УДК 539.3

О ПРОСТЕЙШЕЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ[1]

© 2007 И.Ю. Цвелодуб[2]

Предлагается вариант трехконстантной тензорно-линейной разномодульной теории упругости. Исследованы вопросы устойчивости и единственности решения краевых задач. Рассмотрены некоторые примеры.

В существующих вариантах разномодульной теории упругости (РМТУ) изотропных материалов число N независимых упругих постоянных варьируется от 3-х до максимально возможных 5-ти, когда независимыми считаются модули Юнга E_+, E_- и коэффициенты Пуассона ν_+, ν_- при растяжении и сжатии и модуль сдвига G_o при чистом сдвиге. В некоторых теориях упругий потенциал кроме общепринятых в классическом варианте первого и второго инвриантов тензора напряжений содержит еще и третий инвариант, что приводит к тензорно-нелинейным связям между напряжениями и деформациями. В последнее время стали появляться публикации (например [1, 2]), посвященные построению тензорно-линейных определяющих уравнений, базирующихся на трехконстантных потенциалах ($N = 3$), не зависящих от третьего инварианта. В данной работе предложен вариант подобной РМТУ, в которой модуль сдвига G_o является константой, а объемный модуль K зависит от знака первого инварианта тензора напряжений. Использование этого потенциала позволило свести плоские задачи в напряжениях к классическим постановкам. Кроме того, рассмотрена неклассическая задача $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$, когда на части границы области одновременно заданы векторы перемещений $\mathbf{u}$ и нагрузок $\mathbf{p}$, а на остальной части условия не определены.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00673, 05-01-08025, 06-08-96002).

[2]Цвелодуб Игорь Юрьевич (itsvel@hydro.nsc.ru), Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 15.

1. Трехконстантная РМТУ

Для классической изотропной среды упругий потенциал Φ, т.е. удельная энергия, представляется в виде:

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Phi_1(I_\sigma) + \Phi_2(\sigma_i), \quad \Phi_1 = \frac{1-2\nu}{6E} I_\sigma^2, \quad \Phi_2 = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_i^2, \\
&I_\sigma = \sigma_{kk}, \quad \sigma_i^2 = 3/2\sigma_{kl}^o\sigma_{kl}^o, \quad \sigma_{kl}^o = \sigma_{kl} - 1/3 I_\sigma \delta_{kl} \quad (k,l = 1,2,3),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

где I_σ — первый инвариант, σ_i — интенсивность напряжений $\sigma_{kl}, \sigma_{kl}^o$ и δ_{kl} — компоненты девиатора напряжений и единичного тензора, E — модуль Юнга, ν коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

В (1.1) первое слагаемое $\Phi_1 = I_\sigma^2/(18K)$ — есть удельная работа изменения объема, а второе — $\Phi_2 = \sigma_i^2/(6G)$ — удельная работа формоизменения; здесь $K = E/[3(1-2\nu)]$ — объемный модуль упругости, а $G = E/[2(1+\nu)]$ — модуль сдвига.

Для разномодульной упругой среды аналогичное (1.1) представление потенциала в виде суммы удельных работ изменения объема и формы было предложено в [3], где Φ_1 зависит от I_σ^2 и $\operatorname{sign} I_\sigma$, а Φ_2 — от σ_i^2 и $\sin 3\xi$; ξ — угол вида напряженного состояния. Обсуждались преимущества такого подхода перед известными в те годы другими. В частности, за счет второго слагаемого Φ_2, которое представляется в виде ряда по степеням $\sin 3\xi$, упомянутое выше число N можно варьировать от 3-х до 5-ти. В случае $N = 5$ выражение для Φ имеет вид [3]:

$$
\begin{aligned}
&\Phi = BI_\sigma^2 + (D_o + D_1 \sin 3\xi + D_2 \sin^2 3\xi)^2 \sigma_i^2, \quad D_o = (6G_o)^{-1/2}, \\
&D_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_-}{3E_-}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_+}{3E_+}\right)^{1/2}, \\
&D_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_-}{3E_-}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_+}{3E_+}\right)^{1/2} - D_o, \\
&B = \frac{1-2\nu_+}{6E_+} H(I_\sigma) + \frac{1-2\nu_-}{6E_-} H(-I_\sigma), \\
&H(x) = 1 \quad \text{при} \ x > 0 \ \text{и} \quad H(x) = 0 \quad \text{при} \ x < 0, \\
&\sin 3\xi = -9\sigma_{kn}^o \sigma_{nl}^o \sigma_{kl}^o / (2\sigma_i^3).
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Из (1.2) видно, что при $D_1 \neq 0$ или $D_2 \neq 0$ соответствующие связи между напряжениями и деформациями будут тензорно-нелинейными. Поскольку целью работы является простейшая тензорно-линейная РМТУ, ограничимся в (1.2) 3-мя константами, полагая $D_1 = D_2 = 0$. Тогда, введя новые обозначения: $c = B$ и $a = D_o^2$, будем иметь

