

УДК 539.3:534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АЭРОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2007 С.А. Бочкарев, В.П. Матвеев¹

При решении задачи об аэроупругой устойчивости оболочек вращения методом, основанном на непосредственном интегрировании системы дифференциальных уравнений, для вычисления комплексных собственных значений предлагается использование метода парабол (Мюллера). Представлено сравнение полученных результатов с известными численными решениями при различных граничных условиях для оболочек вращения и внешнем или внутреннем течении сверхзвукового потока газа.

Введение

Задача о панельном флаттере оболочек вращения, взаимодействующих со сверхзвуковым потоком газа, достаточно давно исследуется различными аналитическими и численными методами [1, 2]. Среди численных методов, особое место занимает подход, предложенный в [3]. Этот подход основан на сведении геометрических, физических соотношений и уравнений движения теории оболочек, записанных с учетом разложения в ряды Фурье по окружной координате, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых переменных и решению полученной системы уравнений методом ортогональной прогонки Годунова [4]. Позднее этот подход был также использован в [5–7].

При использовании метода имеет место трудность, связанная с отсутствием алгоритмов вычисления комплексных собственных значений с доказанной сходимостью. Поэтому в [3], как и в [5, 6], пренебрегается аэродинамическим демпфированием, что, хотя и приводит к погрешностям в результатах, позволяет свести решение задачи к вычислению и анализу действительных собственных значений. Даже если в некоторых случаях влиянием аэродинамического демпфирования на границу аэроупругой устойчивости

¹Бочкарев Сергей Аркадьевич (bochkarev@icmm.ru), Матвеев Валерий Павлович (mvr@icmm.ru), Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 614013, Россия, г. Пермь, ул. Акад. Королева, 1.

можно пренебречь, тем не менее, отсутствие надлежащего метода вычисления комплексных собственных значений не позволяет провести дальнейшее усложнение алгоритма. В частности учесть вязкоупругие свойства материала оболочки, которые, как известно, могут существенно влиять на границу аэроупругой устойчивости.

Из указанных работ только в [7] для решения задачи в полной постановке было предложен итерационный алгоритм, построенный на методе обратных итераций. Однако полноценного сравнения получаемых результатов с известными численными решениями представлено не было, в связи с чем, трудно сделать вывод о работоспособности данного алгоритма.

В данной работе для вычисления комплексных собственных значений предлагается использование итерационного алгоритма, основанного на методе Мюллера (метод парабол) [8]. При этом показывается, что получаемые с использованием этого алгоритма результаты хорошо согласуются с результатами решения данной задачи, выполняемой с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается упругая оболочка вращения длиной L , наименьшим радиусом R и толщиной h . Оболочка взаимодействует с установившимся сверхзвуковым потоком газа, который либо течет внутри оболочки, либо обтекает ее снаружи со скоростью U . Поток газа рассматривается в рамках модели идеального сжимаемого газа, влияние пограничного слоя не учитывается. Будем считать, что от действия аэродинамического давления возникающие в оболочке деформации будут малыми. В результате решения задачи необходимо найти такую скорость потока газа, при которой невозмущенная форма оболочки перестает быть устойчивой.

Для вычисления аэродинамического давления действующего со стороны потока газа на упругую поверхность широкое распространение получили приближенные формулы, которые можно выразить следующей формулой

$$p = -p_1 \left(\frac{\partial w}{\partial s} + p_2 \frac{\partial w}{\partial t} - p_3 w \right), \quad (1.1)$$

где s — меридиональная координата и w — нормальная составляющая вектора перемещений. Для линеаризованного варианта уравнения, полученного по "поршневой" теории, коэффициенты в (1.1) имеют вид [9]

$$p_1 = \rho U^2 / M = \kappa p_\infty M, \quad p_2 = 1/U, \quad p_3 = 0, \quad (1.2)$$

а для квазистатической аэродинамической теории [10]

$$p_1 = \rho U^2 / \beta = \kappa p_\infty M^2 / \beta = q, \quad p_2 = (M^2 - 2) / (U \beta^2), \quad p_3 = 1/2r\beta. \quad (1.3)$$

Здесь: $M = U/c$ — число Маха; ρ , p_∞ , c — плотность, статическое давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа; q — модифицированное динамическое давление; κ — показатель адиабаты; r — текущий радиус оболочки; $\beta = (M^2 - 1)^{0.5}$. Последнее слагаемое в (1.1) представляет, так называемую, поправку Крумхара на кривизну оболочки, которой часто пренебрегают из-за ее незначительного влияния [11]. Первая из формул может применяться при $M \geq 2$, а вторая при $M \geq 1.6$.

