пространства $L_1[0,1]$, для которого справедливо утверждение 1?

Задача 3. Является ли множество циклических векторов в L_1 или l_1множеством первой категории?

Задача 4. Как "далеко" можно сдвинуться от орбит и все еще иметь натягивающее множество? Иначе: когда орбита циклического вектора является минимальным натягивающим множеством?

Задача 5. Можно ли найти оператор (не обязательно изометрический) и циклический вектор, чья орбита будет (нормированным) базисом Шаудера?

В данной статье дан ответ на задачу 2 в лемме и теореме 1.

Задачу 1 сформулируем так: будет ли орбита $\{1, r, Tr \ldots\}$ изометрии (10) образовывать базис в L_1? Покажем, что ответ на этот вопрос — отрицательный, что можно получить из работы Терехина [7]; приведем ее построения. Пусть $\varphi_k \in L_p[0,1]$, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Семейство функций

$$\varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi_k(2^k t - j), \qquad k = 0,1,\ldots \qquad j = 0,\ldots 2^k - 1.$$

называется *нестационарным всплеском.* (Функции представлены по типу функций Хаара, потому что в работе [7] используется методика получения теорем устойчивости и свойства системы Хаара в пространствах L_p.) Предположим, что функции φ_k имеют нулевой интеграл:

$$(\varphi_k, 1) = \int_0^1 \varphi_k(t)dt = 0 \tag{21}$$

и нормированы условием

$$(\varphi_k, \chi) = \int_0^{1/2} \varphi_k(t)dt - \int_{1/2}^1 \varphi_k(t)dt = 1. \tag{22}$$

Здесь $\chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$.

Утверждение 2 ([7 , теорема 4.]) Пусть функции $\varphi_k, k = 0, 1, \ldots$ удовлетворяют условиям (21), (22) и условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-1/p)} \|\chi - \varphi_k\|_p < \infty. \tag{23}$$

Тогда нестационарный всплеск $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является базисом пространства $L_p[0, 1]$.

Сначала слегка изменим вид изометрии (10), иначе орбита будет переполненной системой:

$$T1(x) = \varphi_0(x) = \frac{1}{h}\chi_{[0,\frac{h}{2}]}(x) - \frac{1}{2-h}\chi_{(\frac{h}{2},1]}(x). \tag{24}$$

Положим $\varphi_k(x) = T^k\varphi_0(x)$. Теперь нетрудно проверить, что функции φ_k имеют нулевой интеграл (условие (21)); однако условие нормировки (22) выполнено с другой константой: $(\varphi_k, \chi) = (1/(2-h))^k$. (В [7] отмечено, что это не принципиально, но константа 1 более удобна при доказательствах.) Исправим функции, т.е. рассмотрим последовательность $\psi_k(x) = (2-h)^k\varphi_k(x)$. Теперь имеем

$$\|\chi - \psi_k\|_1 = (((2-h)/h)^k - 1)\frac{h^k}{2} + (((2-h)/h)^{k-1} + 1)(\frac{h^{k-1}}{2} - \frac{h^k}{2}) + \ldots +$$
$$+2(1/2 - h/2) = \ldots = \frac{3}{4}((2-h)^k + (2-h)/3) - h^k.$$

В полученном выражении ряд из первых слагаемых расходится, а из вторых — сходится, т.е. нарушено условие (23), поэтому нестационарный всплеск $1, \varphi_{k,j}$, являющийся орбитой функции φ_0 при изометрии (24), по утверждению 2 не будет базисом в L_1 (аналогично, в L_p при $1 < p < \infty$, но в результате более громоздких вычислений.) Отметим еще, что в работе [7] для пространств $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$ приведены условия базисности и полноты систем функций, близких к классической системе функций Хаара, обобщением которых и является условие (23). По такой же методике получения теорем устойчивости можно решить задачу 4.