$$\begin{gathered}\Phi = a\sigma_i^2 + cI_\sigma^2, \qquad a = \frac{1+\nu_+}{3E_+} = \frac{1+\nu_-}{3E_-} = \frac{1}{6G_o}, \\ c = c_+H(I_\sigma) + c_-H(-I_\sigma), \qquad c_\pm = (1-2\nu_\pm)/(6E_\pm).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Из (1.3) для деформаций ε_{kl} получим

$$\varepsilon_{kl} = \partial\Phi/\partial\sigma_{kl} = 3a\sigma_{kl}^o + 2cI_\sigma\delta_{kl} \quad (k,l = 1,2,3). \tag{1.4}$$

Из (1.4) видно, что функции $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(\sigma_{mn})$ являются непрерывными. Заметим, что соотношения (1.3) и (1.4) можно получить из 4-х константной модели [4], в которой при $I_\sigma > 0$ имеют место соотношения (1.1) с константами ν_+ и E_+, а при $I_\sigma < 0$ — с константами ν_- и E_-. При $I_\sigma = 0$ закон упругости неопределен, а потенциал Φ терпит разрыв. Для устранения этого разрыва необходимо потребовать, как в (1.3), равенства модулей сдвига $G_+ = E_+/[2(1+\nu_+)]$ и $G_- = E_-/[2(1+\nu_-)]$ при растяжении и сжатии.

2. Об устойчивости и единственности решения краевых задач

Условие устойчивости в малом ($\delta\sigma_{kl}$ и $\delta\varepsilon_{kl}$ — бесконечно малые приращения σ_{kl} и ε_{kl}) [3]:

$$\delta\sigma_{kl}\delta\varepsilon_{kl} > 0, \quad \delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl} \neq 0 \tag{2.1}$$

для непрерывно дифференцируемых функций $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(\sigma_{mn})$ эквивалентно условию устойчивости в большом (Δ — знак конечного приращения):

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} > 0, \quad \Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{kl} \neq 0. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) обеспечивает единственность обращения связей между ε_{kl} и σ_{kl} и единственность решения краевых задач.

Как показано в [3], для выполнимости (2.1) для потенциала общего вида $\Phi = \Phi(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$ необходимо и достаточно положительной определенности симметричной матрицы $\|a_{ij}\|$ с коэффициентами:

$$a_{12} = \sigma_i\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left(\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right), \quad a_{23} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_\sigma\partial\xi}, \quad a_{13} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_\sigma\partial\sigma_i}.$$

Например, для трехконстантного потенциала [2]:

$$\Phi = a\sigma_i^2 + 2b\sigma_i I_\sigma + cI_\sigma^2$$

условия устойчивости будут иметь вид неравенств:

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0 \quad \text{и} \quad a\sigma_i + bI_\sigma > 0,$$

последнее из которых накладывает ограничение на напряженное состояние. Этого можно избежать, если использовать потенциал [1]:

$$\Phi = aI_2^2 + 2bI_2 I_\sigma + cI_\sigma^2, \quad I_2^2 = \sigma_{kl}\sigma_{kl}.$$

Соответствующие неравенства получены в [5]: они дают ограничения только на упругие постоянные $a, b,$ и c, но существенно более жесткие, чем для потенциала (1.3), для которого они (как и условие (2.2)) сводятся просто к его положительной определенности, т.е. к выполнению очевидных неравенств: $a > 0, c_+ > 0$ и $c_- > 0$.

3. Некоторые краевые задачи РМТУ

Как видно из (1.1) и (1.3), предложенный потенциал соответствует закону Гука для изотропной среды с той лишь разницей, что объемный модуль K (или величина c в (1.3)) не является константой, а зависит от знака первого инварианта I_σ. Поэтому некоторые известные результаты, относящиеся к классическим краевым задачам, можно распространить и на рассматриваемый случай. Например, в плоских задачах (плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние) функция напряжений $F = F(x_1, x_2)$ является бигармонической, а $I_\sigma = I_\sigma(x_1, x_2)$ — гармонической функциями, т.е. $\Delta\Delta F = 0$ и $\Delta I_\sigma = 0$ (Δ — оператор Лапласа), причем эти равенства справедливы как при $I_\sigma > 0$, так и при $I_\sigma < 0$. Поэтому методы решения плоских краевых задач в напряжениях совершенно аналогичны изложенным в [6].