В работе используется классическая теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява. Физические, геометрические соотношения и уравнения движения этой теории, записанные в криволинейной системе координат (α_1, α_2, z) , можно найти в [3, 12, 13]. В этих же работах представлен вывод канонической системы уравнений, которая для вектора новых переменных $\mathbf{y} = \{ T_{11}, S^*, M_{11}, Q^*, u, v, w, \theta_1 \}$ записывается следующим образом

$$\mathbf{y}' = f(\alpha_1, j, \lambda, \mathbf{y}), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -\gamma(y_1 - T_{22}) + j_a(2k_2H - y_2) - k_1y_4 - \lambda^2\rho_0y_5, \\ f_2 &= -2\gamma y_2 + j_aT_{22} - k_2Q_{22} - \lambda^2\rho_0y_6, \\ f_3 &= y_4 - \gamma(y_3 - M_{22}) - 2j_aH + T_{11}^0y_8 - y_1\theta_1^0, \\ f_4 &= k_1y_1 + k_2T_{22} - \gamma y_4 - j_a(Q_{22} + 2\gamma H) - \lambda^2\rho_0y_7 + p_1y_8 + i^*\lambda p_1p_2y_7 - p_1p_3y_7, \\ f_5 &= \varepsilon_{11} - k_1y_7 - \theta_1^0y_8, f_6 = \varepsilon_{12} + j_ay_5 + \gamma y_6 - \theta_1^0\theta_2, \\ f_7 &= k_1y_5 - y_8, \quad f_8 = \kappa_{11}; \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} (\dots)' &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial\alpha_1}, \quad \gamma = \frac{A_2'}{A_2}, \quad j_a = \frac{n}{A_2}, \\ \rho_0 &= \int_h \rho_m dz, \quad k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}; \\ \varepsilon_{22} &= j_ay_6 + \gamma y_5 + k_2y_7, \quad \kappa_{22} = j_a\theta_2 + \gamma y_8, \quad \theta_2 = k_2y_6 - j_ay_7, \\ \kappa_{11} &= [a_{11}(y_3 - b_{12}\varepsilon_{22} - c_{12}\kappa_{22}) - b_{11}(y_1 - a_{12}\varepsilon_{22} - b_{12}\kappa_{22})](a_{11}c_{11} - b_{11}^2)^{-1}, \\ \varepsilon_{11} &= (y_1 - a_{12}\varepsilon_{22} - b_{11}\kappa_{11} - b_{12}\kappa_{22})/a_{11}, \\ T_{22} &= a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + b_{12}\kappa_{11} + b_{22}\kappa_{22}, \\ M_{22} &= b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + c_{12}\kappa_{11} + c_{22}\kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y_2 - 2(b_{44} + 2k_2c_{44})(j_a(k_2y_5 + y_8 + \gamma y_7) - k_2\theta_1^0\theta_2)}{a_{44} + 4k_2(b_{44} + k_2c_{44})}, \\ \kappa_{12} &= k_2(\varepsilon_{12} + j_ay_5 - \theta_1^0\theta_2) - j_a(y_8 + \gamma y_7), \\ H &= b_{44}\varepsilon_{12} + 2c_{44}\kappa_{12}, \quad Q_{22} = -j_aM_{22} - T_{22}^0\theta_2 - \theta_1^0(y_2 - 2k_2H), \\ (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) &= \int_h (1, z, z^2) B_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 4). \end{aligned}$$

Здесь: R_1, R_2 — главные радиусы кривизн; A_1, A_2 — параметры Ламе; u, v — меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений, θ_i — углы поворота недеформируемой нормали; $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ — компоненты тангенциальной и изгибной деформации; T_{ij}, M_{ij} — усилия и моменты; S^*, H^* — обобщенные силы; $i^* = \sqrt{-1}$; $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$ — характеристический показатель; n — номер гармоники в разложении Фурье по окружной координате; ρ_m — удельная плотность материала оболочки; B_{ij} — коэффициенты, входящие в закон Гука для изотропного материала [12].

