

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ НАРАЩИВАЕМЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ

© 2007 А.В. Манжиров<sup>1</sup> Д.А. Паршин<sup>2</sup>

Многие актуальные прикладные задачи техники, технологии, строительства, биологии, медицины, а также других областей естествознания приводят к необходимости построения изменяющихся во времени полей напряжений и перемещений в растущих (наращиваемых) конических телах. Конкретными примерами таких тел могут служить различные валы, опоры, колонны, кости, мягкие биологические ткани. В работе исследуется квазистатический процесс деформирования наращиваемых вязкоупругих стареющих конических тел под действием переменных торцевых нагрузок. Рассматривается случай растяжения–сжатия. Дается общая постановка проблемы, обсуждаются основные соотношения, возникающие на разных этапах процесса. Ставятся соответствующие краевые задачи. Строятся их замкнутые решения.

### 1. Общая постановка задачи

Пусть имеется коническое тело вращения, длина  $l$  которого значительно превышает поперечные размеры. Оно выполнено из изотропного однородно стареющего линейно вязкоупругого материала, момент зарождения которого примем за начало отсчета времени  $t$ . В момент  $t = t_0$  к торцам этого тела прикладывается некоторая нагрузка, которая во все моменты времени  $t \geq t_0$  статически эквивалентна осевым силам, действующим в центральных точках торцов и изменяющимся со временем по известному закону  $P(t)$ . Положительной будем считать величину растягивающей торцевой силы.

Спустя некоторое время после приложения нагрузки, в момент  $t = t_1$ , начинается процесс постепенного осесимметричного утолщения рассматриваемого тела путем добавления к его боковой поверхности изначально свободного от напряжений дополнительного материала. Утолщение происходит

---

<sup>1</sup>Манжиров Александр Владимирович ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)), лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики Российской академии наук, проспект Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526, Россия.

<sup>2</sup>Паршин Дмитрий Александрович ([parshin@ipmnet.ru](mailto:parshin@ipmnet.ru)), лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики Российской академии наук.

таким образом, что в каждый момент времени наращиваемое тело сохраняет форму прямого кругового усеченного конуса длины  $l$ . Этот процесс протекает кусочно-непрерывно во времени, то есть состоит из  $N$  разделенных произвольными по длительности паузами последовательных этапов непрерывного наращивания  $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ), на протяжении которых за каждый бесконечно малый промежуток времени к телу присоединяется бесконечно тонкий слой материала. Добавляемый материал считается идентичным исходному. Во время пауз приток дополнительного материала к телу отсутствует и его боковая поверхность свободна от напряжений. В процессе кусочно-непрерывного наращивания и после его окончания на торцевые поверхности конуса продолжают действовать переменные во времени центральные осевые силы  $P(t)$ .

Исследуем эволюцию напряженно-деформированного состояния рассматриваемого конического тела в заданных условиях нагружения до начала, во время и по завершении описанного процесса наращивания. При этом процесс деформирования будем считать квазистатическим, а развивающиеся в течение него деформации — малыми.

## 2. Уравнение состояния и основные обозначения

Изменение геометрии рассматриваемого конического тела вследствие его кусочно-непрерывного наращивания полностью определяется, очевидно, заданием законов увеличения во времени радиусов его торцов. Обозначим их через  $a(t)$  и  $b(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Функции  $a(t)$  и  $b(t)$  являются непрерывными, неубывающими и постоянными вне промежутков  $[t_{2k-1}, t_{2k})$  непрерывного утолщения конуса.