В качестве другого примера отметим неклассическую задачу $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ [7] определения напряженно-деформированного состояния в плоской или пространственной области v по переопределенным условиям на части S_1 ее границы (где известны векторы перемещений $\mathbf{u}$ и нагрузок $\mathbf{p}$) и неопределенным условиям на другой части S_2. Эта задача является условно-корректной и в случае изотропной упругой области v сводится к последовательному решению задач Коши для уравнения Лапласа (ЗКЛ). При этом на S_1 определяются все компоненты напряжений σ_{kl} и их производные $\partial\sigma_{kl}/\partial n$ по нормали к S_1 (а следовательно, первый инвариант $I_\sigma = F_1$ и его производная $\partial I_\sigma/\partial n = F_2$) и на первом этапе решается ЗЛК (плоская или пространственная) [7]:

$$\Delta I_\sigma = 0 \quad \text{в} \quad v, \quad I_\sigma = F_1, \quad \partial I_\sigma/\partial n = F_2 \quad \text{на} \quad S_1. \tag{3.1}$$

На втором этапе, например, в плоской задаче для функции напряжений F имеем:

$$\Delta F = I_\sigma \quad \text{в} \quad v, \quad F = F_3, \quad \partial F/\partial n = F_4 \quad \text{на} \quad S_1, \tag{3.2}$$

где величины F_3 и F_4 на S_1 также известны (Для пространственного случая имеют место аналогичные (3.2) ЗЛК для компонент перемещений $u_k \quad (k = 1, 2, 3)$).

Из (3.1) находится функция $I_\sigma = I_\sigma(x_1, x_2)$ (или $I_\sigma = I_\sigma(x_1, x_2, x_3)$), а следовательно, и области: $I_\sigma > 0$ и $I_\sigma < 0$; из (3.2) — функция F и напряжения σ_{kl} в v, а из (1.4) — деформации ε_{kl}.

Методы решения указанных задач гармонического продолжения, т.е. (3.1) и (3.2), достаточно хорошо изучены [7] и применимы к рассматриваемому случаю разномодульной среды с упругим потенциалом (1.3). Отметим также итерационный метод решения задачи $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ [8], приводящий на каждой итерации к смешанной задаче с известными перемещениями u_k (нагрузками p_k) на S_1 и нагрузками p_k (перемещениями u_k) на S_2.

Литература

[1] Мясников, В.П. Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды / В.П. Мясников, А.И. Олейников // ДАН СССР. – 1992. – Т. 332. – №1. – С. 57–60.

[2] Буренин, А.А. К моделированию деформирования материалов, поразному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Буренин, В.М. Ярушина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. – М.: Физматлит, 2006. – С. 100–106.

[3] Цвелодуб, И.Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов / И.Ю. Цвелодуб // Динамика сплошной среды: сб. научн. тр. – Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977. – Вып. 32. – С. 123–131.

[4] Шапиро, Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Г.С. Шапиро // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1966. – №2. – С. 123–125.

[5] Олейников, А.И. О единственности решения задач и устойчивости материала нелинейной гетерогенной упругости / А.И. Олейников, Е.В. Могильников // ДАН. – 2001. – Т. 378. – №2. – С. 194–196.

[6] Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

[7] Шваб, А.А. Некорректные статические задачи теории упругости / А.А. Шваб // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №6. – С. 98–106.

[8] Цвелодуб, И.Ю. О задаче $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ в теории упругости / И.Ю. Цвелодуб // ПМТФ. – 2006. – Т. 47. – №3. – С. 100–103.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.

A PRIMARY MULTI-MODULAR THEORY OF ELASTICITY OF ISOTROPIC MATERIALS

© 2007 I.Y. Tsvelodub[3]

In the paper the variant of three-constant tensor-linear multi-modular elasticity theory is proposed. The stability problem and uniqueness of boundary-value problems solution are studied. Some illustrative examples are considered.

Paper received 15/ V/2007.
Paper accepted 15/ V/2007.

[3]Tsvelodub Igor Yur'evitch (itsvel@hydro.nsc.ru), Institute of Hydrodynamics of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russia.