В соотношениях (1.4) величины с индексом "0" соответствуют основному напряженно-деформированному состоянию и определяются из решения статической задачи.

Система (1.4) при отсутствии контурных нагрузок должна удовлетворять однородным граничным условиям на торцах оболочки

$$y_i \delta_{i+4j} + y_{i+4} (1 - \delta_{i+4j}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 0, 1, \quad (1.5)$$

где $\delta_i = 0$, если заданы кинематические, и $\delta_i = 1$, если заданы статические граничные условия.

Краевая задача (1.4)–(1.5) решается апробированным в предыдущих работах методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Решение задачи сводится к вычислению и анализу таких комплексных собственных значений λ , при которых существует нетривиальное решение системы, условием которого является равенство нулю определителя матрицы $f_{ij}(\lambda)$, полученной в результате выполнения процедуры метода ортогональной прогонки. Во всех представленных ниже примерах, численное интегрирование выполняется по 100 точкам с ортонормированием и ортогонализацией векторов в каждой точке.

2. Метод вычисления собственных значений

В данной работе для вычисления комплексных собственных значений матрицы используются численный алгоритм, основанный на методе парабол (Мюллера). Метод Мюллера впервые был предложен для вычисления собственных частот колебаний упругих тел в рамках конечно-элементного решения в [14]. В дальнейшем этот метод получил распространение для широкого класса спектральных задач механики деформируемого твердого тела, как для вычисления собственных частот колебаний, так и собственных значений. В [15] выполнено сравнение этого метода с другими методами (в частности методом QR-преобразования), используемыми для вычисления собственных значений в задаче исследования аэроупругой устойчивости оболочек вращения, решаемой в рамках МКЭ. В работе показано, что наряду с приемлемой точностью вычисления и высокой вычислительной

эффективностью этот метод обладает таким важным свойством как универсальность. Это свойство для задач, решаемых в рамках МКЭ, заключается в том, что получаемое матричное динамическое уравнение движения не требует необходимости приводить к стандартной или обобщенной формулировке при решении алгебраической проблемы собственных значений, как это необходимо делать при использовании других методов. Более того, оказалось, что этот единый вычислительный алгоритм практически без изменений (исключая схему Горнера) может быть использован и при вычислении собственных значений для задач, решаемых в дифференциальной постановке. Отметим также, что возможность использования метода Мюллера для не полиномиальных уравнений отмечается в [16].

Кратко суть метода Мюллера состоит в следующем. Исходя из некоторых трех точек $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, строится последовательность $\{\lambda_m\}$ следующим образом. Если уже известны $\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}, \lambda_m$ ($m \geq 2$), то для построения λ_{m+1} по значениям определителя $P_n(\lambda) = \det[f_{ij}(\lambda)]$ в точках $\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}, \lambda_m$ строится интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени $L_{2,m}(\lambda)$. В качестве значения λ_{m+1} принимается ближайший к корню уравнения λ_m . В [17] доказана сходимость метода при нахождении корней алгебраического уравнения, если начальные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ находятся в малой окрестности корня. Кроме того, если задано начальное приближение $\lambda_0 = -1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, то процесс сходится к наименьшему по модулю корню.

Известным недостатком метода парабол является вычисление комплексных собственных значений в произвольном порядке, а не в порядке возрастания их действительных частей, как требуется при решении задачи. Однако, эта проблема легко разрешается, если в качестве начальных приближений использовать собственные частоты, вычисленные для консервативной задачи. На этой особенности и построен итерационный алгоритм.

На первом этапе, при отсутствии потока газа, вычисляется фиксированное число N собственных частот колебаний ω нагруженной или ненагруженной оболочки. Для их определения используется комбинация шагового метода, при котором вычисляются значения ω , на которых происходит смена знака определителя и метода, уточняющего ω в полученном диапазоне. В качестве последнего используется метод деления отрезка пополам.

