

## ТОЧНЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

© 2007 Ю.Н. Радаев<sup>1</sup>

В работе рассматривается математическая модель распределения напряжений в пластической зоне у вершины трещины нормального отрыва (трещины типа I) в идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. В качестве критерия текучести принято условие текучести Мизеса. Опираясь на формальную статическую определенность задачи, получены точные формулы для вычисления напряжений в пределах локализованной у вершины трещины пластической зоны. Приводится сравнение полученных в работе точных результатов с результатами численного анализа распределения напряжений, проведенного Хатчинсоном в 1968 г.

### 1. Вводные замечания

Пластическая зона у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния часто моделируется по схеме Дагдейла (D.S. Dugdale) узкой полосой на продолжении трещины, поскольку для большинства мягких металлов экспериментально наблюдается именно такая картина локализации пластических деформаций. Модель Дагдейла локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва в упруго идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния детально рассматривается в большинстве руководств по механике разрушения (см., например, [1, 2]). Схема Дагдейла основана на использовании критерия текучести Треска. Ясно, что интерес также представляет расчет локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва при условии текучести в форме Мизеса. В представляемой работе обсуждаются модель "диффузионного" пластического течения у вершины трещины, предложенная в [3], построение на ее основе

<sup>1</sup>Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

сетки скольжения и распределения напряжений у вершины трещины нормального отрыва в идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. Анализ напряжений будет проведен по неполной схеме в рамках формально статически определимой постановки. В отличие от работы [3], в настоящем исследовании будут найдены точные формулы для напряжений и дано сравнение полученных точных результатов с результатами численного анализа распределения напряжений, проведенного Хатчинсоном в 1968 г.

Кратко остановимся на содержании работы. Сразу же после введения, во втором разделе, следуя [4], приводятся основные уравнения теории пластического плоского напряженного состояния на основе критерия текучести Мизеса. Дана классификация уравнений для напряжений и скоростей и определены (в области гиперболичности) характеристические направления и соотношения вдоль характеристических линий. В третьем разделе приводится решение [3], описывающее распределение напряжений в пластической зоне у вершины трещины нормального отрыва (трещины типа I) в идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. Это решение требует расчета двух угловых величин, определяющих форму пластической зоны, которые удовлетворяют системе двух тригонометрических уравнений. Указанная система так же, как и в статье [3], но с большей степенью точности анализируется численно. Внимательное рассмотрение полученных результатов позволяет выдвинуть дополнительное соотношение между упомянутыми углами. В четвертом разделе статьи дается строгое обоснование этого дополнительного соотношения, а затем и точное решение той тригонометрической системы уравнений, точное решение которой не удавалось получить ранее. В итоге появляется возможность вывести точные формулы, описывающие распределение напряжений в пределах пластической зоны. Заключительный раздел работы посвящен доказательству еще одного соотношения, связывающего угловую величину, определяющую положение одного из трех составляющих пластическую зону элементов, с углом наклона одного из семейств характеристических линий.

## **2. Основные соотношения теории пластического плоского напряженного состояния при условии текучести Мизеса**

Уравнения пластического плоского напряженного состояния были получены и исследованы В.В. Соколовским (1945 г.), а также Р. Хиллом (1949 г.). Основные соотношения теории пластического плоского напряженного состояния рассматриваются в монографиях [4–7]. Известно, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличии от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений. (Это обстоятельство отмечалось многими авторами.

См., например, [6, с. 261.] Поэтому уравнения плоского напряженного состояния не могут рассматриваться как частный случай трехмерных уравнений теории пластичности. Плоское напряженное состояние идеально пластического тела характеризуется формальной статической определимостью. Уравнения равновесия, сформулированные с помощью условия текучести Мизеса, имеют переменный тип.

Рассмотрим, следуя [4], плоское напряженное состояние идеально пластического тела, характеризующееся условиями  $\sigma_{13} = 0$ ,  $\sigma_{23} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$ .

Будем считать, что критерий текучести принят в форме Мизеса:

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 = 3k^2. \quad (2.1)$$

Это же условие может быть сформулировано с помощью главных нормальных напряжений

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3k^2,$$

или

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 12k^2. \quad (2.2)$$

Ясно, что это уравнение определяет эллипс, расположенный в плоскости  $\sigma_1\sigma_2$  (так называемый эллипс текучести).

Условие пластичности удовлетворяется, если ввести угол  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \pi$ ), определяющий напряженное состояние на эллипсе текучести согласно

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = k \sin \omega, \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sqrt{3}k \cos \omega.$$

Следовательно, главные нормальные напряжения могут быть представлены как

$$\sigma_{1,2} = 2k \cos \left( \omega \mp \frac{\pi}{6} \right). \quad (2.3)$$

Ясно, что  $\sigma_1 > \sigma_2$ , если  $0 < \omega < \pi$ .

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta, \end{aligned}$$

поле напряжений в пластической зоне можно представить как

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\theta), \\ \sigma_{22} &= k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\theta), \\ \sigma_{12} &= k \sin \omega \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\theta$  — угол наклона главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему главному напряжению  $\sigma_1$ , к оси  $x_1$ .

Дифференциальные уравнения равновесия в случае плоского напряженного состояния сводятся к двум уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Уравнения равновесия и условие пластичности содержат три компоненты напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$ . Следовательно, эта система соотношений может рассматриваться независимо от уравнений, содержащих перемещения. Таким образом, напряжения могут быть проанализированы по формально статически определимой схеме.

Соотношения ассоциированного закона течения имеют вид  $(\partial_1, \partial_2$  — частные производные по декартовым координатам  $x_1, x_2$ ):

$$\frac{\partial_1 v_1}{2\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\partial_2 v_2}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}} = \frac{\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1}{6\sigma_{12}}. \quad (2.6)$$

Здесь  $v_1, v_2$  — декартовы компоненты скорости.

Уравнения статики и кинематики с учетом (2.4)–(2.6) приводятся к

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega \cos 2\theta) \partial_1 \omega - \cos \omega \sin 2\theta \partial_2 \omega + \\ + 2 \sin \omega (\sin 2\theta \partial_1 \theta - \cos 2\theta \partial_2 \theta) &= 0, \\ -(\sqrt{3} \sin \omega + \cos \omega \cos 2\theta) \partial_2 \omega + \cos \omega \sin 2\theta \partial_1 \omega + \\ + 2 \sin \omega (\cos 2\theta \partial_1 \theta + \sin 2\theta \partial_2 \theta) &= 0;\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}-(\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + 2 \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \partial_1 v_1 &= 0, \\ -(\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + 2 \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \partial_2 v_2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Уравнения плоского напряженного состояния, как известно, гиперболически при условии

$$\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6}$$

и эллиптически, если

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \omega \leq \pi.$$

Значения

$$\omega = \frac{\pi}{6}, \quad \omega = \frac{5\pi}{6}$$

соответствуют параболическому вырождению уравнений плоского напряженного состояния. Рассмотрим далее лишь гиперболический случай. Характеристики статической и кинематической систем, как нетрудно проверить, совпадают.

