

ГРАДИЕНТНЫЕ КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

© 2007 М.Д. Новопашин, С.В. Сукнев¹

Введение

В настоящее время для оценки напряженного состояния массива горных пород широко используются методы, основанные на наблюдении первых признаков разрушения в области концентрации напряжений и последующем использовании известного решения упругой задачи [1–5]. Однако их применение возможно только в том случае, если известны локальные механические свойства материала в области концентрации напряжений. Их знание также необходимо при проектировании сооружений, поскольку именно зоны концентрации напряжений являются очагами зарождения трещин, развитие которых приводит в конечном итоге к потере несущей способности и разрушению конструкции. Используемые для этой цели критерии прочности и пластичности основаны на сопоставлении локальных напряжений в зоне их концентрации с механическими свойствами материала, которые определяют по результатам стандартных испытаний образцов. В то же время многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что механические свойства материала в зоне концентрации напряжений подвержены влиянию масштабного фактора и существенно отличаются от стандартных значений, определенных в условиях однородного напряженного состояния.

В лабораторных условиях масштабный эффект определяют либо при испытании геометрически подобных образцов, содержащих вырезы, либо при испытании образцов с различными вырезами, когда размеры этих вырезов малы по сравнению с постоянными размерами образца. Во время испытания следят за образованием трещины на контуре выреза и в момент ее появления фиксируют значение приложенной нагрузки. До момента появления трещины деформирование образца считают линейно-упругим. Локальный предел прочности рассчитывают путем умножения критического

¹Новопашин Михаил Дмитриевич, Сукнев Сергей Викторович, Институт горного дела Севера им. Н.В.Черского СО РАН, 677891, Россия, г. Якутск, пр. Ленина, 43.

значения приложенного напряжения на теоретический коэффициент концентрации напряжений, который определяют из решения задачи линейной упругости. Масштабный эффект оценивают либо путем сопоставления величины локальной прочности со стандартным пределом прочности, определенным в результате испытания образца без концентратора напряжений, либо путем сопоставления величины критического напряжения с ожидаемым значением, которое определяется как отношение стандартного предела прочности к теоретическому коэффициенту концентрации напряжений.

Durelli и Jacobson [6] исследовали концентрацию напряжений в двухмерных и трехмерных телах на моделях, которые отливали из водного раствора гипса в смеси с кварцевым порошком. Модели подвергали простому нагружению (растяжению, сжатию, изгибу, внутреннему давлению) и в момент разрушения определяли критическую нагрузку. Зная прочность хрупкого модельного материала на разрыв, определяли коэффициенты концентрации напряжений в телах. При испытании на одноосное растяжение пластин с круговыми отверстиями различного диаметра было обнаружено, что определенные по описанной выше методике коэффициенты концентрации напряжений значительно ниже теоретических значений, рассчитанных по формуле Хауленда (Howland) [7]. Величина локальной прочности, вычисленная с помощью той же теоретической формулы, оказалась выше стандартного предела прочности и зависящей от диаметра отверстия. Для малых отверстий превышение составило 100%. В связи с этим авторы пришли к выводу, что интерпретация результатов определения коэффициентов концентрации напряжений на хрупких моделях должна учитывать влияние градиента напряжений и размера образца. К выводу о необходимости учета градиентов напряжений пришли также Lajtai, Carter, Vascoul, Maso и многие другие авторы [8–17], исследовавшие процессы трещинообразования в образцах горных пород при сжатии.

Таким образом, механическое поведение горных пород при неравномерном распределении напряжений характеризуется существенной зависимостью локальной прочности от величины нагруженного объема (масштабный фактор). Наиболее сильно масштабный эффект проявляется в условиях концентрации напряжений. В отличие от случая растяжения, когда определяющую роль в разрушении конструктивного элемента играет катастрофическое распространение трещин отрыва, разрушение геоматериалов при сжатии связано с образованием, распространением и взаимодействием трещин двух видов: отрыва и сдвига. Очагами их зарождения являются дефекты структуры материала (включения, поры, микротрещины), вызывающие локальную концентрацию напряжений. В массиве горных пород роль концентраторов напряжений, вокруг которых формируется разрушение, играют пустоты (разломы, выработки и т.п.) природного и техногенного происхождения.

1. Критерии прочности

Традиционный подход к расчетам на прочность заключается в сопоставлении напряжений в массиве горных пород с их механическими свойствами, которые полагаются константами материала. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_e < \sigma_0, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad (1)$$

где σ_e — эквивалентное напряжение, определяемое видом критерия предельного состояния (разрушения), которому подчиняется материал в условиях однородного распределения напряжений; σ_0 — предельное значение эквивалентного напряжения, которое определяется экспериментально в условиях однородного распределения напряжений. Наступлению предельного состояния (образованию трещины) соответствует знак равенства в выражении (1), а критическое значение номинального напряжения в неповрежденной зоне определяется следующим образом:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t}, \quad (2)$$

где K_t — коэффициент концентрации напряжений, характеризующий отношение максимального значения эквивалентного напряжения σ_{\max} в наиболее напряженной точке породного массива к номинальному значению (рис. 1), связанному с величиной горного давления p в неповрежденной зоне. К примеру, если материал подчиняется условию прочности Кулона, то эквивалентное напряжение определяется выражением

$$\sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)(\mu^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{2}\mu(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (3)$$

где σ_1 и σ_3 — наибольшее и наименьшее главные напряжения соответственно; μ — коэффициент внутреннего трения материала, а σ_0 представляет собой прочность материала на сдвиг S_0 . Номинальное значение эквивалентного напряжения в этом случае выражается через величину приложенного давления p следующим образом:

$$\sigma = \frac{1}{2}p \left[(\mu^2 + 1)^{1/2} - \mu \right]. \quad (4)$$

Из выражения (2) следует, что при высоких значениях коэффициента концентрации напряжений критическое напряжение σ_c стремится к нулю (рис. 2, кривая 2). Это фактически означает, что процессы образования и распространения трещин в массиве горных пород должны происходить уже при бесконечно малых нагрузках и вести к глобальной неустойчивости породного массива, что, конечно, не соответствует действительности. В традиционных критериях прочности (трещинообразования) масштабный эффект не учитывается, поэтому в последнее время получили развитие так называемые нелокальные критерии прочности, в частности, критерий средних напряжений (ASC) [18–20]:

$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0, \quad (5)$$

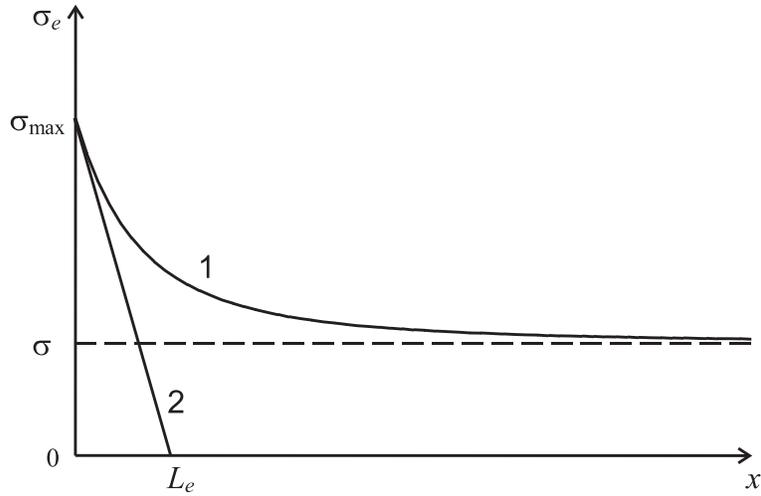


Рис. 1. Распределение эквивалентного напряжения по опасному сечению

где $\langle \sigma_e \rangle_d$ — усредненное на расстоянии d по опасному сечению значение эквивалентного напряжения:

$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_e(x) dx.$$

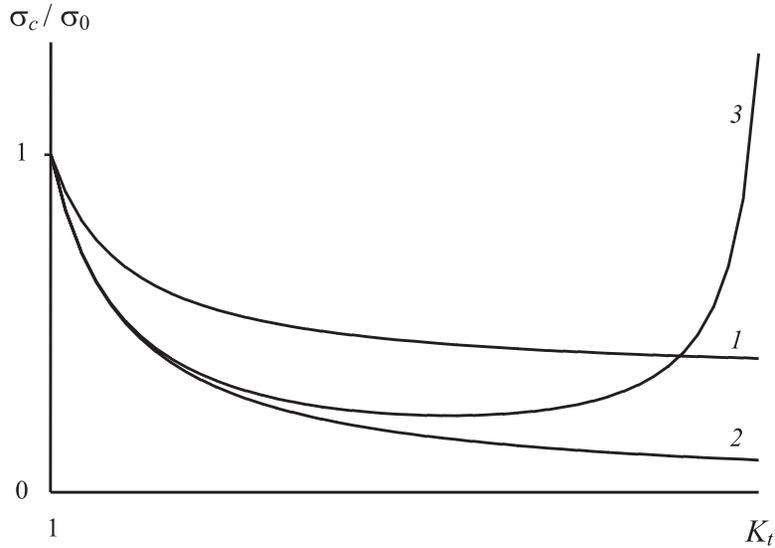


Рис. 2. Зависимость критического напряжения от коэффициента концентрации напряжений

Размер усреднения d полагают константой материала. Необходимость усреднения напряжений связывают с образованием зоны поврежденности

(предразрушения), в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны (приблизительно равный d) сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров выработки, полости, скважины и т.п.

Введение размерного параметра d в критерий прочности позволяет описать масштабный эффект, однако в некоторых случаях критерий средних напряжений предсказывает снижение прочности твердого тела при образовании в нем любого сколь угодно малого дефекта. Это не только ограничивает возможность применения критерия к породному массиву, но также не согласуется с современными представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью [21]. В силу этого обстоятельства малые дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность, пока их размеры не достигнут определенного, критического значения.

Применение критерия (5) требует выполнения процедуры интегрирования, что в ряде случаев вызывает определенные трудности. Для упрощения расчетов предлагалось вместо реального распределения напряжений использовать приближенное, например, линейное [9]. В этом случае интегрирование, по сути, заменяется вычислением напряжения σ_e в некоторой точке $x = d$, удаленной от точки максимума эквивалентного напряжения. Критерий прочности принимает вид

$$\sigma_e(d) < \sigma_0. \quad (6)$$

Параметр d полагается новой константой материала, вообще говоря, не совпадающей с аналогичным параметром в интегральном критерии. Для обоснования критерия (6) приводятся те же рассуждения о перераспределении напряжений в зоне предразрушения, что и для критерия (5). Ввиду малости d напряжения на границе зоны предразрушения считаются приблизительно равными напряжениям, полученным из решения линейно-упругой задачи. Для критерия (6) "используют название критерий прочности по напряжениям в точке" (point stress criterion) и обозначают PSC.

Рассмотрим концентратор напряжений, вблизи которого распределение эквивалентного напряжения $\sigma_e(x)$ по опасному сечению (рис. 1, кривая 1) приближенно будем считать линейным (рис. 1, прямая 2):

$$\sigma_e(x) = \sigma_{\max} + \left(\frac{d\sigma_e}{dx} \right)_{\max} x, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Здесь σ_{\max} и $\frac{d\sigma_e}{dx}$ вычисляются в точке концентрации напряжений $x = 0$. Критерий ASC с подынтегральной функцией (7) и областью интегрирования $[0; 2d]$ сводится к критерию PSC в точке $x = d$:

$$\sigma_{\max} \left(1 - \frac{d}{L_e} \right) < \sigma_0, \quad (8)$$

где

$$L_e = \frac{\sigma_{\max}}{\left| \frac{d\sigma_e}{dx} \right|_{\max}}.$$

Градиентный критерий (8) был предложен Lajtai [9]. При $d = 0$ критерий (8) переходит в традиционный критерий (1). В силу принятого допущения о линейном распределении напряжений область применения критерия Lajtai ограничена условием $d \ll L_e$. Данное условие выполняется либо для "мягких" концентраторов с $K_t \approx 1$, либо для концентраторов большого размера. В обоих случаях масштабный эффект является незначительным, поэтому они не представляют большого практического интереса, тем более, что погрешность экспериментального определения механических свойств материала может в этом случае оказаться сопоставимой с величиной масштабного эффекта, характеризуемой отношением d/L_e .