Полученные собственные частоты колебаний используются в качестве начальных приближений при первом шаге с минимально возможной аэродинамической нагрузкой. Если в качестве варьируемого параметра используется число Маха, то начальное значение определяется ограничениями, задаваемыми для формул (1.2) и (1.3). Поэтому, более предпочтительно в качестве варьируемых параметров использовать статическое давление в невозмущенном потоке p_∞ , или модифицированное динамическое давление q , тем более, что эти параметры являются теми величинами, которые измеряются в экспериментальных исследованиях [18, 19].

Полученные с минимально заданной нагрузкой комплексные собственные значения используются в качестве начальных приближений для рас-

чета со следующим приращением нагрузки и так до тех пор, пока не будет найдено критическое значение нагрузки. Приращение, задаваемое на каждом шаге для нагрузки, является экспериментально определяемой величиной и зависит от геометрических и физико-механических параметров рассчитываемой оболочки.

Очевидно, что вычислительная эффективность такого алгоритма будет не очень высокой, поскольку на каждой итерации для каждого собственного значения необходимо выполнять формирование матрицы $f_{ij}(\lambda)$. Однако данный алгоритм позволяет решать задачу исследования аэроупругой устойчивости в полной постановке и вычислять комплексные собственные значения, хорошо согласующиеся со значениями, получаемыми в конечно-элементной постановке.

На рис. 1 приведен пример исследования аэроупругой устойчивости, выполненный с помощью описанного алгоритма. Здесь на комплексной плоскости представлены частотные годографы трех низших собственных значений λ (Гц) в зависимости от модифицированного динамического давления q ($\times 10^5$ Па). При отсутствии потока газа ($q = 0$) собственные частоты являются действительными (по оси ординат $\text{Re}(\lambda)$ они обозначены через ω_i). При наличии сверхзвукового потока газа собственные значения становятся комплексными. Цифрами на рисунке обозначены значения q , при которых получены соответствующие комплексные значения. При постепенном увеличении давления два собственных значения начинают сближаться друг с другом (1 и 2 собственные значения) и при значении $q = 4.73$ сливаются. При дальнейшем увеличении давления мнимая часть второго собственного значения при $q = 5.03$ меняет знак с положительного на отрицательный, что и характеризует начало области аэроупругой неустойчивости.

3. Примеры численной реализации

В качестве первого примера рассмотрим сравнение результатов с [19]. В этой работе наряду с конечно-элементным решением представлены также результаты экспериментальных исследований. Рассматривается коническая оболочка, жестко закрепленная по обоим торцам ($y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = 0$ при $x = 0$ и L) и обтекаемая внешним потоком газа. Оболочка имеет размеры $R = 0.04$ м, $L = 0.0626$ м, угол наклона образующей $\alpha = 14$ и выполнена из материала со следующими свойствами: модуль упругости $E = 1.28 \times 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, $\rho_m = 8 \times 10^3$ кг/м³. Поток газа характеризуется числом Маха $M = 2$ и модифицированным динамическим давлением q , которое связано с динамическим давлением $q_\infty = 0.5\rho U^2$ как $q = 1.56q_\infty$.

В табл. 1 приводится сравнение критического давления q ($\times 10^2$ Па) и частоты λ с данными из работы [19] для различных толщин оболочки h ($\times 10^{-5}$ м). Здесь величина n указывает на номер гармоники, при которой критическое давление является минимальным. В табл. 1 сопоставление при-