Для определения характеристических линий составим характеристическое уравнение, например, для системы кинематических уравнений (2.8). Характеристический определитель есть

$$\begin{vmatrix} -(\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) v_2 + 2 \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta v_1 & -(\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) v_1 \\ -(\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) v_2 & -(\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) v_1 + 2 \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta v_2 \end{vmatrix}.$$

| Здесь  $v_1, v_2$  — декартовы компоненты единичного вектора нормали к характеристической кривой. Раскрывая определитель и приравнявая его нулю, приходим к характеристическому уравнению

$$\sqrt{3}(\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 - 6 \sin \omega \sin 2\theta \frac{v_1}{v_2} + \sqrt{3}(\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) = 0,$$

откуда после ряда преобразований находим дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta \pm \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega}}{\sqrt{3} \cos 2\theta - \operatorname{ctg} \omega}. \quad (2.9)$$

Введем угол  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ ) согласно

$$2\psi = \pi - \arccos \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}}.$$

Можно показать, что выполняется соотношение

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{\sin \left( \omega + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left( \omega - \frac{\pi}{6} \right)}},$$

а дифференциальные уравнения характеристик приводятся к виду

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta + \psi), \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta - \psi)$$

или ( $\alpha, \beta$  — характеристические координаты)

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta} = \operatorname{tg}(\theta + \psi) \frac{\partial x_1}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = \operatorname{tg}(\theta - \psi) \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}. \quad (2.10)$$

Выведем далее соотношения вдоль характеристических линий, следующие из статических уравнений плоского напряженного состояния. С этой целью удобнее всего воспользоваться уравнениями равновесия в форме Ламе—Максвелла, т.е. уравнениями равновесия, сформулированными в изостатической координатной сетке (см., например, [8, с. 75])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial S_1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial S_2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial S_1} = \mathbf{l} \cdot \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial S_2} = \mathbf{m} \cdot \nabla,$$

$\mathbf{l}, \mathbf{m}$  — единичные векторы, касающиеся изостатических траекторий. Преобразуем уравнения Ламе—Максвелла, учитывая

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \sin \omega, \quad \sigma_1 = 2k \cos \left( \omega - \frac{\pi}{6} \right), \quad \sigma_2 = 2k \cos \left( \omega + \frac{\pi}{6} \right).$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \frac{\partial\omega}{\partial S_1} - \sin\omega \frac{\partial\theta}{\partial S_2} &= 0, \\ \sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\partial\omega}{\partial S_2} - \sin\omega \frac{\partial\theta}{\partial S_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Преобразуем далее операторы производных по направлениям изостатических траекторий

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial S_1}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial S_2}$$

к производным вдоль характеристических линий, обозначая соответствующие операторы через  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_2$ . Начнем с несколько более общего случая, когда первая из траекторий отклоняется на угол  $\psi_1$  по ходу часовой стрелки от первой изостатической траектории, а вторая — на угол  $\psi_2$  против хода часовой стрелки. Оба угла считаются неотрицательными и  $\psi_1 + \psi_2 \neq 0$ ,  $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$ . Несложные вычисления приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2, \\ d_2 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_1 + \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \bar{d}_2. \end{aligned}$$

Замечая, что первая характеристическая линия отклоняется на угол  $\psi$  по ходу часовой стрелки от первой изостатической траектории, а вторая — также на угол  $\psi$ , но против хода часовой стрелки, имеем

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2 \cos\psi} (\bar{d}_1 + \bar{d}_2), \\ d_2 &= \frac{1}{2 \sin\psi} (-\bar{d}_1 + \bar{d}_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Вводя полученные для производных вдоль изостатических траекторий выражения (2.13) в систему (2.12), приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi (\bar{d}_1 + \bar{d}_2)\omega - (\bar{d}_2 - \bar{d}_1)\theta &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi (\bar{d}_2 - \bar{d}_1)\omega - (\bar{d}_1 + \bar{d}_2)\theta &= 0. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, приходим к соотношениям вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi \bar{d}_1 \omega + \bar{d}_1 \theta &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi \bar{d}_2 \omega - \bar{d}_2 \theta &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= 0,\end{aligned}\tag{2.14}$$

где

$$\operatorname{ctg} \omega = -\sqrt{3} \cos 2\psi.$$

Замечая затем, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\psi d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega} d\omega,$$

и вводя функцию  $\lambda = \lambda(\omega)$  согласно

$$\frac{1}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega} d\omega = -d\lambda,$$

имеем интегрируемые соотношения вдоль характеристик

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\lambda - \theta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(\lambda + \theta) &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Поскольку

$$d\lambda = \frac{3 \sin^2 2\psi d\psi}{1 + 3 \cos^2 2\psi},$$

то

$$\lambda = \int \frac{3 \sin^2 2\psi d\psi}{1 + 3 \cos^2 2\psi} = -\operatorname{arctg}(2 \operatorname{ctg} 2\psi) - \psi + \operatorname{const},$$

и, полагая значение постоянной равным  $\pi/2$ , после несложных преобразований находим

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}^3 \psi = \left[ \frac{\sin(\omega + \pi/6)}{\sin(\omega - \pi/6)} \right]^{3/2},\tag{2.16}$$

Рассмотрим далее кинематические соотношения для случая плоского напряженного состояния. Для этого обратимся к уравнениям ассоциированного закона течения (2.6) (или (2.8)). После ряда простых преобразований система кинематических уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\sin(\theta - \psi) \sin(\theta + \psi)(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + \sin 2\theta \partial_1 v_1 &= 0, \\ \cos(\theta - \psi) \cos(\theta + \psi)(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + \sin 2\theta \partial_2 v_2 &= 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\theta &= \frac{\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1}{\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2}, \\ \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\psi} &= -\frac{\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1}{\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2}.\end{aligned}$$

Для перехода к дифференцированиям вдоль характеристик в полученных уравнениях можно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \cos \theta d_1 - \sin \theta d_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \sin \theta d_1 + \cos \theta d_2,\end{aligned}$$

которые в сочетании с

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{1}{2 \cos \psi} (\bar{d}_1 + \bar{d}_2), \\ d_2 &= \frac{1}{2 \sin \psi} (-\bar{d}_1 + \bar{d}_2)\end{aligned}$$

позволяют заменить частные дифференцирования по декартовым координатам согласно

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{2 \sin 2\psi} (\sin(\theta + \psi) \bar{d}_1 - \sin(\theta - \psi) \bar{d}_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{2 \sin 2\psi} (-\cos(\theta + \psi) \bar{d}_1 + \cos(\theta - \psi) \bar{d}_2).\end{aligned}$$

Вдоль характеристик могут быть получены неинтегрируемые уравнения для скоростей ( $v_1, v_2$  — декартовы компоненты скорости)

$$\frac{\partial v_1}{\partial \beta} + \operatorname{tg}(\theta + \psi) \frac{\partial v_2}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \operatorname{tg}(\theta - \psi) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.17)$$

Преобразуем уравнения (2.17), вводя в них вместо декартовых компонент скорости  $v_1, v_2$  компоненты  $v_{\langle \alpha \rangle}, v_{\langle \beta \rangle}$ , представляющие собой ортогональные проекции вектора скорости на характеристические направления (см. рис. 1). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}v_1 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cos \gamma, \\ v_2 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sin \gamma,\end{aligned}$$