Расширение области применения критерия (8) может быть достигнуто только за счет отказа от исходной идеи об усреднении напряжений в пределах структурного элемента. Но и в этом случае остается ограничение $d < L_e$. Применение критерия в области $d \geq L_e$ не имеет физического смысла. Действительно, запишем выражение для критического значения номинального напряжения, при котором в соответствии с критерием (8) достигается предельное состояние:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t \left(1 - \frac{d}{L_e} \right)}. \quad (9)$$

На рис. 3 приведен график функции (9) в зависимости от отношения d/L_e . Физический смысл имеет лишь положительная ветвь функции, которая определена в области $0 \leq d/L_e < 1$.

Помимо ограничения, связанного с положительной определенностью функции (9), существует ограничение и другого рода. Оно связано с монотонным поведением критического напряжения, рассчитанного в соответствии с выражением (9), для дефектов одного размера, но с различным значением K_t (рис. 2, кривая 3). Отсюда следует вывод, что острые дефекты типа трещин не уменьшают, а, наоборот, повышают прочность материала. Такое поведение материала с открытыми трещинами экспериментально не подтверждается. Повышение критического напряжения возможно лишь в результате закрытия трещины при сжатии [11]. Заметим также, что указанная проблема не снимается даже в том случае, если вычислять $\sigma_e(x)$ не по приближенной формуле (7), а на основе точного решения соответствующей краевой задачи.

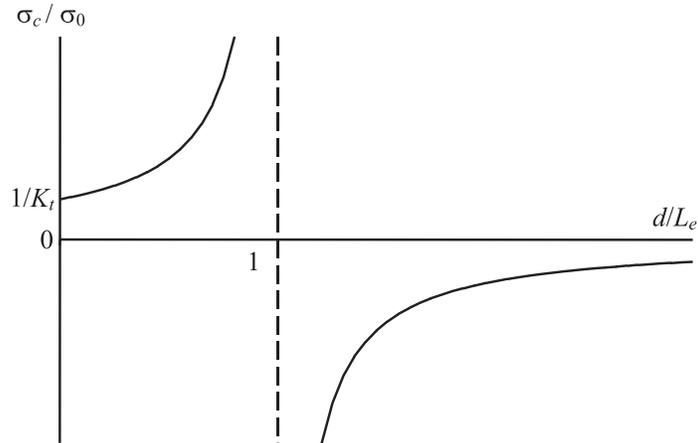


Рис. 3. Зависимость критического напряжения от масштабного параметра по критерию Lajtai

2. Градиентный подход

Для устранения недостатков, которыми обладают традиционные и нелокальные критерии, предлагается использовать градиентный подход [22], в соответствии с которым локальная прочность материала предполагается зависящей от размера зоны концентрации напряжений L_e . Если размер L_e достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала, то величина локальной прочности мало отличается от величины предельного напряжения σ_0 , определенной в условиях однородного распределения напряжений. Наоборот, если L_e сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится заметным. Причем это влияние тем больше, чем меньше размер L_e по отношению к характерному размеру структуры материала L_0 . Таким образом, локальная прочность материала зависит не просто от размера зоны концентрации напряжений L_e , а от соотношения L_0/L_e , которое характеризует масштаб в рассматриваемой задаче. С учетом этого условие локальной прочности можно представить в виде:

$$\sigma_e < f(\sigma_0, L_0/L_e). \quad (10)$$

Функция локальной прочности $f(\sigma_0, L_0/L_e)$ определяется с учетом дополнительных условий, отражающих специфику рассматриваемой задачи.

Рассмотрим применение градиентного подхода для оценки критического давления, соответствующего образованию сдвиговых трещин и трещин отрыва вокруг выработки эллиптического профиля. Линейно-упругое тело с эллиптическим вырезом, находящееся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации, подвержено на бесконечности одноосному сжатию (рис. 4). В области концентрации сжимающих напряжений

(точки А) образуются сдвиговые трещины, в области концентрации растягивающих напряжений (точки В) — трещины отрыва.

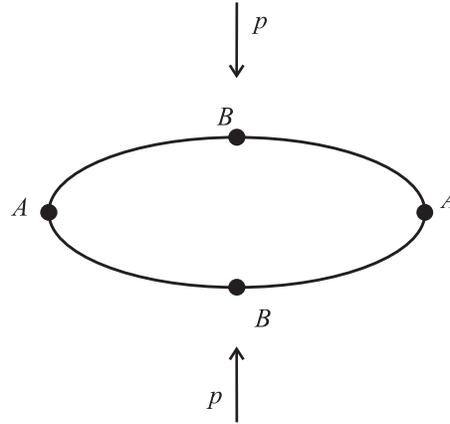


Рис. 4. Эллиптический вырез

3. Образование сдвиговых трещин

На продолжении оси y (ось x направлена вдоль линии приложения нагрузки, ось y — перпендикулярно к ней) нормальные напряжения σ_x и σ_y распределены следующим образом [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p \left(1 + 2 \frac{1+m}{\xi^2 - m} \right) - \sigma_y, \\ \sigma_y &= -p \frac{(1+m)(\xi^2 - 1)}{2(\xi^2 - m)^2} \left(1 - m + 2 \frac{\xi^2 - m^2}{\xi^2 - m} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\xi = \frac{|y|}{2R} + \sqrt{\left(\frac{y}{2R}\right)^2 - m}; \quad m = \frac{a-b}{a+b}; \quad R = \frac{a+b}{2}.$$

Контур эллипса с полуосями a и b задан уравнением:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1. \quad (12)$$

Начало координат выбрано в центре отверстия. Приложенное на бесконечности напряжение p принято в выражении (11) положительным. Концентрация напряжений имеет место на контуре выреза в точках А ($y = \pm a$):

$$\sigma_x = -p \frac{3+m}{1-m}; \quad \sigma_y = 0.$$

Коэффициент концентрации сжимающих напряжений определяется выражением

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}, \quad (13)$$

где $\rho = \frac{b^2}{a}$ — радиус кривизны эллиптического контура в точках А. Градиенты напряжений σ_x и σ_y в точках А равны:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\rho(1+m)(7+m)}{R(1-m)^3},$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\rho(1+m)(3+m)}{R(1-m)^3}.$$

Для рассматриваемой задачи сформулируем следующие требования к $f(\sigma_0, L_0/L_e)$:

— учет градиентов напряжений (градиентная гипотеза)