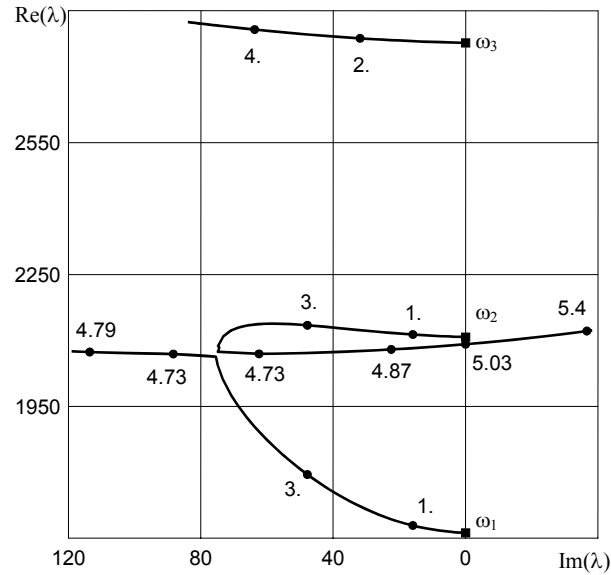


Рис. 1. Пример исследования аэроупругой устойчивости

водится для оболочки толщиной 5×10^{-5} м при различных значениях внутреннего статического давления P ($\times 10^5$ Па) для 20 гармоник.

В табл. 1 и 2 также приведены результаты расчетов из [15]. В [15] используется аналогичная теория оболочек и, поэтому, полученные в настоящей работе результаты лучше согласуются с результатами этой работы. Ниже, при упоминании о согласовании расчетов с конечно-элементным решением будут подразумеваться результаты, полученные на основе алгоритма представленного в [15].

Таблица 1

**Изменение критического модифицированного
давления q от толщины оболочки h**

h	3			4			5			6		
	q	λ	n	q	λ	n	q	λ	n	q	λ	n
[19]	1250	1510	22	2230	1800	21	3480	1910	19	5115	2080	18
[15]	1167	1485	22	2116	1774	21	3400	1892	19	5023	2062	18
расч.	1159	1502	22	2119	1797	21	3402	1917	19	5030	2091	18

Более сложная ситуация обстоит с тестированием алгоритма в случае внутреннего течения газа. Необходимо отметить, что отсутствует работы, доказывающие возможность применения приближенных формул (1.1) в случае внутреннего течения газа не только для цилиндрических, но и тем более для конических оболочек. Поэтому расчеты с внутренним течением следует в большой степени трактовать как модельные. Если при внешнем обтекании оболочек параметры невозмущенного потока постоянны вдоль

Таблица 2

**Изменение критического модифицированного
давления q от статического давления P**

P	0.01		-0.01		-0.02		-0.03		-0.04	
	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ
[19]	3587	—	3384	1890	3283	1720	3187	1550	3090	1350
[15]	3506	2150	3310	1869	3212	1711	3119	1537	3020	1341
расч.	3521	2174	3316	1894	3217	1738	3120	1567	3026	1375

длины оболочки, то при движении потока внутри оболочки они изменяются. В этом случае при заданных параметрах газового потока на входе их изменение по длине можно получить по изэнтропическим формулам [20]

$$\frac{A_x}{A_1} = \frac{M_1}{M_x} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{\kappa_+}{2\kappa_-}}, \quad \frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa_-}}, \quad \frac{U_x}{U_1} = \frac{M_x}{M_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\rho_x}{\rho_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{\kappa_-}}, \quad (3.1)$$

где $m_1 = 1 + 1/2\kappa_- M_x^2$, $m_2 = 1 + 1/2\kappa_- M_1^2$, $\kappa_- = \kappa - 1$, $\kappa_+ = \kappa + 1$. Здесь M_1, U_1, p_1, ρ_1 и M_x, U_x, p_x, ρ_x — параметры газа на входном сечении площадью A_1 и сечении площадью A_x . Для определения M_x из первого соотношения используется численный алгоритм, основанный на итерационном методе Ньютона.

Из известных работ [7, 21, 22], посвященных исследованию аэроупругой устойчивости конических оболочек с внутренним сверхзвуковым потоком газа, осуществим сравнение с результатами, полученными в [7].

Рассматривается консольно закрепленная коническая оболочка ($y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = 0$ при $x = 0$ и $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ при $x = L$) со следующими параметрами: $R = 0.237$ м, $L = 0.317$ м, $\alpha = 21$, $h = 1.35 \times 10^{-3}$ м, $E = 6.87 \times 10^{10}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2.7 \times 10^3$ кг/м³, $n = 1$. Аэродинамическое давление считается по (1.3) при $p_3 = 0$ и $M = 2.96$, $c = 200$ м/с, $\kappa = 1.4$.

