

КРУЧЕНИЕ РАСТУЩЕГО ВАЛА¹

© 2007 М.Н.Михин²

В работе исследована задача кручения для стареющего вязкоупругого кругового вала. Рассмотрены два варианта постановки задачи. Проанализированы основные этапы деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста.

1. Постановка задачи.

Напряженно-деформированное состояние основного тела

Предположим, что в нулевой момент времени из стареющего вязкоупругого материала изготовлен круговой вал Π_1 с продольной выточкой. Поперечное сечение Ω_1 задается системой неравенств

$$x_1^2 + x_2^2 \geq b_1^2, \quad (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq a^2, \quad (b_1 < a).$$

Границу сечения Ω_1 обозначим L_1 .

До момента загрузки $\tau_0 \geq 0$ боковая поверхность вала свободна от напряжений. В момент приложения нагрузки τ_0 к торцам вала прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$, или же задается угол поворота торцевого сечения.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ к боковой поверхности вала начинается приток вещества. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены, и момент их изготовления совпадает с моментом изготовления основного тела. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq b^2(t), \quad (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq a^2, \quad (b(t) < a),$$

которая изменяется с течением времени, при этом $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$. Граница $L(t)$ сечения $\Omega(t)$ состоит из двух участков $L(t) = L^*(t) \cup L_o(t)$, где

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.В.Манжировым.

²Михин Михаил Николаевич (mmikhin@inbox.ru), кафедра высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107846, Россия, г. Москва, ул. Стромьнка, 20.

$L^*(t)$ — граница наращивания, контур, соответствующий малой окружности переменного радиуса $b(t)$, при этом $L^*(t) = L^*$ при $\tau < \tau_1$; $L_0(t)$ — граница, свободная от напряжений. Закон роста вала полностью задается функцией $b(t)$. Естественно, что $b(\tau_1) = b_1$.

Будем также считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание вала прекращается, и он занимает область $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$, имеющим границу $L_2 = L(\tau_2)$. К этому моменту поперечное сечение представляет собой пересечение двух кругов с радиусами a и b_2 .

Рассмотрим основные соотношения поставленной задачи на отрезке времени $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Имеем следующую краевую задачу [1–3]: уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0; \quad (1.1)$$

соотношения между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \quad (1.2)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= 2G(I + N_{\tau_0})\varepsilon_{13}, & \sigma_{23} &= 2G(I + N_{\tau_0})\varepsilon_{23}, \\ (I + N_{\tau_0})^{-1} &= (I - \mathcal{L}_{\tau_0}), & \mathcal{L}_s f(t) &= \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ K_1(t, \tau) &= G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau)]; \end{aligned} \quad (1.3)$$

краевое условие на боковой поверхности

$$(x_1, x_2) \in L_1 : \quad \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \quad (1.4)$$

Условие равновесия торцевого сечения Ω_1 под действием крутящего момента:

$$M(t) = \iint_{\Omega_1} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$ — единичный вектор внешней нормали боковой поверхности бруса, $G = G(t)$ — модуль упругомгновенной деформации при сдвиге, $K_1(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ — ядро ползучести и мера ползучести при сдвиге соответственно, I — тождественный оператор. Выше в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

Поддействуем оператором $(I - \mathcal{L}_{\tau_0})$ на выражения (1.1)–(1.5), содержащие напряжения σ_{13} , σ_{23} , предварительно разделив их на G . Тогда с учетом

обозначения $\sigma_{ij}^\circ = (I - \mathcal{L}_{\tau_0})\sigma_{ij}G^{-1}$ получим следующую краевую задачу [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}^\circ}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^\circ}{\partial x_2} &= 0; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\ \sigma_{13}^\circ &= 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^\circ = 2\varepsilon_{23}, \\ (x_1, x_2) \in L_1 : \sigma_{13}^\circ n_1 + \sigma_{23}^\circ n_2 &= 0, \\ M^\circ(t) &= \iint_{\Omega_1} (x_1 \sigma_{23}^\circ - x_2 \sigma_{13}^\circ) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $M^\circ = (I - \mathcal{L}_{\tau_0})MG^{-1}$.

В краевую задачу (1.6) в отличие от задачи (1.1)–(1.5) время входит параметрически, и она математически эквивалентна краевой задаче теории упругости с параметром t .