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 \left(1 + f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ijk})\right), \quad f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ijk}) = \text{inv}; \quad (14)$$

— связь с традиционными критериями

$$f(\sigma_0, 0) = \sigma_0; \quad (15)$$

— ограниченность критических напряжений

$$\frac{f(\sigma_0, L_0/L_e)}{K_t} \rightarrow \text{const}, \quad K_t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Здесь $f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ijk})$ — безразмерная функция компонент тензора напряжений и тензора градиентов напряжений, инвариантная относительно преобразований координат. Требование (14) связано с тем, что размер зоны концентрации напряжений зависит от характера распределения напряжений и, следовательно, от их градиентов. Требование (15) обеспечивает переход градиентного критерия в традиционный в случае однородного напряженного состояния. Требование (16) отражает известный экспериментальный факт: независимо от остроты дефекта и величины теоретического коэффициента концентрации напряжений процесс трещинообразования происходит при конечной нагрузке (рис. 2, кривая 1). Требованиям (14)–(16) отвечает функция

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 \left(1 + \sqrt{L_0/L_e}\right), \quad (17)$$

где

$$L_e = \frac{\sigma_e}{|\text{grad} \sigma_e|}.$$

При однородном распределении напряжений материал подчиняется критерию прочности Кулона. Эквивалентное напряжение определяется выражением (3), а номинальное напряжение — выражением (4). В условиях плоского напряженного состояния $\sigma_1 = |\sigma_x|$, $\sigma_3 = 0$. Размер L_e равен:

$$L_e = \frac{|\sigma_x|}{\left|\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\right|} = \frac{\rho}{2 + \frac{1}{K_t}},$$

где K_t определяется по формуле (13). С учетом (4) выражение для критического давления, при котором на контуре выработки эллиптического про-

филя возникают сдвиговые трещины, имеет вид:

$$p_c = 2S_0 \frac{1 + \sqrt{\frac{L_0}{\rho} \left(2 + \frac{1}{1 + 2\sqrt{a/\rho}} \right)}}{((\mu^2 + 1)^{1/2} - \mu)(1 + 2\sqrt{a/\rho})}. \quad (18)$$

В работе [10] приведены результаты экспериментального определения критического давления p_c в момент образования сдвиговых трещин на образцах из гипса, содержащих искусственные дефекты в виде цилиндрических отверстий. На рис. 5, а, б представлены экспериментальные значения p_c (точки) и результаты расчета по формуле (18) (сплошные кривые) для двух серий экспериментов. В первой серии (рис. 5, а) отверстия имели круговую форму различного диаметра $l = 2a$. Во второй серии (рис. 5, б) испытывались образцы с отверстиями эллиптической формы, большая ось которых была постоянна и направлена вдоль оси нагружения, а размер малой оси изменялся. Экспериментальные данные хорошо описываются зависимостью (18). Значение коэффициента внутреннего трения по результатам расчетов составило 0,37, а параметра структуры $L_0 = 2$ мм. Штриховые кривые на рис. 5, а, б рассчитаны без учета градиентов напряжений на основе традиционного критерия прочности по формуле (2).

4. Возникновение локальной текучести в металлах

Рассмотренный выше пример имеет большое значение не только для горных пород, но и для инженерных материалов и элементов конструкций, работающих как при сжатии, так и при растяжении. Остановимся подробнее на задаче о локальном пластическом течении элементов металлоконструкций с концентраторами напряжений.

В конструктивном элементе локальная текучесть возникает в точках максимальных растягивающих или сжимающих напряжений. В нашем примере (рис. 4) локальное течение материала начинается в точках концентрации сжимающих напряжений (точки А). В случае растяжения конструктивного элемента текучесть также начинается в точках А, но теперь они являются точками концентрации растягивающих напряжений. Поэтому и в том, и в другом случае для определения функции локальной прочности (текучести) мы можем воспользоваться выражением (17), (в случае растяжения следует поменять знаки в выражении (11)). При однородном распределении напряжений материал подчиняется критерию текучести Мизеса. Эквивалентное напряжение определяется выражением

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1},$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 — главные напряжения. Номинальное напряжение представляет собой приложенное на бесконечности растягивающее (или сжимающее) напряжение, а σ_0 в условии (1) — предел текучести материала. В условиях

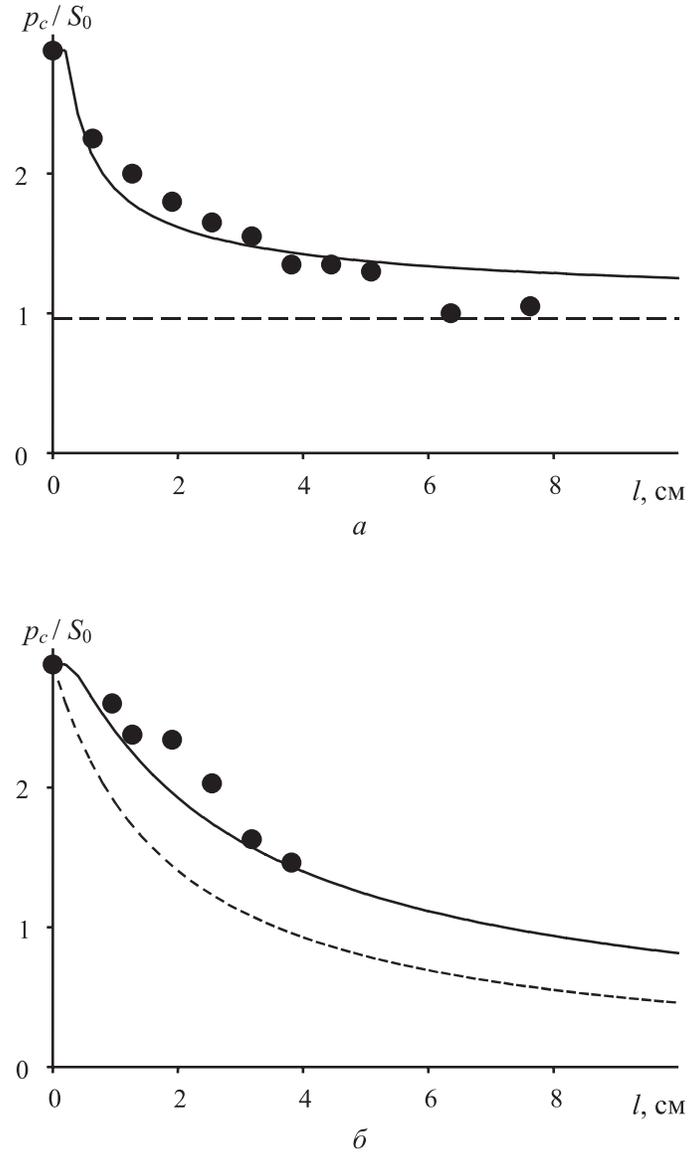


Рис. 5. Зависимость критического давления в момент образования сдвиговых трещин от размера кругового (а) и эллиптического (б) отверстий