На рис. 2 на комплексной плоскости представлены частотные годографы четырех безразмерных собственных значений $\mu = \lambda(\rho_m/E)^{0.5}$ в зависимости от статического давления в невозмущенном потоке p_∞ . Пунктирной линией на рис. 2 нанесены результаты, полученные в [7]. При этом наблюдается существенное количественное различие в полученных результатах: в [7] неустойчивость проявляется по второй частоте, а в данной работе по четвертой; критическое статическое давление p_∞ , найденное в [7], составляет 5.72×10^6 Па при существенно меньшей величине аэродинамического демпфирования, а в настоящей работе — 7.17×10^6 Па; также не совпадают критические частоты. Частично, эти количественные расхождения могут быть объяснены тем, что принятый в [7] закон изменения M и p_∞ от длины оболочки, не совпадает с результатами, получаемыми по изэнтропическим формулам (3.1), и тем, что в формуле аэродинамического давления в [7] коэффициент p_1 взят из квазистатической теории (1.3), а p_2 из поршне-

вой (1.2). Также, результаты представленные на рис. 3, количественно не согласуются с конечно-элементным расчетом.

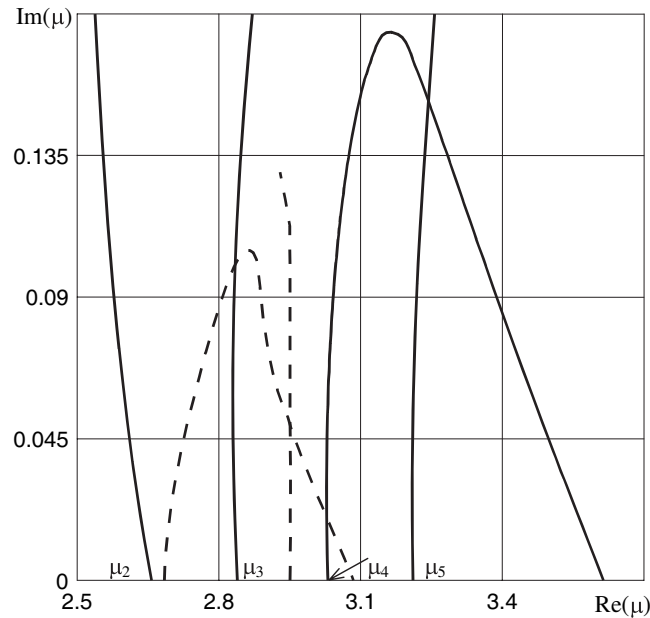


Рис. 2. Изменение безразмерных собственных значений h от статического давления в невозмущенном потоке p_∞ : сплошная линия — расчет; пунктирная линия — [7]

Однако, качественно, полученные результаты, совпадают. В отличие от флаттера, показанного на рис. 1, который осуществляется в виде слияния двух форм колебаний, на рис. 2 представлен, так называемый, флаттер с одной степенью свободы. Впервые о возможности существования такого характера потери устойчивости для консольных цилиндрических оболочек с внутренним дозвуковым течением жидкости было сообщено в [23], где флаттер с одной степенью свободы был обнаружен экспериментально и подтвержден расчетами. В этой же работе приводятся данные о том, что в случае оболочки, жестко закрепленной с двух торцов, потеря устойчивости осуществляется в виде дивергенции. Дополнительные расчеты, проведенные для оболочки с такими граничными условиями, не привели к изменению характера потери устойчивости.

В следующем примере рассматривается цилиндрическая оболочка, свободно опертая с двух торцов ($y_1 = y_3 = y_6 = y_7 = 0$ при $x = 0$ и L) при внешнем течении потока газа. Для оболочки и потока газа было задано: $R = 0.2032$ м, $L = 0.39116$ м, $h = 1.016 \times 10^{-2}$ м, $E = 1.032 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.35$, $\rho_m = 8.9053 \times 10^3$ кг/м³, $n = 23$, $M = 3$, $c = 213.36$ м/с, $\kappa = 1.4$.

Для оценки влияния конструкционного демпфирования на границу аэроупругой устойчивости был взят комплексный динамический модуль $E^* = E(1 + i^*\xi)$, где ξ принималось равным 0.001 для первой частоты колебаний.