Для величин u_1 , u_2 , u_3 , σ_{13}° и σ_{23}° справедливы формулы [3–5]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\theta(t)x_2x_3, \quad u_2 = \theta(t)x_3x_1, \quad u_3 = \theta(t)\varphi(x_1, x_2, \tau_1), \\ \sigma_{13}^\circ &= \theta(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_1)}{\partial x_1} - x_2 \right], \quad \sigma_{23}^\circ = \theta(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_1)}{\partial x_2} + x_1 \right], \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ — угол закручивания (крутка), $\varphi(x_1, x_2, \tau_1)$ — функция кручения, которая является гармонической в области Ω_1 и значение ее нормальной производной на контуре L_1 удовлетворяет условию

$$(x_1, x_2) \in L_1 : \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_1)}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Таким образом, поставленная задача кручения вала приведена к задаче Неймана для функции $\varphi(x_1, x_2, \tau_1)$ в области Ω_1 (определение в области поперечного сечения Ω_1 гармонической функции $\varphi(x_1, x_2, \tau_1)$ по заданному значению ее нормальной производной на контуре L_1).

Для нахождения функции кручения уравнение контура L_1 приведем к виду $z\bar{z} = h(z) + \overline{h(z)}$. В этом случае искомая функция кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_1)$ является действительной частью функции $F(z, t) = ih(z)$.

Уравнение контура L_1 , которое получается пересечением двух кругов с радиусами a и b_1 ($b < a$)

$$\left((x_1 - a)^2 + x_2^2 - a^2 \right) \left(x_1^2 + x_2^2 - b_1^2 \right) = \left(x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 \right) \left(x_1^2 + x_2^2 - b_1^2 \right) = 0,$$

преобразуем в комплексную форму, сделав замену

$$x_1 = (z + \bar{z})/2, \quad x_2 = -i(z - \bar{z})/2.$$

В комплексной форме уравнение контура приводится к виду

$$z\bar{z} = a(z + \bar{z}) - a\bar{b}_1^2(1/z + 1/\bar{z}) + b_1^2,$$

и для комплексной функции напряжения будем иметь (несущественные для определения операторных напряжений константы опущены)

$$F(z, \tau_1) = iaz - iab_1^2/z.$$

Выражение $1/z$ допустимо и не содержит особенностей, т.к. точка $z = 0$ лежит вне поперечного сечения. Отделяя действительную часть, получим функцию кручения φ в виде

$$\varphi(x_1, x_2, \tau_1) = -ax_2 - \frac{ab_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (1.7)$$

В рассматриваемой задаче возможны два варианта постановки:

1. Задан момент $M(t)$, а требуется определить напряжения σ_{ij} , перемещения u_i и крутку $\theta(t)$.

2. Задана крутка $\theta(t)$, а требуется определить σ_{ij} , u_i и момент $M(t)$.

Если задана крутка $\theta(t)$, то находим величины u_i , σ_{13}° и σ_{23}°

$$u_1 = -\theta(t)x_2x_3, \quad u_2 = \theta(t)x_1x_3, \quad u_3 = -\theta(t)\left(ax_2 + \frac{ab_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)x_1x_2,$$

$$\sigma_{13}^\circ = \theta(t)\left[\frac{2ab_1^2 x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2\right], \quad \sigma_{23}^\circ = \theta(t)\left[-\frac{2ab_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a\right].$$

Используя формулу обращения

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = G(t)\left[\sigma_{ij}^\circ(x_1, x_2, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma_{ij}^\circ(x_1, x_2, \tau)R_1(t, \tau)d\tau\right],$$

получим истинные напряжения

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, t) = \left(\frac{2ab_1^2 x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2\right)G(t)\left[\theta(t) + \int_{\tau_0}^t \theta(\tau)R_1(t, \tau)d\tau\right],$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, t) = \left(-\frac{2ab_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a\right)G(t)\left[\theta(t) + \int_{\tau_0}^t \theta(\tau)R_1(t, \tau)d\tau\right],$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$. И, наконец, определим $M(t)$ на основании первой формулы из (1.5).