плоского напряженного состояния $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = 0$. Эквивалентное напряжение и градиент эквивалентного напряжения $|\text{grad } \sigma_e|$ вычисляются по формулам

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y},$$

и

$$|\text{grad } \sigma_e| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2},$$

где g_x и g_y — компоненты вектора градиента интенсивности напряжений:

$$g_x = \frac{1}{\sigma_e} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \frac{\sigma_y}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right),$$

$$g_y = \frac{1}{\sigma_e} \left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\sigma_x}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\sigma_y}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right).$$

Размер L_e равен:

$$L_e = \frac{\sigma_e}{|\text{grad} \sigma_e|} = \frac{\rho}{2,5 + \frac{1}{K_t}},$$

где K_t определяется по формуле (13). В результате выражение для критического напряжения, при котором на контуре эллиптического выреза возникают зоны пластических деформаций, принимает вид:

$$\sigma_c = \sigma_0 \left(\frac{1}{K_t} + \sqrt{\frac{L_0}{4a} \left(2,5 + \frac{1}{K_t} \right) \left(1 - \frac{1}{K_t} \right)} \right). \quad (19)$$

Испытывались [24] пластины из низкоуглеродистой стали и алюминиевого сплава с центральными круговыми и эллиптическими отверстиями на одноосное растяжение. Варьировались радиус закругления в вершине отверстия при постоянном $a = 10$ мм. Момент наступления локальной текучести определялись с помощью метода голографической интерферометрии на основе анализа картины интерференционных полос в местах концентрации растягивающих напряжений. На рис. 6, *a*, *б* представлены экспериментальные данные (точки) и результаты расчета критического напряжения σ_c по формуле (19) (сплошные кривые) для стали (рис. 6, *a*) и сплава (рис. 6, *б*) в зависимости от коэффициента концентрации напряжений. В первом случае он изменялся от 0,625 до 10 мм, во втором — от 0,5 до 10 мм. Экспериментальные данные хорошо описываются зависимостью (19). Величина параметра структуры L_0 составила для стали и сплава 0,16 мм. Штриховые кривые — расчет по традиционному критерию без учета градиентов напряжений.

5. Образование трещин отрыва

На продолжении оси x нормальные напряжения σ_y распределены следующим образом [23]:

$$\sigma_y = p \frac{(1+m)^2}{2(\xi^2+m)^2} \left[\xi^2 + 1 - \frac{2\xi^2(\xi^2-1)}{\xi^2+m} \right], \quad (20)$$

где $\xi = \frac{|x|}{2R} + \sqrt{\left(\frac{x}{2R}\right)^2 + m}$; $m = \frac{a-b}{a+b}$; $R = \frac{a+b}{2}$. Контур эллипса с полуосями a и b задан уравнением (12). Приложенное на бесконечности напряжение p принято в выражении (20) положительным. На контуре выреза в точках

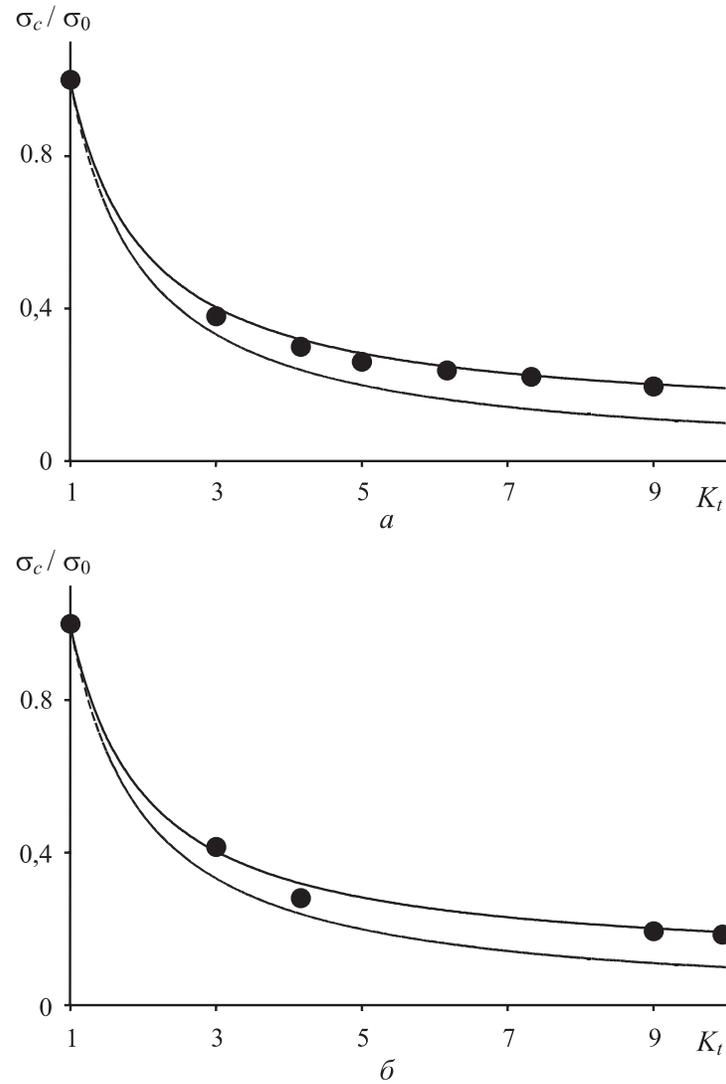


Рис. 6. Зависимость критического напряжения от коэффициента концентрации напряжений для стали (а) и сплава (б)

В напряжения σ_y максимальны и, как видно из формулы (20), не зависят от формы отверстия (точнее, от соотношения полуосей эллипса, характеризующегося величиной параметра m). Для любых эллиптических отверстий в точках B ($x = \pm b$) $\sigma_y = p$. В случае кругового контура ($m = 0$) распределение σ_y имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left(3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right) \quad (21)$$

и показано на рис. 7.