Для заданного модуля упругости это соответствует $\text{Im}(\omega_1)/\text{Re}(\omega_1) = 5 \times 10^{-4}$. Для других частот коэффициент ξ пересчитывался по следующей формуле $\xi_i = \xi \omega_1/\omega_i$.

На рис. 3 представлено изменение действительной (рис. 3а) и мнимой (рис. 3б) частей двух первых собственных значений λ (Гц) от статического давления в невозмущенном потоке p_∞ (Па). Учет конструкционного демпфирования не приводит к изменению характера потери устойчивости, а лишь влияет на критическое значение давления. В рассмотренном случае с учетом и без учета конструкционного демпфирования критические значения давлений составили 3884.8 и 3845 Па, соответственно. В последнем случае результат решения хорошо согласуется с МКЭ.

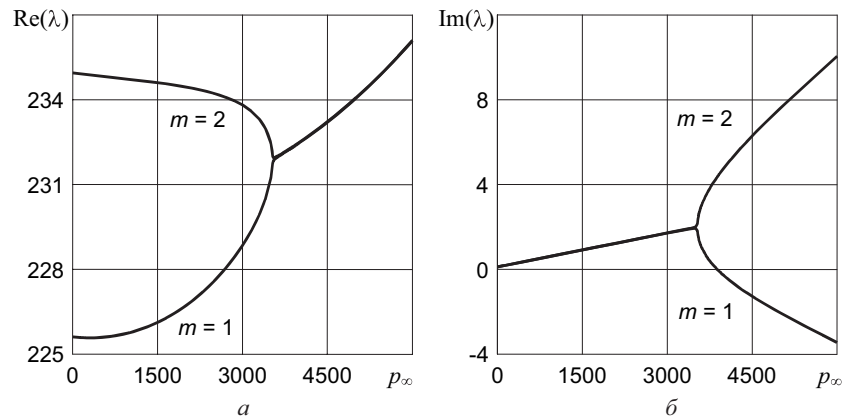


Рис. 3. Изменение двух первых собственных значений λ от статического давления в невозмущенном потоке p_∞ : а действительные части; б мнимые части

Представленные расчеты были выполнены с аэродинамическим давлением, вычисленным по квазистатической теории, включая все коэффициенты (1.3). Без учета поправки Крумхаара ($p_3 = 0$) — 3847.8 Па. Расчет по поршневой теории (без учета конструкционного демпфирования) дал значение 4203.4 Па. Это различие в 8.5%, полученное при использовании различных формул для вычисления аэродинамического давления, плохо согласуется с аналогичным исследованием в [24], где при том же числе Маха расхождение в результатах достигает 30%.

Заключение

Для решения задачи об аэроупругой устойчивости оболочек вращения рассмотрен метод, основанный на непосредственном интегрировании системы дифференциальных уравнений. Для вычисления комплексных собственных значений предложен итерационный алгоритм, построенный на использовании метода Мюллера. Работоспособность алгоритма проверена сравнением с известными численными решениями. В результате численных экспе-

риментов установлена хорошая согласованность вычисляемых результатов с решениями, получаемыми с использованием метода конечных элементов для различных граничных условий, за исключением консольного закрепления.

Также установлено, что вычислительная эффективность предложенного алгоритма существенно зависит от параметров оболочки и газового потока. При определенных параметрах задачи можно задать такой шаг итерируемого параметра, при котором для сходимости метода Мюллера по одному собственному значению вполне достаточно 4-5 итераций. При этом итерационная процедура остается устойчивой и комфортной для вычислений. Под устойчивостью здесь понимается возможность отслеживания эволюции каждого комплексного собственного значения с пошаговым увеличением нагрузки. При достаточно большом шаге нагрузки метод Мюллера может сойтись к произвольному собственному значению, учитывая, что матрица $f_{ij}(\lambda)$ содержит бесконечный спектр собственных значений.