Уравнение состояния материала возьмем в форме [1]

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}^{-1} \left[ 2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau_0(\mathbf{r})$  — момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{E}$  — тензоры напряжений и малой деформации, считающиеся непрерывными справа по времени,  $\mathbf{1}$  — единичный тензор второго ранга;  $\varkappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ , где  $\nu = \text{const}$  — коэффициент Пуассона. Линейный оператор  $\mathcal{H}_s$  с вещественным параметром  $s \geq 0$  и обратный к нему оператор  $\mathcal{H}_s^{-1}$  представляются в виде

$$\mathcal{H}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)G(t)^{-1}, \quad \mathcal{H}_s^{-1} = G(t)(\mathcal{I} + \mathcal{N}_s),$$

где  $G(t)$  — упругий модуль сдвига;  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор,

$$\mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau,$$

$$K(t, \tau) = G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau),$$

$K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  — ядра ползучести и релаксации,  $\Delta(t, \tau)$  и  $\omega(t, \tau)$  — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге ( $t \geq \tau \geq 0$ ).

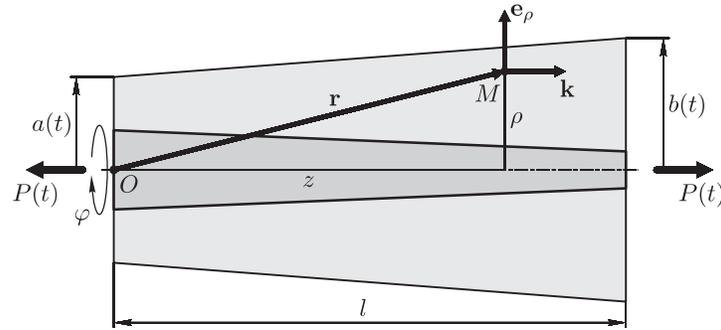


Рис. 1. Коническое тело, наращиваемое в условиях растяжения–сжатия (более темным цветом показана исходно существующая часть тела)

По определению  $\omega(\tau, \tau) \equiv 0$ . Учитывая это, легко убедиться в том, что

$$\mathcal{H}_\tau^{-1} \Delta(t, \tau) \equiv 1.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае функция  $\tau_0(\mathbf{r})$  тождественно равна  $t_0$  в исходно существующей части конуса, а в его дополнительной, сформированной в результате наращивания, части совпадает с распределением  $\tau_*(\mathbf{r})$  моментов присоединения частиц  $\mathbf{r}$  к растущему телу.

Совместим опорную плоскость полярной цилиндрической системы координат с тем из торцов конуса, радиус которого был обозначен через  $a$ , поместив начало координат  $O$  в центральную точку этого торца и направив перпендикулярную к нему координатную ось  $Oz$  внутрь конуса. Полярные радиус и угол обозначим через  $\rho$  и  $\varphi$ . Пусть  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}\}$  — нормированный локальный базис введенной цилиндрической системы координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Тогда радиус-вектор произвольной точки тела можно представить в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho(\varphi)\rho + \mathbf{k}z$  (рис. 1).

Движущаяся боковая поверхность наращиваемого конуса описывается уравнением  $\rho = \Lambda(z, t)$ , где  $\Lambda(z, t) = a(t)(1 - z/l) + b(t)z/l$ . След ее прохождения в пространстве формирует дополнительную часть рассматриваемого тела. В моменты времени  $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) боковая поверхность представляет собой текущую поверхность роста конуса, то есть является поверхностью уровня  $t$  функции  $\tau_*(\mathbf{r})$ . Единичные векторы внешней нормали к этой поверхности образуют в дополнительной части тела векторное поле  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \cos \alpha(\tau_*(\mathbf{r})) - \mathbf{k} \sin \alpha(\tau_*(\mathbf{r}))$ , где  $\alpha(t) = \arctg([b(t) - a(t)]/l)$  есть с точностью до знака текущий угол полураствора конуса.

В дальнейшем изложении будет использоваться еще одно обозначение. Для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  точки тела и времени и для произвольной функции времени  $f(t)$ , не связанной с конкретными точками рассматриваемого тела, обозначим  $g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t)$ ,  $f^\circ(t) = \mathcal{H}_{t_0} f(t)$ .