Градиент напряжений σ_y в точках B равен:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = -\frac{p}{a} \left(\frac{5-m}{1+m} \right).$$

При однородном распределении напряжений материал подчиняется критерию наибольших нормальных напряжений, поэтому эквивалентное напряжение $\sigma_e = \sigma_y$, а величина L_e определяется выражением

$$L_e = \frac{\sigma_y}{|\partial \sigma_y / \partial x|} = \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{\rho} \right)^{-1}, \quad (22)$$

где $\rho = \frac{a^2}{b}$ — радиус кривизны эллиптического контура в точках B . Для кругового контура ($\rho = a$) $L_e = a/5$, для узкой щели ($\rho \rightarrow \infty$) $L_e = a/2$.

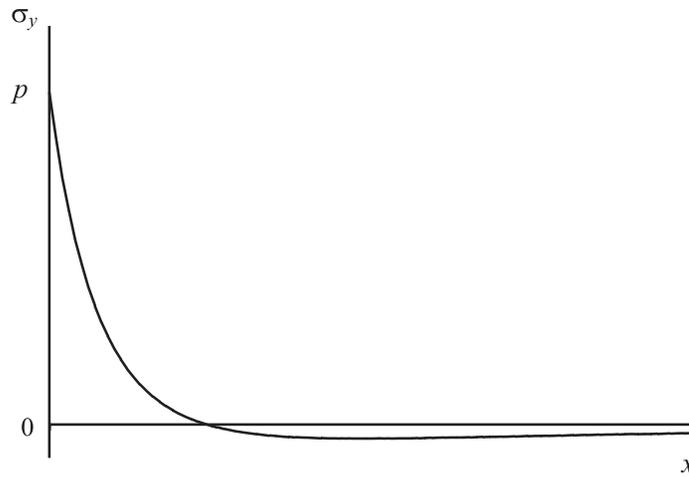


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений вдоль линии приложения нагрузки

Из выражений (20) и (21) следует, что номинальное напряжение на бесконечности обращается в нуль (рис. 7), поэтому в рассматриваемой задаче нельзя ввести коэффициент концентрации напряжений и использовать требование (16) для определения функции локальной прочности.

При больших L_e поле растягивающих напряжений в областях, примыкающих к точкам B , практически однородно, и образование трещин отрыва определяется прочностью материала на растяжение T_0 , т.е. $p_c = T_0$ при $L_e \rightarrow \infty$. При малых L_e неоднородность поля напряжений возрастает, а с ней увеличивается и критическое давление p_c . Однако его рост ограничен прочностью материала на сжатие C_0 . Это означает, что существует критическое значение размера зоны концентрации напряжений $L_e = L_c$, ниже которого трещины отрыва не образуются, причем $p_c = C_0$ при $L_e = L_c$. Очевидно, что если $C_0 \leq T_0$, то изолированные трещины отрыва в точках B не образуются ни при каких значениях L_e . В другом пределе $C_0 \gg T_0$

(идеально хрупкий материал) примем степенной (по Вейбуллу) закон изменения прочности материала в зависимости от размера зоны концентрации напряжений:

$$p_c = C_0 \left(\frac{L_c}{L_e} \right)^n, \quad L_e > L_c, \quad \frac{C_0}{T_0} \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где показатель степени n является характеристикой материала и определяется экспериментально.

Теперь для p_c можно записать общее выражение интерполяционного вида. Интерполирование будем производить в области значений параметра $1 \leq \frac{C_0}{T_0} < \infty$. С учетом выражений (14), (15) и (23) запишем:

$$p_c = C_0 \left[\frac{1}{C_0/T_0} + \left(\frac{L_c}{L_e} \right)^n \left(1 - \frac{1}{C_0/T_0} \right) \right], \quad L_e > L_c. \quad (24)$$

Если $L_e \leq L_c$, то $p_c = C_0$. Функция локальной прочности имеет вид:

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{L_0}{L_e} \right)^n \right), \quad (25)$$

где $\sigma_0 = T_0$ и $L_0 = L_c(C_0/T_0 - 1)^{1/n}$ — константы материала. Для геометрически подобных вырезов $L_c/L_e = l_c/l$, где $l = 2a$ — размер выреза; l_c — его критическое значение. В этих случаях выражение (24) характеризует снижение критического давления при увеличении размера выреза l , т.е. описывает масштабный эффект в условиях сжатия. Формулу (24) можно представить в виде

$$p_c = C_0 \left[\chi + \left(\frac{l_c}{l} \right)^n (1 - \chi) \right], \quad l > l_c, \quad (26)$$

где $\chi = T_0/C_0$ — параметр хрупкости, $0 \leq \chi \leq 1$. Carter, Lajtai и Yuan [13] испытывали на одноосное сжатие доломитовый известняк и поташ. Параметр χ для этих материалов равен 0,073 и 0,069 соответственно. Образцы имели круговые отверстия различного диаметра. Отношение ширины образца к диаметру отверстия было постоянным. Образование трещин отрыва регистрировали с помощью тензодатчиков, наклеенных в нескольких местах на лицевой поверхности образца, а также на внутренней поверхности отверстия. Результаты аналогичных экспериментов на образцах из гранита ($\chi = 0,063$) приведены в работе [15]. На рис. 8, а–в экспериментальные данные (точки) аппроксимированы зависимостью (26) с $n = 1$ (сплошные кривые). Критический размер l_c составил 3 мм для известняка и поташа и 2,5 мм для гранита. Штриховые прямые рассчитаны по традиционному критерию прочности. Экспериментальные данные демонстрируют существенный масштабный эффект, т.е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С уменьшением диаметра отверстия критическое давление увеличивается, достигая предела прочности на сжатие. С увеличением диаметра отверстия критическое давление асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение. Такое поведение хорошо описывается градиентным критерием. Величина параметра L_0 в функции локальной