Литература

- [1] Новичков, Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек / Ю.Н.Новичков // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1978. – Т. 11. – С. 67–122.
- [2] Bismarck-Nasr, M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells / M.N.Bismarck-Nasr // Applied Mechanics Reviews. – 1992. – V. 45. – №12. – P. 461–482.
- [3] Мяченков, В.И. Устойчивость оболочечных конструкций в сверхзвуковом потоке газа / В.И.Мяченков, П.Ф.Шаблий // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1975. – №2. – С. 70–81.
- [4] Годунов, С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К.Годунов // Усп. матем. н. – 1961. – Т. 16. – №3. – С. 171–174.
- [5] О флаттере конических оболочек / В.В.Диткин [и др.] // Численные методы в механике деформируемого твердого тела. – 1987. – С. 3–14.
- [6] Минуус, Г.М. Расчет на флаттер реактивного сопла с продольными сквозными каналами / Г.М.Минуус // Численные методы в механике деформируемого твердого тела. – 1987. – С. 15–22.
- [7] Диткин, В.В. Численное исследование флаттера конических оболочек / В.В.Диткин, Б.А.Орлов, Г.И.Пшеничных // МТТ. – 1993. – №1. – С. 185–189.
- [8] Жидков, И.П. Методы вычислений / И.П.Жидков, Н.С.Березин. – Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
- [9] Ильюшин, А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях / А.А.Ильюшин // ПММ. – 1956. – №6. – С. 733–755.

- [10] Voss, H.M. The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells / H.M.Voss // J. Aerospace Sciences. – 1961. – V. 3. – P. 945–956.
- [11] Krumhaar, H. The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells / H.Krumhaar // AIAA J. – 1963. – V. 1. – P. 1448–1449.
- [12] Мяченков, В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. Справочник / В.И.Мяченков, И.В.Григорьев. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.
- [13] Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник / Под ред. В.И.Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
- [14] Матвеев, В.П. Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов / В.П.Матвеев // Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости. – Свердловск, 1980. – С. 20–24.
- [15] Бочкарев, С.А. Решение задачи о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов / С.А.Бочкарев, В.П.Матвеев // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – №12. – С. 55–71.
- [16] Корн, Г. Справочник по математике / Г.Корн, Т.Корн. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
- [17] Muller, D.E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer / D.E.Muller // Mathematical Table. N. – 1956. – V-X. – P. 208–215.
- [18] Olson, M.D. Supersonic flutter of circular cylindrical shells subjected to internal pressure and axial compression / M.D.Olson, Y.C.Fung // AIAA J. – 1966. – V. 4. – P. 858–864.
- [19] Ueda, T. Supersonic flutter truncated conical shells / T.Ueda, S.Kobayashi, M.Kihira // Trans. Japan. Soc. Aerospace Sci. – 1977. – V. 20. – P. 13–30.
- [20] Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г.Лойцянский. – М.: Наука, 1967. – 730 с.
- [21] Mason, D.R. Finite-element application to rocket nozzle aeroelasticity / D.R.Mason, P.T.Blater // J. Propulsion & Power. – 1986. – V. 3. – P. 499–507.
- [22] Александров, В.М. Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке газа / В.М.Александров, С.А.Гришин // ПММ. – 1994. – Т. 58. – №4. – С. 123–132.
- [23] Paidoussis, M.P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid / M.P.Paidoussis, J.-P.Denise // Journal of Sound and Vibration. – 1972. – V. 20. – №1. – P. 9–26.

- [24] Amabili, M. Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells / M. Amabili, F. Pellicano // AIAA J. – 2001. – V. 39. – P. 564–573.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007

A METHOD OF AEROELASTIC STABILITY ANALYSIS OF SHELLS OF REVOLUTION

© 2007 S.A.Bochkarev, V.P.Matveyenko²

In this paper solutions to the problems of aeroelastic stability of revolution shells are found by a method based on direct integration of the system of differential equations. For calculation of complex eigenvalues it is proposed to use the parabola method (Muller's method). The obtained results are compared with the known numerical solutions at different boundary conditions for shells of revolution subjected to external or internal supersonic gas flow.

Paper received 15/V/2007;
Paper accepted 15/V/2007

²Bochkarev Sergey Arkadeivich (bochkarev@icmm.ru), Matveyenko Valery Pavlovich (mvp@icmm.ru), Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, 614013, Russia.