4. Односторонний сдвиг

Объясним теперь, почему в заголовке статьи оператор назван оператором сдвига. Для гильбертова пространства $H = l_2$ оператор T одностороннего сдвига определяется так: $T(c_1, c_2, \ldots) = (0, c_1, c_2, \ldots)$. Но для реализации $H = H^2$ комплекснозначных функциональных пространств, это—оператор умножения на независимую переменную: $Tf(x) = xf(x)$, тогда $T^kf(x) = x^kf(x)$. Т.е. 1 является циклическим вектором: орбита $\{1, x, x^2, \ldots\}$ всюду плотна в пространстве. Имеется статья П.Розенталя [8], где дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы оператор T на нормированном пространстве был изометрически эквивалентен оператору

$$(M_xf)(x) = xf(x), f \in L_p(K, \mu), \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \text{где } K \subset \mathbf{R} \text{ компакт.}$$

Утверждение 3 [8, теорема 1.] Ограниченный линейный оператор T на комплексном (вещественном) нормированном векторном пространстве X изометрически эквивалентен оператору M_x на комплексном (вещественном) $L_p(K, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда оператор T удовлетворяет следующим условиям:

(а) спектр $\sigma(T)$ вещественен;

(б) $\|q(T)\| = \sup_{x\in\sigma(T)} |q(x)|$ для всех комплексных (вещественных) полиномов q;

(в) T имеет циклический вектор f такой, что:

(i) $\|q(T)\| = \||q|(T)f\|$ для всех комплексных (вещественных) полиномов q;

(ii) $\|\varphi(T)f\|^p = \|f\|^{p-2} f^*(\varphi^p(T)f)$ для всех непрерывных неотрицательных функций φ на $\sigma(T)$ (f^*—функционал, достигающий нормы на f).

Проверим, что для оператора T (10) все условия утверждения 3 выполнены. Спектр оператора (10) чисто непрерывный и совпадает с [0,1] ; (б) выполнено в силу существующего функционального исчисления между множеством полиномов и алгеброй ограниченных операторов на L_p, при этом изометрия (10) коммммутирует с полиномами:

$$\|q(T)\| = \sup_{\|g\|=1} \|q(T)(g)\| = \sup_{\|g\|=1} \|Tq(g)\| = \sup_{\|g\|=1} \|q(g)\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|.$$

Наконец, при доказательстве теоремы 1 мы показали, что $f = 1$ — циклический вектор для T, причем, $f^* = 1$ как элемент сопряженного пространства, поэтому (i) и (ii) также выполнены. Таким образом, оператор T (10) изометрически эквивалентен оператору сдвига, что и отмечено в заголовке статьи.

Литература

[1] Hõim, T. Orbits under a class of isometries of $L_1[0,1]$ / T. Hõim // Studia Math. – 2004. – V. 160(1).

[2] Lamperty, J. On the isometries of certain function spacea / J. Lamperty // Pacific J. Math. – 1958. – V. 2. – P. 459–466.

[3] Lacey, H.E. The isometric theory of classical Banach spaces / H.E. Lacey. – Berlin, Springer, 1974.

[4] Rolevicz, S. Metric linear spaces / Monografie matematyczne. – T. 56. – 1972.

[5] Рохлин, В.А. Метрическая классификация измеримых функций / В.А. Рохлин // Успехи мат. наук. – 1957. – T. 12. – B. 2(74). – C. 169–174.

[6] Гурарий, В.И. Лакунарные степенные последовательности в пространствах C и L_p / В.И. Гурарий, В.И. Мацаев // Известия АН СССР, серия математика. – T. 30. – №1. – 1966. – С. 3–14.

[7] Терехин, П.А. К вопросу о возмущениях системы Хаара / П.А. Терехин // Матем. заметки. – Т. 74. – 2004. – С. 466–470.

[8] Rosenthal, P. A characterization of multiplication by the independent variable on L_p. / P. Rosenthal // Studia Math. – V. XXXVI. – 1970. – P. 217–221.

Поступила в редакцию 29/*III*/2007;
в окончательном варианте — 29/*III*/2007.

Paper received 29/*III*/2007;
Paper accepted 29/*III*/2007.

ISOMETRIC SHIFT ON $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$[3]

 V.A. Kushmantseva[4]

In the paper it is proved that if isometry T of $L_p[0,1]$ is determined by a measure nonpreserving transformation of [0,1], then the set of functions for which orbits under isometry T are equivalent to the usual basis of l_p, is a dense set in L_p. Analogous problems are discussed. As a mathematical tool a property of almost transitivity of L_p space is used.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Kushmantseva Veronika Asasovna (kushmantseva@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.