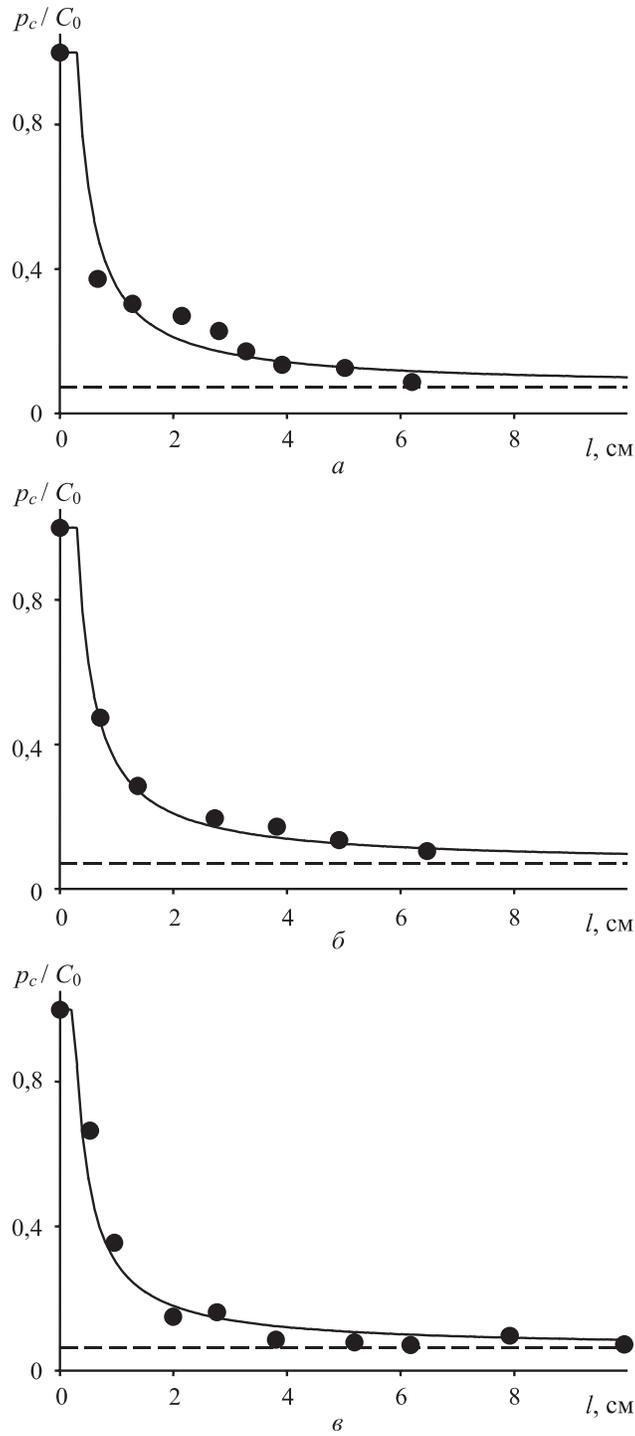


Рис. 8. Зависимость критического давления в момент образования трещин отрыва от диаметра отверстия: *a* — известняк; *б* — поташ; *в* — гранит

прочности составила 3,8 мм для известняка, 4 мм для поташа и 3,7 мм для гранита.

Используя условие геометрического подобия вырезов, запишем выражение для критического размера дефекта:

$$l_c = \frac{l}{L_e} L_c.$$

Дефекты, размеры которых не превышают критический, не оказывают влияния на прочность материала и не приводят к снижению критического давления по сравнению с прочностью материала на сжатие. Отношение l/L_e для вырезов различной формы можно определить из формулы (22). Например, для кругового выреза $l/L_e = 10$, для узкой щели $l/L_e = 4$. Таким образом, критический размер (диаметр) кругового отверстия l_c связан с критическим размером зоны концентрации напряжений L_c соотношением

$$l_c = 10L_c, \quad (27)$$

а критическая длина узкой щели — соотношением

$$l_c = 4L_c. \quad (28)$$

Зная величину L_c , по формуле (27) или (28) можно определить критический размер дефекта l_c соответствующей формы.

Из формул (27) и (28) следует, что величина критического размера дефекта в виде узкой щели в 2,5 раза меньше критического размера дефекта в виде кругового выреза. Экспериментальное определение этого соотношения может служить проверкой обоснованности использования величины относительного градиента напряжений для оценки размера L_e , а также применимости градиентного критерия в целом.

Lajtai [9] испытывал на одноосное сжатие образцы из гипса ($\chi = 0,167$) с центральным цилиндрическим отверстием. Внезапное образование трещин отрыва наблюдалось визуально. На рис. 9, *a*, *б* представлены экспериментальные данные (точки) и результаты расчета p_c по формуле (26) (сплошные кривые) для двух серий экспериментов. В первой серии (рис. 9, *a*) отверстия имели круговую форму различного диаметра. Во второй серии (рис. 9, *б*) испытывались образцы с отверстиями в виде узкой щели, ориентированной перпендикулярно к оси нагружения. Экспериментальные данные хорошо описываются зависимостью (26) с $n = 1$. Критический размер (диаметр) кругового отверстия составил 3 мм, а критическая длина узкой щели — 1,2 мм. Штриховые прямые на рис. 9, *a*, *б* рассчитаны по традиционному критерию прочности. Полученные значения критических размеров l_c полностью согласуются с выводом о соотношении критических размеров дефектов различной формы, сделанным выше. Таким образом, градиентный критерий (10) с функцией локальной прочности (25) хорошо описывает влияние не только размера (масштабный эффект), но и формы выреза на образование трещин отрыва в горных породах при сжатии. Экспериментальные данные Lajtai, полученные на образцах с вырезами различной

формы, описываются единым выражением (24), в котором размер зоны концентрации напряжений L_e рассчитывается по формуле (22), а критический размер $L_c = 0,3$ мм. Параметр L_0 в функции локальной прочности равен 1,5 мм.