### 3. Краевая задача на этапе до начала наращивания

До начала наращивания напряженно-деформированное состояние рассматриваемого конического тела может быть определено на основании теории вязкоупругости однородно стареющих изотропных тел [1, 2] и принципа Сен-Венана из решения следующей классической краевой задачи механики с интегральными силовыми условиями на торцевой поверхности:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad 0 \leq \rho < \Lambda(z, t), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \\ \mathcal{H}_{t_0} \mathbf{T} &= 2\mathbf{E} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})/2; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \rho = \Lambda(z, t); \quad \int_{\{z=l\}} \left\| \mathbf{e}_\rho \rho \times (\mathbf{k} \cdot \mathbf{T}) \right\| dS = \left\| \begin{matrix} \mathbf{k} P(t) \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \rho = 0, \quad z = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — векторное поле перемещений. Здесь для исключения из рассмотрения составляющих перемещения, не вызывающих деформацию тела, наложены условия жесткого закрепления окрестности центральной точки его опорной торцевой поверхности. Выполнения этих условий будем требовать и после начала процесса наращивания рассматриваемого тела. Заметим еще, что указание на зависимость  $\Lambda$  от  $t$  на данном отрезке времени носит формальный характер, фактически такой зависимости пока нет.

С использованием введенного выше обозначения  $(\cdot)^\circ$  поставленную краевую задачу можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ &= \mathbf{0}, \quad 0 \leq \rho < \Lambda(z, t), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \\ \mathbf{T}^\circ &= 2\mathbf{E} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})/2; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^\circ &= \mathbf{0}, \quad \rho = \Lambda(z, t); \quad \int_{\{z=l\}} \left\| \mathbf{e}_\rho \rho \times (\mathbf{k} \cdot \mathbf{T}^\circ) \right\| dS = \left\| \begin{matrix} \mathbf{k} P(t) \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \rho = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В краевой задаче (3.2) время  $t$  уже не является существенной переменной, а лишь выступает в роли вещественного параметра.

### 4. Краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого тела

Нетрудно заметить, что основной особенностью деформирования любого наращиваемого тела, принципиально отличающей его как от тел с переменной вследствие снятия материала границей, так и от классических в континуальной механике тел постоянного состава, является отсутствие у такого тела единой недеформированной конфигурации. Из этого вытекает, во-первых, невозможность определения меры деформации растущего тела обычным для механики сплошной среды способом и, во-вторых, потребность в знании, вообще говоря, всей истории изменения состояния до-

полнительных материальных элементов вплоть до момента их включения в состав рассматриваемого тела.

В то же время понятно, что частицы нового материала после его сцепления с поверхностью роста продолжают свое движение уже в составе сплошного, пусть и растущего, тела. Это значит, что в области пространства, занимаемой в данный момент времени *всем* наращиваемым телом, однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  движения его частиц. Поэтому задачу о деформировании такого тела можно поставить для скоростей перемещений. При этом в формулировке определяющих соотношений материала в роли характеристики процесса деформирования (как, например, в задачах механики жидкости) должен выступать тензор скоростей деформации  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = (\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v})/2$ . Если рассматриваемый материал в составе нерастущего тела подчиняется уравнению состояния (2.1), то для него будет справедливо и соотношение [3]

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad (4.1)$$

где обозначено  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \partial\mathbf{T}^\circ/\partial t$ . При решении задачи о деформировании наращиваемого тела, поставленной для скоростей движения его частиц, будем считать это соотношение исходным.

Что касается предыстории деформирования дополнительных элементов, то в рассматриваемом случае, когда они начинают деформироваться непосредственно в момент присоединения к телу, на этапе непрерывного наращивания достаточно знать *полный тензор напряжений* в точках текущей поверхности роста [3, 4, 5]. Этот тензор определяет начальные напряжения в присоединяемом материале и в решаемой задаче должен приниматься нулевым независимо от процессов, происходящих в самом теле:

$$\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \rho = \Lambda(z, t), \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (4.2)$$

Обратим внимание на то, что такое краевое условие является нетрадиционным в механике деформируемого твердого тела. Заметим также, что из (4.2) следует равенство нулю вектора напряжения  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  на текущей поверхности роста. Именно это обстоятельство позволяет использовать краевую задачу (3.1), в том числе, и в момент начала наращивания  $t = t_1$ , когда присоединившийся к телу слой материала имеет еще нулевой объем и поэтому для всего рассматриваемого тела остаются справедливыми классические соотношения, но напряжения на поверхности роста должны быть уже согласованы с задаваемым на ней тензором начальных напряжений.