где  $\gamma$  — угол наклона к оси  $x_1$  вектора скорости, а также

$$\begin{aligned}v_{\langle \alpha \rangle} &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cos(\gamma - \theta + \psi), \\ v_{\langle \beta \rangle} &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cos(\gamma - \theta - \psi),\end{aligned}$$

откуда сразу же находим

$$\begin{aligned}v_{\langle \alpha \rangle} &= v_1 \cos(\theta - \psi) + v_2 \sin(\theta - \psi), \\ v_{\langle \beta \rangle} &= v_1 \cos(\theta + \psi) + v_2 \sin(\theta + \psi).\end{aligned}$$

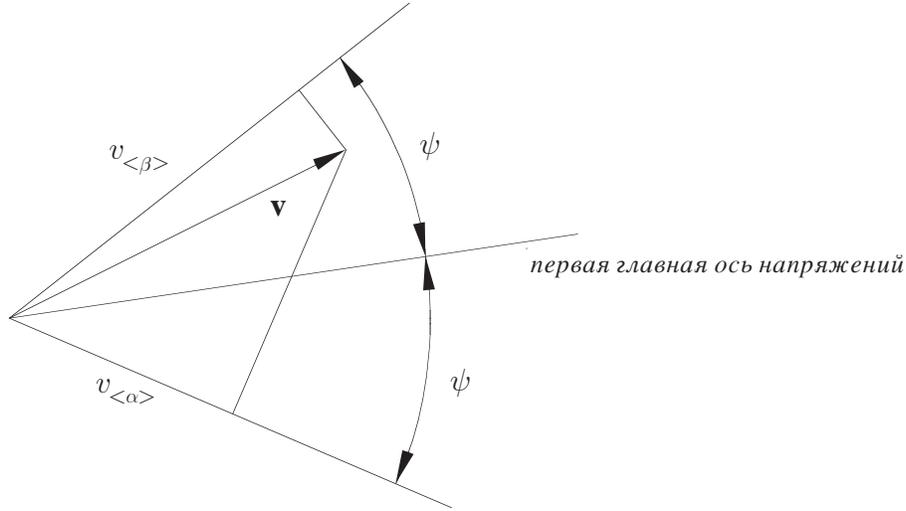


Рис. 1. Ортогональные проекции вектора скорости на характеристические направления, отклоняющиеся на угол  $\pm\psi$  от первой главной оси тензора напряжений

Разрешив полученные уравнения относительно  $v_1$ ,  $v_2$ , имеем

$$v_1 = \frac{1}{\sin 2\psi} (v_{<\alpha>} \sin(\theta + \psi) - v_{<\beta>} \sin(\theta - \psi)),$$

$$v_2 = \frac{1}{\sin 2\psi} (-v_{<\alpha>} \cos(\theta + \psi) + v_{<\beta>} \cos(\theta - \psi)).$$

Подставляя эти выражения в характеристические соотношения

$$\cos(\theta - \psi) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \sin(\theta - \psi) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\cos(\theta + \psi) \frac{\partial v_1}{\partial \beta} + \sin(\theta + \psi) \frac{\partial v_2}{\partial \beta} = 0,$$

учитывая, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = -\frac{3 \sin^2 2\psi}{1 + 3 \cos^2 2\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{3 \sin^2 2\psi}{1 + 3 \cos^2 2\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha},$$

и выполняя необходимые преобразования, приходим к характеристическим соотношениям для скоростей в форме

$$\frac{\partial v_{<\alpha>}}{\partial \alpha} + 2 \frac{\cos 2\omega}{\sin 2\psi} (\cos 2\psi v_{<\alpha>} - v_{<\beta>}) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{<\beta>}}{\partial \beta} - 2 \frac{\cos 2\omega}{\sin 2\psi} (\cos 2\psi v_{<\beta>} - v_{<\alpha>}) \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0, \quad (2.18)$$

в которых угол  $\omega$  исключается с помощью

$$\cos 2\omega = \frac{3 \cos^2 2\psi - 1}{3 \cos^2 2\psi + 1}.$$

Заключая этот раздел работы, приведем необходимые для дальнейшего уравнения в полярной системе координат  $r, \varphi$ .

В полярной системе координат уравнения равновесия в случае плоского напряженного состояния приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

При переходе к полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

и, следовательно, в условиях плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= k \left[ \sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2(\theta - \varphi) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= k \left[ \sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2(\theta - \varphi) \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= k \sin \omega \sin 2(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

### 3. Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом теле

Определим распределение напряжений в окрестности вершины трещины типа I (трещина нормального отрыва) в условиях плоского напряженного состояния, когда начало текучести соответствует условию Мизеса, исследуя статически определимую задачу, состоящую в отыскании решения системы дифференциальных уравнений равновесия для случая плоского напряженного состояния.

Введем полярные координаты  $r, \varphi$ , поместив полюс координатной системы в вершину трещины. Через  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$  будем обозначать физические компоненты тензора напряжений.

Полагая, что у вершины трещины напряжения имеют при  $r \rightarrow 0$  асимптотику вида

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sigma_{ij}^{(0)}(\varphi) + O(r^\alpha) \quad (\alpha > 0) \quad (3.1)$$

и подставляя (3.1) в дифференциальные уравнения равновесия и условие текучести, можно в принципе получить поле напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом теле. На самом деле первый

член асимптотики (3.1) уже дает точное распределение напряжений, и присутствие слагаемого  $O(r^\alpha)$  в этой формуле чисто номинально.

Условие текучести Мизеса при плоском напряженном состоянии имеет форму

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + 3\sigma_{r\varphi}^2 = 3k^2, \quad (3.2)$$

где  $k$  — предел текучести при сдвиге.

Уравнения равновесия сводятся к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условие текучести и уравнения равновесия, в частности, удовлетворяются, если положить

$$\sigma_{rr} = k \cos \varphi, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \cos \varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = k \sin \varphi. \quad (3.4)$$

Эти соотношения определяют решение для напряжений (см. [7, с. 237, 238]) в веерообразной области простой волны с криволинейными характеристиками вида  $r^2 \sin \varphi = \text{const}$ , примыкающей к области равномерного напряженного состояния. Для декартовых компонент напряжений, связанных с физическими компонентами  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sin 2\varphi + \sigma_{r\varphi} \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

при этом справедливы формулы

$$\sigma_{11} = k \cos^3 \varphi, \quad \sigma_{22} = k \cos \varphi (2 + \sin^2 \varphi), \quad \sigma_{12} = -k \sin^3 \varphi. \quad (3.5)$$

Заметим, что полярная ось  $\varphi = 0$  является асимптотической линией криволинейного семейства характеристик и соответствует параболическому вырождению уравнений статики плоского напряженного состояния. Компоненты напряжений на указанной оси вычисляются в виде  $\sigma_{rr} = k$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = 2k$ .

Известно [3] и иное представление компонент тензора напряжений, позволяющее удовлетворить условию текучести (3.2),

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a + b \cos 2\vartheta(\varphi) + c \sin 2\vartheta(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= a - b \cos 2\vartheta(\varphi) - c \sin 2\vartheta(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} &= -b \sin 2\vartheta(\varphi) + c \cos 2\vartheta(\varphi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — такие постоянные, что

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3k^2. \quad (3.7)$$

Действительно, выполняя подстановку (3.6) в (3.2), убеждаемся в необходимости выполнения равенства (3.7).