При заданном моменте $M(t)$ поступим следующим образом. Сначала находим $M^\circ(t)$ по формуле $M^\circ(t) = (I - \mathcal{L}_{\tau_0})MG^{-1}$, затем находим крутку $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{M^\circ(t)}{2a^2 D_1(\tau_1)}, \quad D_1(\tau_1) = \frac{1}{24}(\sin 4\alpha_1 + 8 \sin 2\alpha_1 + 12\alpha_1) -$$

$$-\frac{b_1^2}{2a^2}(\sin 2\alpha_1 + 2\alpha_1) + \frac{4b_1^3}{3a^3} \sin \alpha_1 - \frac{b_1^4}{4a^4} \alpha_1, \quad \frac{b_1}{a} = 2 \cos \alpha_1.$$

Теперь перемещения находим по формулам

$$u_1 = -\theta(t)x_2x_3, \quad u_2 = \theta(t)x_1x_3, \quad u_3 = -\theta(t)\left(ax_2 + \frac{ab_1^2x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)x_1x_2,$$

а величины σ_{13}° и σ_{23}° — по формулам

$$\sigma_{13}^\circ = \frac{M^\circ(t)}{2a^2D_1} \left[\frac{2ab_1^2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right], \quad \sigma_{23}^\circ = \frac{M^\circ(t)}{2a^2D_1} \left[-\frac{2ab_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right].$$

Используя формулу обращения, получим истинные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(x_1, x_2, t) &= \frac{G(t)}{2a^2D_1} \left(\frac{2ab_1^2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right) \left[M^\circ(t) + \int_{\tau_0}^t M^\circ(\tau)R_1(t, \tau)d\tau \right] = \\ &= \frac{M(t)}{2a^2D_1} \left(\frac{2ab_1^2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right), \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, t) &= \frac{G(t)}{2a^2D_1} \left(-\frac{2ab_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right) \left[M^\circ(t) + \int_{\tau_0}^t M^\circ(\tau)R_1(t, \tau)d\tau \right] = \\ &= \frac{M(t)}{2a^2D_1} \left(-\frac{2ab_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right). \end{aligned}$$

Таким образом, задача кручения растущего вала на этапе, предшествующем его наращиванию, исследована.

2. Начально-краевая задача для непрерывно растущего тела

Рассмотрим отрезок времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Тогда начально-краевая задача для растущего вала имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} &= 0; \\ D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right); \\ \sigma_{13} &= 2G(I + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2G(I + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})\varepsilon_{23}, \\ \tau_0(x_1, x_2) &= \begin{cases} \tau_0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ \tau^*(x_1, x_2) & \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega^*(t), \end{cases} \\ (x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 &= 0 \\ (x_1, x_2) \in L^*(t) : \sigma_{13} &= \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^*, \\ \sigma_{13}^*n_1 + \sigma_{23}^*n_2 &= 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)); \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2; \quad (2.2)$$

где $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ — скорости перемещений, $D_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$ — скорости деформаций, $\Omega^*(t) = \Omega(t) \setminus \Omega_1$ — образовавшаяся в процессе наращивания часть тела (дополнительное тело), $\sigma_{ij}^*(x_1, x_2) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ — компоненты задаваемого на $L^*(t)$ полного тензора напряжений, оператор $(I - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})$ и обратный к нему оператор $(I + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})$ определяются из (1.3) заменой τ_0 на $\tau_0(x_1, x_2)$.

Соотношения (2.1)–(2.2) представляют собой общую безынерционную начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела. Как показывают соотношения (2.1), исследуемый процесс наращивания новыми элементами в общем случае приводит к определяющим соотношениям, содержащим разрывы на поверхности раздела основного и дополнительных тел.

Преобразуем начально-краевую задачу для непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела к задаче с параметром времени, по форме совпадающей с краевой задачей теории упругости. На первом этапе преобразуем задачу наращивания вязкоупругого вала к задаче наращивания упругого тела, описываемого законом Гука.