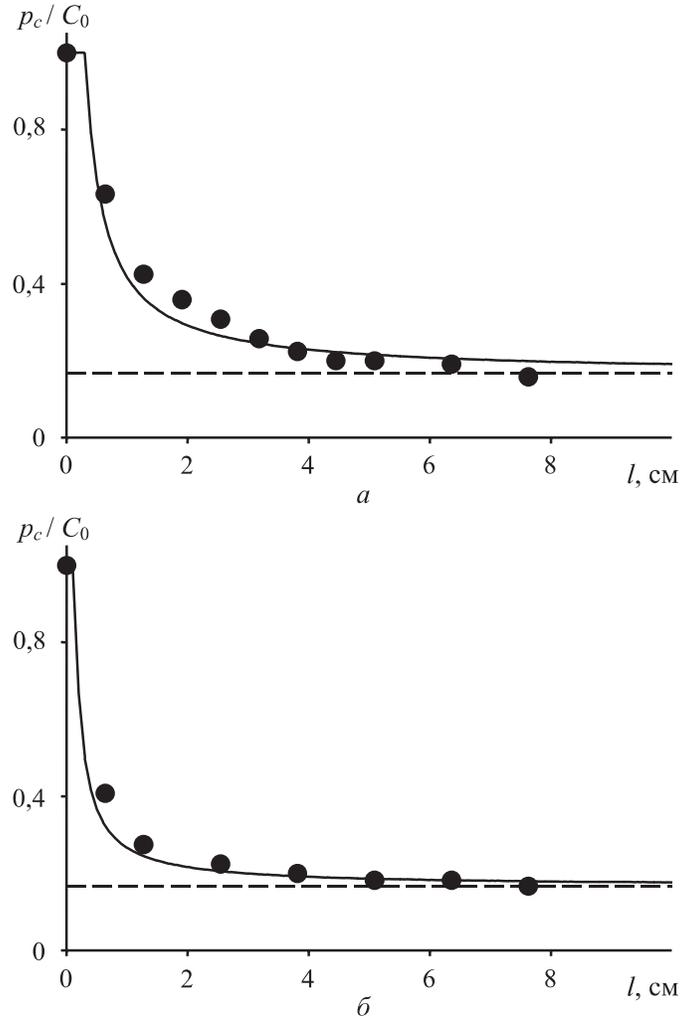


Рис. 9. Зависимость критического давления в момент образования трещин отрыва от размера кругового отверстия (a) и узкой щели (b)

Литература

- [1] Guenot, A. Borehole breakouts and stress fields / A. Guenot // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. – 1989. – Vol. 26. – No. 3/4. – P. 185–195.

- [2] Hayashi, K. In situ stress determination by hydraulic fracturing — a method employing an artificial notch / K. Hayashi, T. Ito, H. Abe // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* — 1989. — Vol. 26. — No. 3/4. — P. 197–202.
- [3] Hydraulic fracturing stress measurements: Special issue // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* — 1989. — Vol. 26. — No. 6.
- [4] Haimson, B.C. Scale effects in rock stress measurements / B.C. Haimson // *Scale effects in rock masses: Proc. 1st Int. Workshop on scale effects in rock masses (Loen, Norway, 7–8 June 1990).* — Rotterdam; Brookfield: Balkema, 1990. — P. 89–101.
- [5] Cuisiat, F.D. Scale effects in rock mass stress measurements / F.D. Cuisiat, B.C. Haimson // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* — 1992. — Vol. 29. — No. 2. — P. 99–117.
- [6] Durelli, A.J. Brittle-material failures as indicators of stress-concentration factors / A.J. Durelli, R.H. Jacobson // *Exp. Mech.* — 1962. — Vol. 2. — No. 3. — P. 65–74.
- [7] Howland, R.C.J. On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension / R.C.J. Howland // *Phil. Trans. Royal Soc. London. Ser. A.* — 1930. — Vol. 229. — P. 49–86.
- [8] Lajtai, E.Z. A theoretical and experimental evaluation of the Griffith theory of brittle fracture / E.Z. Lajtai // *Tectonophysics.* — 1971. — Vol. 11. — P. 129–156.
- [9] Lajtai, E.Z. Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation / E.Z. Lajtai // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 1972. — Vol. 9. — P. 569–578.
- [10] Nisetova, V. Fracture from compressive stress concentrations around elastic flaws / V. Nisetova, E.Z. Lajtai // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* — 1973. — Vol. 10. — P. 265–284.
- [11] Lajtai, E.Z. Brittle fracture in compression / E.Z. Lajtai // *Int. J. Fract.* — 1974. — Vol. 10. No. 4. — P. 525–536.
- [12] Carter, B.J. Primary and remote fracture around underground cavities / B.J. Carter, E.Z. Lajtai, A. Petukhov // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* — 1991. — Vol. 15. — No. 1. — P. 21–40.
- [13] Carter B.J. Tensile fracture from circular cavities loaded in compression / B.J. Carter, E.Z. Lajtai, Y. Yuan // *Int. J. Fract.* — 1992. — Vol. 57. — No. 3. — P. 221–236.
- [14] Carter, B.J. Size and stress gradient effects on fracture around cavities / B.J. Carter // *Rock Mech. and Rock Eng.* — 1992. — Vol. 25. — No. 3. — P. 167–186.
- [15] Yuan, Y.G. Fracture nucleation from a compression-parallel, finite-width elliptical flaw / Y.G. Yuan, E.Z. Lajtai, M.L. Ayari // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* — 1993. — Vol. 30. — No. 7. — P. 873–876.

- [16] Dzik, E.J. Primary fracture propagation from circular cavities loaded in compression / E.J. Dzik, E.Z. Lajtai // *Int. J. Fract.* – 1996. – Vol. 79. – No. 1. – P. 49–64.
- [17] Bascoul, A. Critere d'etat limite et gradient de deformation / A. Bascoul, J.C. Maso // *J. Mec. appl.* – 1980. – Vol. 4. – No. 2. – P. 197–223.
- [18] Нейбер, Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
- [19] Новожилов, В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В.В. Новожилов // *Прикл. математика и механика.* – 1969. – Т. 33. – Вып. 2. – С. 212–222.
- [20] Whitney, J.M. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations / J.M. Whitney, R.J. Nuismer // *J. Compos. Mater.* – 1974. – Vol. 8. – No. 4. – P. 253–265.
- [21] Shaw, M.C. A critical review of mechanical failure criteria / M.C. Shaw // *Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol.* – 1984. – Vol. 106. – No. 3. – P. 219–226.
- [22] Сукнев, С.В. Определение локальных механических свойств материалов / С.В. Сукнев, М.Д. Новопапин // *ДАН.* – 2000. – Т. 373. – №1. – С. 48–50.
- [23] Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.
- [24] Новопапин, М.Д. Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений / М.Д. Новопапин, С.В. Сукнев, А.М. Иванов. – Новосибирск: Наука, 1995. – 112 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.