Подставляя (3.6) в уравнения равновесия (3.3), находим, что

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = 1,$$

т.е.  $\vartheta(\varphi) = \varphi - \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — постоянная.<sup>2</sup>

Необходимо отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на продолжении трещины, используя лишь одно из представлений (3.4) или (3.6), не удастся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (3.4) или (3.6) в различных характерных областях<sup>3</sup> полуплоскости  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Границы областей определяются из условия непрерывности компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\varphi}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  при переходе через эти границы. Компонента  $\sigma_{rr}$  может в принципе претерпевать разрыв.

Установлено, что существуют три характерные клинообразные области (рис. 2) с границами  $\varphi = \varphi_{ob}$  и  $\varphi = \varphi_{oc}$ . В области  $0 < \varphi < \varphi_{ob}$  решение имеет форму простой волны (3.4). В областях  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  и  $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$  реализуется равномерное напряженное состояние, и поле напряжений определяется формулами (3.6). В секторе  $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$ , примыкающем к свободному от нагрузок берегу трещины, напряжения без труда определяются (здесь реализуется состояние равномерного сжатия величины  $\sqrt{3}k$ ) и, следовательно, постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  известны:  $\vartheta(\varphi) = \varphi$ ,  $a = b = -\sqrt{3}k/2$ ,  $c = 0$ . В секторе же  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  необходимо определить другой набор констант  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в представлении для напряжений (3.6).

Условия непрерывности компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на лучах  $\varphi = \varphi_{ob}$  и  $\varphi = \varphi_{oc}$  выполняются за счет выбора постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и положений  $\varphi_{ob}$ ,  $\varphi_{oc}$ . Действительно, на пять постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varphi_{ob}$ ,  $\varphi_{oc}$  накладываются пять условий: требование (3.7) и четыре условия, следующих из непрерывности компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  при переходе через границы  $\varphi = \varphi_{ob}$  и  $\varphi = \varphi_{oc}$  рассматриваемых характерных областей.

Если теперь удовлетворить двум условиям непрерывности при  $\varphi = \varphi_{oc}$  за счет выбора постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в решении для напряжений в секторе

<sup>2</sup>Последнее обстоятельство позволяет вместо представления (3.6) получить также представление

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= a' + b' \cos 2\varphi + c' \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= a' - b' \cos 2\varphi - c' \sin 2\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= -b' \sin 2\varphi + c' \cos 2\varphi,\end{aligned}$$

где  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  — постоянные, удовлетворяющие условию

$$a'^2 + 3b'^2 + 3c'^2 = 3k^2.$$

<sup>3</sup>Ясно, что решения уравнений в каждой из характерных областей должны иметь форму простых волн.

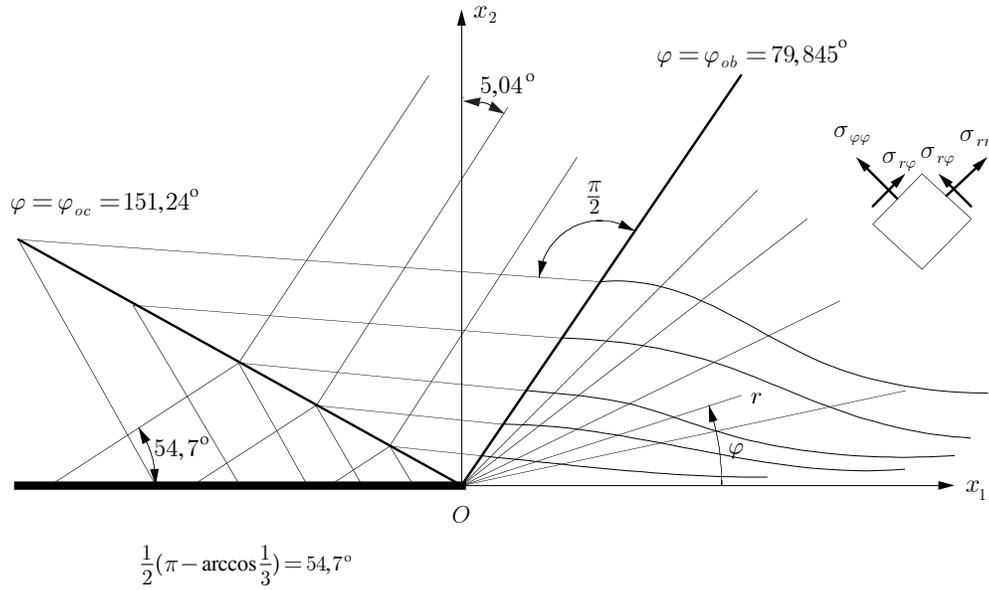


Рис. 2. Поле характеристик в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния (модель "диффузионного" течения)

$\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$ , связанных также уравнением (3.7)<sup>4</sup>, то величины углов  $\varphi_{oc}$

<sup>4</sup>Упомянутые постоянные вычисляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}), \\ \frac{b}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}), \\ \frac{c}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc}. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}), \\ \frac{b'}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(\cos 2\varphi_{oc} + 3 \cos^2 2\varphi_{oc} - 2), \\ \frac{c'}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_{oc} + 3 \cos 2\varphi_{oc} \sin 2\varphi_{oc}). \end{aligned}$$

и  $\varphi_{ob}$  в итоге находятся из условий непрерывности при  $\varphi = \varphi_{ob}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} = \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) - \\ -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\varphi_{oc}) \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{ob} = -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\varphi_{oc}) \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Численное решение приведенной системы тригонометрических уравнений было выполнено с помощью Maple V и дает следующий результат<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_{ob} &= 79,84497189^\circ = 1,393557651... \text{ рад}, \\ \varphi_{oc} &= 151,2377253^\circ = 2,639596260... \text{ рад}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Можно показать, что система тригонометрических уравнений (3.8) имеет единственное решение. На рис. 3 изображены кривые, неявно определяемые каждым из уравнений указанной системы. Они имеют единственную точку пересечения внутри квадрата  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ .

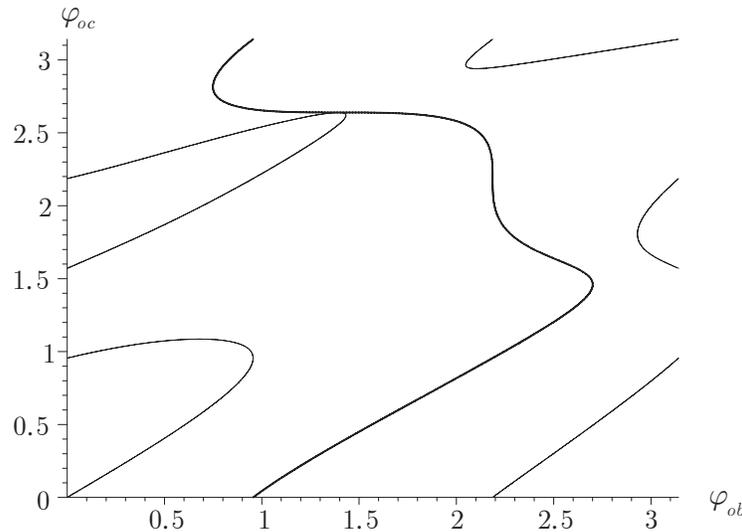


Рис. 3. К единственности решения системы тригонометрических уравнений (3.8). Темная линия — кривая, неявно определяемая первым уравнением системы (3.8)

Интересно отметить, что в точке пересечения рассматриваемых кривых происходит их касание. Окрестность точки касания представлена на рис. 4.