Для этого представим уравнение растущей границы $L^*(t)$ в форме

$$(x_1, x_2) \in L^*(t) : t - \tau^*(x_1, x_2) = 0,$$

где $t - \tau^*(x_1, x_2) \geq 0$ при $(x_1, x_2) \in \Omega(t)$ и $t - \tau^*(x_1, x_2) < 0$ при $(x_1, x_2) \notin \Omega(t)$. Кроме того, $\tau^*(x_1, x_2)$ — достаточно гладкая функция, такая, что $\nabla \tau^*(x_1, x_2) \neq 0$ при $t - \tau^*(x_1, x_2) = 0$ (т.е. на границе роста нет особых точек). Введем характеристическую функцию $\theta(t - \tau^*(x_1, x_2))$, равную единице в случае, когда ее аргумент больше либо равен нулю, и равную нулю при отрицательном аргументе [6]. Очевидно, что функция $\theta(t - \tau^*(x_1, x_2))$ равна единице всюду в точках растущего тела и равна нулю всюду вне его. В частности, функция $\theta(\tau_1 - \tau^*(x_1, x_2))$ равна единице в точках основного тела и нулю — всюду вне его.

Теперь при помощи функции $\theta(\tau_1 - \tau^*(x_1, x_2))$ оператор $(I - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (I - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})f(t) &= (I - \mathcal{L}_{\tau^0(x_1, x_2)})f(t) - \theta(\tau_1 - \tau^*(x_1, x_2))\mathcal{L}_{\tau_0}^{\tau_1}f(t), \\ \mathcal{L}_{\tau_0}^{\tau_1}f(t) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ \tau^0(x_1, x_2) &= \theta(\tau_1 - \tau^*(x_1, x_2))[\tau_1 - \tau^*(x_1, x_2)] + \tau^*(x_1, x_2), \end{aligned}$$

причем $\tau^*(x_1, x_2) = \tau_1$ при $(x_1, x_2) \in L^*(\tau_1)$.

Поддействуем оператором $(I - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})$ на соотношения (2.1)–(2.2), содержащие напряжения σ_{12} , σ_{13} , предварительно разделив на G . Тогда, учиты-

вая обозначение $\sigma_{ij}^\circ = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})\sigma_{ij}G^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{13}^\circ}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}^\circ}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}^\circ}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^\circ}{\partial x_2} = 0; \\
D_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad D_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \\
D_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0, \\
D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right); \\
\sigma_{13}^\circ &= 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^\circ = 2\varepsilon_{23}; \\
(x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : \sigma_{13}^\circ n_1 + \sigma_{23}^\circ n_2 &= 0; \\
(x_1, x_2) \in L^*(t) : \sigma_{13}^\circ &= \sigma_{13}^{\circ*} = \sigma_{13}^* G^{-1}, \quad \sigma_{23}^\circ = \sigma_{23}^{\circ*} = \sigma_{23}^* G^{-1}, \\
&\sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0, \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)); \\
M^\circ(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23}^\circ - x_2 \sigma_{13}^\circ) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Преобразуем начально-краевую задачу (2.3) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по t уравнения равновесия, уравнения состояния и краевое условие на неподвижной границе $L_\sigma(t)$. Для вывода граничного условия на границе роста $L^*(t)$ достаточно подействовать оператором дивергенции на начально-краевое условие на растущей границе.

В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} &= 0; \\
D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right); \\
S_{13} &= 2D_{13}, \quad S_{23} = 2D_{23}; \\
(x_1, x_2) \in L(t) : S_{13} n_1 + S_{23} n_2 &= 0; \\
\frac{dM^\circ(t)}{dt} &= \iint_{\Omega(t)} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $S_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\circ}{\partial t}$.

Легко видеть, что формулы для скоростей перемещений v_1 , v_2 , v_3 и ве-

личин S_{13} и S_{23} имеют следующую структуру:

$$v_1 = -\theta'_t(t)x_2x_3, \quad v_2 = \theta'_t(t)x_3x_1, \quad v_3 = \theta'_t(t)\varphi(x_1, x_2, t),$$

$$S_{13} = \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - x_2 \right], \quad S_{23} = \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + x_1 \right].$$

При этом функцию кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$ можно найти из следующей краевой задачи Неймана