<sup>5</sup>Мы приводим весьма точный результат для величин углов  $\varphi_{oc}$  и  $\varphi_{ob}$ . Погрешность при вычислении указанных углов приводит к существенному изменению величины напряжения  $\sigma_{11}$  в клинообразной зоне  $\varphi_{ob} \leq \varphi \leq \varphi_{oc}$ .

Кривая, неявно определяемая первым уравнением системы (3.8), имеет нулевую кривизну в точке касания. Общая касательная имеет нулевой наклон к оси абсцисс. Ясно поэтому, что для вычисления углов  $\varphi_{oc}$  и  $\varphi_{ob}$  при численной реализации необходимо весьма точное представление тригонометрических уравнений, образующих систему (3.8): в противном случае точки пересечения не будут существовать или возникнут два близких решения рассматриваемой системы.

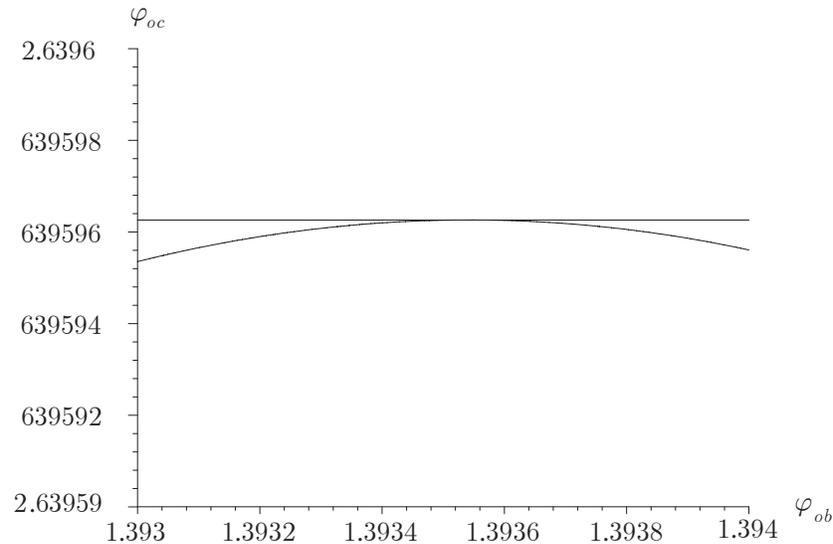


Рис. 4. Касание кривых, неявно определяемых системой тригонометрических уравнений (3.8), в точке их пересечения

Распределение напряжений в окрестности вершины трещины нормально-го отрыва в условиях плоского напряженного состояния в упругом идеально пластическом материале, подчиняющемся критерию текучести Мизеса, в каждой из трех характерных клинообразных областей задается формулами (физические компоненты тензора напряжений относятся к величине  $\sqrt{3}k$ , где  $k$  — предел текучести на сдвиг) [3]:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \varphi_{ob}, & \varphi_{ob} = 79,84497189^\circ \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi, & \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{ob} \leq \varphi \leq \varphi_{oc}, \quad \varphi_{oc} = 151,2377253^\circ \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) + \\ + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \cos 2(\varphi - \varphi_{oc}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi - \varphi_{oc}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{rr} + \frac{1}{2}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}), \\ \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \sin 2(\varphi - \varphi_{oc}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi - \varphi_{oc}); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{oc} \leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 5. Видно, что напряжения  $\sigma_{rr}$  разрывны при  $\varphi = \varphi_{oc}$ , однако остаются непрерывными при переходе через луч  $\varphi = \varphi_{ob}$ .

Декартовы компоненты тензора напряжений в секторе  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  вычисляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(4 \cos 2\varphi_{oc} - 3 \sin^2 2\varphi_{oc}), \\ \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(1 + 2 \cos 2\varphi_{oc} - 3 \cos^2 2\varphi_{oc}), \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4} \sin 2\varphi_{oc}(1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}). \end{aligned}$$

Для декартовых компонент напряжений в секторах равномерного напряженного состояния  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  и  $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$  можно получить соответственно значения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a + b \cos 2\varphi_{oc} - c \sin 2\varphi_{oc} = 0.0054822196...k, \\ \sigma_{22} &= a - b \cos 2\varphi_{oc} + c \sin 2\varphi_{oc} = 0.5234987241...k, \\ \sigma_{12} &= b \sin 2\varphi_{oc} + c \cos 2\varphi_{oc} = -0.9537275934...k; \\ \sigma_{11} &= -\sqrt{3}k, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поле характеристик, соответствующих локальному пластическому течению вблизи вершины трещины, изображено на рис. 2. Линия трещины является асимптотической линией криволинейных характеристик в области централизованного поля  $0 < \varphi < \varphi_{ob}$ , для которого решение уравнений равновесия имеет форму простой волны.

Вычислим наклон характеристик в областях равномерного напряженного состояния  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  и  $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$ . Для этого заметим (см., например, [4]), что характеристики имеют наклон к горизонтальной оси, равный

$$\theta \pm \psi,$$

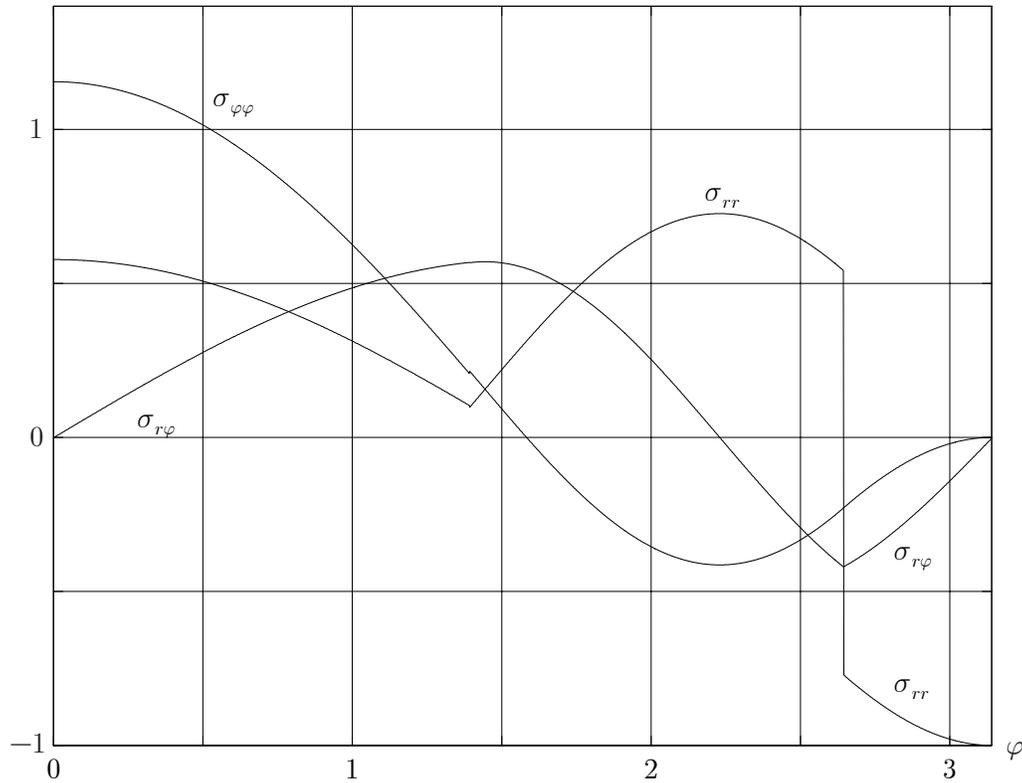


Рис. 5. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния (модель "диффузионного" течения)

где  $\theta$  — наклон изостаты, соответствующей наибольшему главному нормальному напряжению,

$$\cos 2\psi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \omega, \quad \sigma_{1,2} = 2k \cos\left(\omega \mp \frac{\pi}{6}\right).$$

Углы  $\psi$  и  $\omega$  должны находиться в следующих пределах:

$$\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6}, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

В зоне  $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$  имеем:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = -\sqrt{3}k$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\psi = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}$ , следовательно,

$$\theta \pm \psi = \frac{1}{2} \left( \pi \pm \arccos \frac{1}{3} \right).$$

В зоне  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  наклон первой главной оси напряжений

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{b \sin 2\varphi_{oc} + c \cos 2\varphi_{oc}}{b \cos 2\varphi_{oc} - c \sin 2\varphi_{oc}} = \frac{b \operatorname{tg} 2\varphi_{oc} + c}{b - c \operatorname{tg} 2\varphi_{oc}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{a}{\sqrt{3}k} + \frac{b}{\sqrt{3}k} = \cos 2\varphi_{oc}, \quad \frac{c}{\sqrt{3}k} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc},$$

т.е.

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{oc} = \frac{2c}{a+b},$$

получаем также

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{3bc + ac}{b^2 - 2c^2 + ab}.$$

Далее определяем главные напряжения

$$\sigma_{1,2} = a \pm \sqrt{b^2 + c^2},$$

откуда сразу же находим

$$\omega = \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k},$$

следовательно,

$$\cos 2\psi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \omega = -\frac{\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k}\right)^2}}{\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k} + \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k}\right)^2}}.$$

В результате наклон характеристик в зоне  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  вычисляется в виде

$$\theta \pm \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3bc + ac}{b^2 - 2c^2 + ab} \pm \frac{1}{2} \left[ \pi - \arccos \frac{\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k}\right)^2}}{\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k} + \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k}\right)^2}} \right]. \quad (3.11)$$

Заметим, что наклон характеристик в рассматриваемой зоне может быть определен также из следующей формулы:

$$\operatorname{tg}(\theta \pm \psi) = \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta \pm \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega}}{\sqrt{3} \cos 2\theta - \operatorname{ctg} \omega}.$$

Углы наклона характеристик в зоне  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  были найдены численно:

$$\theta + \psi = 84,9623^\circ = 1,48287... \text{ рад},$$

$$\theta - \psi = -10,1559^\circ = -0,177254... \text{ рад}.$$

Полученные численные данные, касающиеся поля скольжения, несколько отличаются от тех, которые обычно приводятся в литературе, а их интерпретация приводит к ряду новых результатов. Так, на основании только что проделанного численного анализа, для угла наклона одного из семейств характеристик<sup>6</sup> по отношению к лучу  $\varphi = \varphi_{ob}$  имеем

$$\varphi_{ob} - (\theta - \psi)|_{\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}} = 89,999\dots^\circ,$$

а это позволяет выдвинуть *предположение* о том, что

$$\varphi_{ob} - (\theta - \psi)|_{\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}} = \frac{\pi}{2}, \quad (3.12)$$

т.е.

$$\operatorname{tg}(\theta - \psi) \operatorname{tg} \varphi_{ob} = -1$$

или

$$-\operatorname{ctg} \varphi_{ob} = \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta - \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega}}{\sqrt{3} \cos 2\theta - \operatorname{ctg} \omega}. \quad (3.13)$$

Таким образом, характеристики в зоне  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$ , имеющие наклон  $\theta - \psi$  к горизонтальной оси, ортогональны лучу  $\varphi = \varphi_{ob}$ .

Воспользуемся далее тем обстоятельством, что (см. рис. 3) в точке касания кривых вдоль каждой кривой

$$\frac{d\varphi_{oc}}{d\varphi_{ob}} = 0. \quad (3.14)$$

Поэтому, дифференцируя оба уравнения системы (3.8) по переменной  $\varphi_{ob}$  соответственно вдоль кривых, неявно определяемых этими уравнениями, и учитывая приведенное выше равенство, получим

$$\begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{ob} = \cos^2 \varphi_{oc} \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) - \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}), \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} = \cos^2 \varphi_{oc} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) + \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Нетрудно заметить, что второе уравнение системы (3.8) будет совпадать с первым из уравнений в системе (3.15), а из первого уравнения в (3.8) с учетом второго уравнения системы (3.15) находим

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} = \cos 2\varphi_{oc} - \frac{1}{3}. \quad (3.16)$$

Отметим также, что в точке касания кривых, неявно определяемых уравнениями системы (3.8), как показывает численный анализ, кривизна

<sup>6</sup>Имеются в виду характеристики, наклоненные к горизонту под углом  $\theta - \psi$ .

первой кривой равна нулю (см. рис. 4). Следовательно, в точке касания рассматриваемых кривых для первой из них

$$\frac{d^2\varphi_{oc}}{d\varphi_{ob}^2} = 0. \quad (3.17)$$

Двукратное дифференцирование первого уравнения системы (3.8) по переменной  $\varphi_{ob}$  вдоль кривой, определяемой этим уравнением, с учетом (3.14) и (3.17) дает уравнение, совпадающее со вторым уравнением системы (3.15).<sup>7</sup>

Уравнение (3.16) позволяет устранить угол  $\varphi_{ob}$  из расчетной схемы и свести анализ поля характеристик к решению одного уравнения относительно угла  $\varphi_{oc}$ .

Таким образом устанавливаются соотношения между неизвестными углами, не усматриваемые из численных результатов невысокой точности.<sup>8</sup> Мы сейчас дадим строгое обоснование всех выдвинутых предположений и полученных на их основе соотношений. Оказывается, что могут быть получены точные значения для углов  $\varphi_{ob}$ ,  $\varphi_{oc}$ , а следовательно, и точные формулы для распределения напряжений.

#### 4. Точные формулы для напряжений

Снова рассмотрим тригонометрическую систему (3.8)

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) - \\ -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{ob} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} - \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}), \\ B &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{ob}, \\ C &= -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}), \\ D &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

<sup>7</sup>Поэтому отсюда уже нельзя извлечь никаких новых соотношений для углов  $\varphi_{ob}$  и  $\varphi_{oc}$ .

<sup>8</sup>В известной нам литературе по рассматриваемой проблеме приводятся численные результаты, обладающие весьма заметной погрешностью.