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0, \\ (x_1, x_2) \in L(t) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Функция кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$ имеет вид, аналогичный (1.7), ее можно получить формальной заменой b_1 и τ_1 функции кручения φ на $b(t)$ и t

$$\varphi(x_1, x_2, t) = -ax_2 - \frac{ab^2(t)x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Если задана крутка $\theta(t)$, то, вычислив производную $\theta'(t)$, находим скорости перемещений v_i и величины S_{13} и S_{23} :

$$v_1 = -\theta'_t(t)x_2x_3, \quad v_2 = \theta'_t(t)x_1x_3, \quad v_3 = -\theta'_t(t) \left(ax_2 + \frac{ab^2(t)x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) x_1x_2, \\ S_{13} = \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - x_2 \right] = \theta'_t(t) \left[\frac{2ab^2(t)x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right], \\ S_{23} = \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + x_1 \right] = \theta'_t(t) \left[-\frac{2ab^2(t)(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right]. \quad (2.5)$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по следующим формулам:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = G(t) \left\{ \frac{\sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2))}{G(\tau_0(x_1, x_2))} \left[1 + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \varsigma) d\varsigma R_{ij}(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \quad (2.6) \\ u_i(x_1, x_2, t) = u_i(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2)) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t v_i(x_1, x_2, \tau) d\tau.$$

И наконец, определим $M(t)$ на основании (2.2).

При заданном моменте $M(t)$ поступим следующим образом. Сначала находим $\frac{dM^\circ(t)}{dt}$ по формуле

$$\frac{dM^\circ(t)}{dt} = \frac{M'_t(t)}{G(t)} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \frac{\partial M(t)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau + M(\tau_0(x_1, x_2)) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(x_1, x_2))}{\partial t}.$$

Затем находим скорость крутки $\theta'(t)$

$$\theta'_t(t) = \frac{1}{2a^2 D_1(t)} \frac{M^\circ(t)}{dt}, \quad D_1(t) = \frac{1}{24} (\sin 4\alpha(t) + 8 \sin 2\alpha(t) + 12\alpha(t)) - \\ - \frac{b^2(t)}{2a^2} (\sin 2\alpha(t) + 2\alpha(t)) + \frac{4b^3(t)}{3a^3} \sin \alpha(t) - \frac{b^4(t)}{4a^4} \alpha(t), \quad \frac{b(t)}{a} = 2 \cos \alpha(t).$$

Скорость перемещений v_i находим по формулам (2.5), а величины S_{13} и S_{23} находим по формулам

$$S_{13} = \frac{1}{2a^2 D_1(t)} \left[\frac{2ab^2(t)x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right] \frac{dM^\circ(t)}{dt}, \\ S_{23} = \frac{1}{2a^2 D_1(t)} \left[-\frac{2ab^2(t)(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right] \frac{dM^\circ(t)}{dt}.$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по формулам (2.6), а крутку находим по формуле

$$\theta(t) = \theta(\tau_0(x_1, x_2)) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \theta'_\tau(\tau) d\tau.$$

Таким образом, задача кручения растущего бруса на этапе его непрерывного наращивания исследована.

3. Деформирование вала после остановки наращивания

Пусть в момент времени τ_2 наращивание вала прекращается. В этот момент он занимает область Π_2 с поперечным сечением Ω_2 , ограниченным контуром L_2 , который представляет собой пересечение двух кругов с радиусами a и b_2 . В этом случае краевая задача имеет вид ($t \geq \tau_2$)

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0; \\ D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{13} = 2G(I + N_{\tau_0(x_1, x_2)}) \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(I + N_{\tau_0(x_1, x_2)}) \varepsilon_{23}; \quad (3.1) \\ (x_1, x_2) \in L_2 : \quad \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0;$$

$$M(t) = \iint_{\Omega_2} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2.$$

Аналогично проделанному ранее можно получить следующую краевую

задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} &= 0; \\ D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\ S_{13} &= 2D_{13}, \quad S_{23} = 2D_{23}; \\ (x_1, x_2) \in L_2 : S_{13}n_1 + S_{23}n_2 &= 0; \\ \frac{dM^\circ(t)}{dt} &= \iint_{\Omega_2} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

При этом функцию кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_2)$ можно найти из следующей краевой задачи Неймана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_2^2} &= 0, \\ (x_1, x_2) \in L_2 : \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= x_2 n_1 - x_1 n_2.\end{aligned}$$