В этих обозначениях система (4.1) приобретает вид

$$\begin{cases} A = C \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) - D \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}), \\ B = D \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) + C \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}). \end{cases} \quad (4.3)$$

Ясно, что система (4.3) линейна относительно  $\cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc})$ ,  $\sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc})$ . С помощью (4.3) выразим их через  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Вычисляя необходимые определители

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} C & -D \\ D & C \end{vmatrix} &= C^2 + D^2 = \left(\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc})\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{16}(5 + 2 \cos 2\varphi_{oc} - 3 \cos^2 2\varphi_{oc}) = \\ &= \frac{1}{16}(1 + \cos 2\varphi_{oc})(5 - 3 \cos^2 2\varphi_{oc}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{vmatrix} A & -D \\ B & C \end{vmatrix} = AC + BD,$$

$$\begin{vmatrix} C & A \\ D & B \end{vmatrix} = BC - AD,$$

находим

$$\begin{aligned} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) &= \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}, \\ \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) &= \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Возведем каждое из уравнений (4.5) в квадрат и почленно их сложим. Затем, умножив полученное равенство на  $(C^2 + D^2)^2$  и перенеся все слагаемые в левую часть, имеем:

$$\begin{aligned} (AC + BD)^2 + (BC - AD)^2 - (C^2 + D^2)^2 &= (AC)^2 + (BD)^2 + \\ &+ (BC)^2 + (AD)^2 - (C^2 + D^2)^2 = (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) - \\ &- (C^2 + D^2)^2 = (C^2 + D^2)((A^2 + B^2) - (C^2 + D^2)) = \\ &= \frac{1}{2304}(1 + \cos 2\varphi_{oc})(5 - 3 \cos 2\varphi_{oc})((-8\sqrt{3} \cos \varphi_{ob} - 3 + 9 \cos 2\varphi_{oc})^2 + \\ &+ 48(1 - \cos^2 \varphi_{ob}) - 9(5 + 2 \cos 2\varphi_{oc} - 3 \cos^2 2\varphi_{oc})) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенство  $3 \cos 2\varphi_{oc} - 5 = 0$  выполняться не может. Уравнение  $\cos 2\varphi_{oc} + 1 = 0$  дает корни, не удовлетворяющие исследуемой системе тригонометрических уравнений. Следовательно, остается лишь вариант:

$$\begin{aligned} 12(12 \cos^2 \varphi_{ob} + 4\sqrt{3} \cos \varphi_{ob} - 12\sqrt{3} \cos 2\varphi_{oc} \cos \varphi_{ob} + 9 \cos^2 2\varphi_{oc} - \\ - 6 \cos 2\varphi_{oc} + 1) = 12(12 \cos^2 \varphi_{ob} - 4\sqrt{3}(3 \cos 2\varphi_{oc} - 1) \cos \varphi_{ob} + \\ + (3 \cos 2\varphi_{oc} - 1)^2) = 12(2\sqrt{3} \cos \varphi_{ob} - 3 \cos 2\varphi_{oc} + 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$



Подставим в уравнение (4.11) полученное выше соотношение (4.9):

$$\begin{aligned}
& \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \left( \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} \right) - \\
& \quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} \right)^3 - \sqrt{3} \left( \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} \right) \cos 2\varphi_{oc} - \\
& - \frac{3}{2} \cos 2\varphi_{oc} + \frac{3}{2} \left( \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \cos 2\varphi_{oc} = \\
& \quad = \frac{3}{8} \cos^3 2\varphi_{oc} - \frac{9}{8} \cos^2 2\varphi_{oc} - \frac{7}{8} \cos 2\varphi_{oc} + \frac{53}{72} = \\
& = \frac{1}{72} (27 \cos^3 2\varphi_{oc} - 81 \cos^2 2\varphi_{oc} - 63 \cos 2\varphi_{oc} + 53) = \\
& \quad = \frac{1}{72} ((3 \cos 2\varphi_{oc})^3 - 9(3 \cos 2\varphi_{oc})^2 - 21(3 \cos 2\varphi_{oc}) + 53) = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Относительно переменной  $x = 3 \cos 2\varphi_{oc}$  уравнение (4.12) является кубическим

$$x^3 - 9x^2 - 21x + 53 = 0. \tag{4.13}$$

Совершая в уравнении (4.13) подстановку  $x = 8y + 3$ , после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}
x^3 - 9x^2 - 21x + 53 &= (8y + 3)^3 - 9(8y + 3)^2 - 21(8y + 3) + 53 = \\
&= 512y^3 - 384y - 64 = 128(4y^3 - 3y - \frac{1}{2}) = 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

или

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = 4y^3 - 3y. \tag{4.15}$$

В соответствии с формулой

$$\cos \alpha = 4 \cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \tag{4.16}$$

корнями уравнения (4.15) будут:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right), \quad y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), \\
y_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Три указанных корня находятся также следующим образом. Как известно, корни кубического уравнения

$$y^3 + py + q = 0$$

при условии

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

вещественны и в тригонометрической форме определяются как

$$y = 2 \sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\gamma + 2n\pi}{3} \quad (n = 0, 1, 2),$$

где

$$\cos \gamma = -\frac{q}{2 \sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

В исследуемом нами случае

$$p = -\frac{3}{4}, \quad q = -\frac{1}{8},$$

следовательно,

$$\gamma = \frac{\pi}{3},$$

откуда корни рассматриваемого кубического уравнения (4.14) сразу же находятся в форме (4.17).

Из трех корней (4.17) решение исходной системы (4.1) дает только корень

$$y_3 = -\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right). \quad (4.18)$$

Но тогда справедливо соотношение

$$\cos 2\varphi_{oc} = -\frac{8}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1, \quad (4.19)$$

с помощью которого точно определяется угол  $\varphi_{oc}$ . Прямой подстановкой в систему (4.1) находим, что указанный угол определяется как

$$\varphi_{oc} = \pi - \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{8}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1\right) = 2,639596260... \text{ рад}. \quad (4.20)$$

Поскольку

$$\cos \varphi_{ob} = \frac{3 \cos 2\varphi_{oc} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-4 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1\right), \quad (4.21)$$

то угол  $\varphi_{ob}$  определяется как

$$\varphi_{ob} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-4 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1\right)\right) = 1,3935426177... \text{ рад}. \quad (4.22)$$

Сравнение с данными численных расчетов (3.9) указывает некоторое заметное расхождение в величине угла  $\varphi_{ob}$ .

Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вычисляются в виде

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) = \frac{1}{2} \left( 1 - 4 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \right), \\ \frac{b}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) = \frac{1}{6} \left( 3 - 4 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \right), \\ \frac{c}{\sqrt{3}k} &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( -\frac{8}{3} \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) + 1 \right)^2} = \\ &= -\frac{2}{3} \sqrt{\cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \left( -4 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) + 3 \right)}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Точные формулы для вычисления распределения напряжений в области  $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$  имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= k \frac{\sqrt{3}}{3} \left( 16 \cos^2 \left( \frac{4\pi}{9} \right) - 20 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) + 3 \right) = 0,0054822181\dots k, \\ \sigma_{22} &= -k \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \left( -1 + 2 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \right) = 0,5234987239\dots k, \\ \sigma_{12} &= k \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \left( -4 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) + 3 \right) \left( -1 + 2 \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) \right)} = \\ &= -0.9537275931\dots k.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Эти напряжения, как показывает сравнение с (3.10), были достаточно точно определены выше.