Скорость перемещений v_1, v_2, v_3 и скорость операторных напряжений S_{13} и S_{23} имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}v_1 &= -\theta'_t(t)x_2x_3, \quad v_2 = \theta'_t(t)x_1x_3, \quad v_3 = \theta'_t(t)\varphi(x_1, x_2, \tau_2), \\ S_{13} &= \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_1} - x_2 \right], \quad S_{23} = \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_2} + x_1 \right].\end{aligned}\tag{3.2}$$

Функция кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_2)$ имеет вид, аналогичный (1.7), ее можно получить формальной заменой b_1 и τ_1 функции кручения φ на b_2 и τ_2

$$\varphi(x_1, x_2, \tau_2) = -ax_2 - \frac{ab_2^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Если задана крутка $\theta(t)$, то, вычислив производную $\theta'(t)$, находим скорости перемещений v_i и величины S_{13} и S_{23} :

$$\begin{aligned}v_1 &= -\theta'_t(t)x_2x_3, \quad v_2 = \theta'_t(t)x_1x_3, \quad v_3 = \theta'_t(t) \left(ax_2 + \frac{ab_2^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) x_1x_2, \\ S_{13} &= \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_1} - x_2 \right] = \theta'_t(t) \left[\frac{2ab_2^2 x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right], \\ S_{23} &= \theta'_t(t) \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \tau_2)}{\partial x_2} + x_1 \right] = \theta'_t(t) \left[-\frac{2ab_2^2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right].\end{aligned}$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по формулам (2.6), а момент $M(t)$ находим на основании последней формулы задачи (3.1).

При заданном моменте $M(t)$ поступим следующим образом. Сначала находим $\frac{dM^\circ(t)}{dt}$, затем скорость крутки $\theta'(t)$

$$\theta'_t(t) = \frac{1}{2a^2 D_1(\tau_2)} \frac{M^\circ(t)}{dt}, \quad D_1(\tau_2) = \frac{1}{24} (\sin 4\alpha_2 + 8 \sin 2\alpha_2 + 12\alpha_2) - \\ - \frac{b_2^2}{2a^2} (\sin 2\alpha_2 + 2\alpha_2) + \frac{4b_2^3}{3a^3} \sin \alpha_2 - \frac{b_2^4}{4a^4} \alpha_2, \quad \frac{b_2}{a} = 2 \cos \alpha_2.$$

Скорость перемещений v_i находим по формулам (3.2), а величины S_{13} и S_{23} находим по формулам

$$S_{13} = \frac{1}{2a^2 D_1(\tau_2)} \left[\frac{2ab_2^2 x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - x_2 \right] \frac{dM^\circ(t)}{dt}, \\ S_{23} = \frac{1}{2a^2 D_1(\tau_2)} \left[-\frac{2ab_2^2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + x_1 - a \right] \frac{dM^\circ(t)}{dt}.$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по формулам (2.6), а крутку находим по формуле

$$\theta(t) = \theta(\tau_2) + \int_{\tau_2}^t \theta'_\tau(\tau) d\tau.$$

Таким образом, решение задачи полностью завершено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№.05-01-00693).

Литература

- [1] Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи механики растущих тел / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров, В.Э. Наумов. – М.: Наука, 1991. – 176 с.
- [2] Манжиров, А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела / А.В. Манжиров // ПММ. – 1995. – Т. 59. – Вып. 5. – С. 836–848.
- [3] Манжиров, А.В. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел / А.В. Манжиров, М.Н. Михин // Вестник Самарского госуниверситета. Естественная серия. – 2004. – №4(34). – С. 82–98.
- [4] Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Изд во АН СССР, 1954. – 647 с.
- [5] Арутюнян, Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.

- [6] Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958. — 439 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.

TORSION OF GROWING SHAFTS³

© 2007 M.N. Mikhin⁴

In the paper the theory of torsion problem of aging viscoelastic round shafts is studied. Two methods for problem setting are considered. The main stages of solid deformation are analyzed: before the beginning of growing, during the process and after the growing stage.

Paper received 15/V/2007.
Paper accepted 15/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.V. Manzhurov.

⁴Mikhin Mikhail Nickolayevich (mmikhin@inbox.ru), Dept. of Higher Mathematics, Moscow State University of Engineering and Computer Science, Moscow, 107846, Russia.