Таким образом, анализ напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом теле, если следовать схеме формальной статической определимости, выполняется точно.

## 5. Доказательство соотношения (3.12)

В этом разделе работы мы приводим строгое доказательство соотношения (3.12). Оказывается удобным сначала несколько преобразовать его<sup>9</sup>.

Прежде всего, на основании (4.16) находим

$$\cos^3 \left( \frac{4\pi}{9} \right) = \frac{3}{4} \cos \left( \frac{4\pi}{9} \right) - \frac{1}{8}.\tag{5.1}$$

Подставляя в

$$\varphi_{ob} - \theta + \psi = \frac{\pi}{2} \quad (\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc})\tag{5.2}$$

<sup>9</sup>Преобразования в этом разделе работы были выполнены с помощью Maple V.

значения углов из (4.22), (3.11) и пользуясь (4.23), получим

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+1\right)\right) - \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{8\sqrt{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}\sqrt{-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+3}\left(-1+2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)}{32\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)-28\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+3} - \\ & - \frac{1}{2} \arccos \frac{\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\left(\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k}\right)^2}}{\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k} + \sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k}\right)^2}} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Введем вспомогательные обозначения для углов

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+1\right)\right), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \operatorname{arctg} \frac{8\sqrt{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}\sqrt{-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+3}\left(-1+2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)}{32\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)-28\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+3} = \\ &= \arccos \frac{\left(8\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)-1\right)\sqrt{-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+3}}{\sqrt{3}\sqrt{4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+1}} = \\ &= \arcsin \left( -\frac{8}{3} \frac{\sqrt{3}\left(-1+2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)\sqrt{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}}{\sqrt{4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+1}} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем еще одно вспомогательное обозначение

$$m = \frac{\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\left(\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k}\right)^2}}{\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k} + \sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{2k}\right)^2}}.$$

В результате доказательство соотношения (3.12) можно заменить доказательством равенства

$$m = \cos(2\alpha - \beta). \quad (5.6)$$

Поскольку

$$\cos(2\alpha - \beta) = (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta,$$

то равенство (5.6) эквивалентно

$$m = \frac{\left(\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2/3\right) - 1\right) \sqrt{3}\left(8\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 1\right) \sqrt{-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3}}{3\sqrt{4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1}} - \frac{8\sqrt{6 + 24\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 48\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)}\left(-\frac{8}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{2}{3}\right)\left(-1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right) \sqrt{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}}{3\sqrt{4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1}}. \quad (5.7)$$

После возведения в квадрат последнего равенства остается только радикал вида

$$\sqrt{3\left(-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3\right)\left(6 + 24\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 48\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}. \quad (5.8)$$

Пользуясь формулой (5.1), находим

$$\begin{aligned} 3\left(-4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3\right)\left(6 + 24\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 48\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) &= \\ &= 576\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 558\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 90 = \\ &= \left(12\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 18\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 6\right)^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Квадратный корень, таким образом, извлекается точно.

На основании (5.1) имеем также

$$\frac{1}{4\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 1} = -\frac{16}{19}\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{4}{19}\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{11}{19}. \quad (5.10)$$

Еще раз используя (5.1), получим равенство

$$m^2 = -\frac{224}{57}\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{49}{57} - \frac{320}{57}\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right), \quad (5.11)$$

эквивалентное (5.6).

Рассмотрим далее величину

$$l = \frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{2k}.$$

Принимая во внимание формулы (4.23), находим

$$l = \frac{1}{4} \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{1}{4} \sqrt{3 + 8 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)}. \quad (5.12)$$

Возведем в квадрат обе части полученного равенства

$$l^2 = \frac{3}{8} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right) \sqrt{3} \sqrt{-16 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 8 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3}. \quad (5.13)$$

Так как

$$m = \frac{l - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - l^2}}{l + \sqrt{3} \sqrt{1 - l^2}}, \quad (5.14)$$

то

$$l^2(4 + 12m^2) = 9m^2 + 6m + 1. \quad (5.15)$$

Таким образом, необходимо доказать, что выполняется равенство (5.15), если  $l^2$  и  $m^2$  даны соответственно как (5.13) и (5.11).

На основании (5.11) имеем

$$4 + 12m^2 = \frac{272}{19} - \frac{896}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - \frac{1280}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \quad (5.16)$$

и

$$9m^2 + 6m + 1 = -\frac{672}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{166}{19} - \frac{960}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{2}{19} \sqrt{-12768 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2793 - 18240 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)}. \quad (5.17)$$

Обозначая

$$q_1 = -\frac{672}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{166}{19} - \frac{960}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right),$$

$$q_2 = \frac{2}{19} \sqrt{-12768 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2793 - 18240 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)},$$

имеем

$$9m^2 + 6m + 1 = q_1 + q_2.$$

Положив

$$w_1 = \frac{3}{8} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right),$$

$$w_2 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right) \sqrt{3} \sqrt{-16 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 8 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3},$$

имеем

$$l^2 = w_1 + w_2.$$

Пользуясь формулой (5.1), находим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{8} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right) \times \\ & \times \left( \frac{272}{19} - \frac{896}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - \frac{1280}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right) = \\ & = -\frac{672}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{166}{19} - \frac{960}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

и

$$\begin{aligned} & 3 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right)^2 \left( -16 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 8 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 3 \right) \times \\ & \times \left( \frac{272}{19} - \frac{896}{19} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - \frac{1280}{19} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right)^2 = \\ & = \left( \frac{2}{19} \right)^2 \left( -12768 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + 2793 - 18240 \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Следовательно,

$$w_1(4 + 12m^2) = q_1, \quad w_2^2(4 + 12m^2)^2 = q_2^2,$$

т.е. (5.15) выполняется, откуда заключаем, что соотношение (3.12) выполняется.

## Литература

- [1] Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
- [2] Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
- [3] Hutchinson, J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip / J.W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – P. 337-347.
- [4] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. школа, 1969. – 608 с.<sup>10</sup>
- [5] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.
- [6] Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
- [7] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Это последнее третье издание; второе издание: Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 396 с.

<sup>11</sup>Первое издание этой книги: Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с. Более ранний источник: Качанов, Л.М. Механика пластических сред / Л.М. Качанов. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 216 с.

- [8] Фрохт, М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений / М.М. Фрохт. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – Т. I. – 432 с.

Поступила в редакцию 31/*VIII*/2006;  
в окончательном варианте — 31/*VIII*/2006.

## EXACT FORMULAE FOR STRESS DISTRIBUTION NEAR A MODE I CRACK TIP IN A PERFECTLY PLASTIC SOLID UNDER PLANE STRESS CONDITIONS

© 2006 Y.N. Radayev<sup>12</sup>

The mathematical model proposed by Hutchinson of stress distribution near a mode I crack tip in a perfectly plastic solid under plane stress conditions is considered. Exact formulae for the stress distribution within the plastic zone near a crack tip are obtained. Comparison with the numerical data obtained by Hutchinson for the stress distribution is given.

Paper received 31/*VIII*/2006.  
Paper accepted 31/*VIII*/2006.

---

<sup>12</sup>Radayev Yuri Nickolaevich ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.