Уравнение локального равновесия кусочно-непрерывно наращиваемого тела формулируется так же, как и для тела постоянного состава и в рассматриваемом случае отсутствия массовых сил имеет вид  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . Как показано в [3], при отсутствии нагрузки на будущей и фактической поверхности роста тела в течение всего процесса его деформирования (а именно такой случай имеет место в решаемой задаче о конусе) данное уравнение приводит к аналогичным по виду дифференциальным уравнениям для тен-

зоров  $\mathbf{T}^\circ$  и  $\mathbf{S}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

справедливым в каждый момент времени  $t > t_1$  в области, занимаемой в этот момент *всем* рассматриваемым телом. Стоит отметить, что эти уравнения не являются тривиальным следствием уравнения равновесия, поскольку для наращиваемого тела интегральный оператор  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и оператор дивергенции в общем случае не коммутируют ввиду принципиальной зависимости момента возникновения напряжений  $\tau_0$  от точки тела  $\mathbf{r}$ .

Следуя [3], покажем, что из специфического краевого условия (4.2) на движущейся поверхности  $\rho = \Lambda(z, t)$  вытекает условие на компоненты тензора  $\mathbf{S}$ , аналогичное по виду стандартному краевому условию для напряжений. Действительно, совокупность условий (4.2) на промежутке времени  $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$  можно записать в форме начального условия в той части тела, которая сформирована на  $k$ -м этапе его непрерывного роста:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad t = \tau_*(\mathbf{r}), \quad \Lambda(z, t_{2k-1}) \leq \rho < \Lambda(z, t_{2k}). \quad (4.4)$$

В силу определения оператора  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  это условие эквивалентно тождеству

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) \equiv \mathbf{0} \quad (4.5)$$

в указанной части тела. Действуя на него оператором дивергенции, получим  $\mathbf{0} \equiv [\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)]|_{t=\tau_*(\mathbf{r})} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r}))$ . Привлекая первое уравнение (4.3) и очевидное геометрическое тождество  $\mathbf{n} = \nabla \tau_*/|\nabla \tau_*|$ , придем к следующему условию на текущей поверхности роста на  $k$ -м этапе:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \rho = \Lambda(z, t), \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}). \quad (4.6)$$

В паузах между этапами непрерывного роста и после окончательного прекращения наращивания конуса нетрадиционное условие (4.2) на его боковой поверхности следует заменить классическим условием равенства нулю вектора напряжения  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . Действуя на него оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и дифференцируя результат по времени, убеждаемся, что краевое условие (4.6) сохраняет силу и на данных интервалах времени, хотя имеет здесь уже совсем иную механическую природу.

На торцевой поверхности конуса после начала его кусочно-непрерывного роста должны выставляться такие же интегральные силовые условия, как и в задаче (3.1) до начала наращивания. Однако теперь область интегрирования уже зависит от времени  $t$  и переход от исходных условий к условиям на компоненты тензора  $\mathbf{S}$  является отдельной математической проблемой. Решение этой проблемы получается на основании следующего вспомогательного общего утверждения геометрического характера.

**Лемма.** Пусть  $\Omega_0 \cup \Omega_A$  — некоторая ограниченная поверхность внутри или на границе произвольного тела, подчиненного уравнению состояния (4.1) и сформированного в процессе кусочно-непрерывно наращивания за  $N$  этапов  $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) непрерывного роста при произвольных по длительности паузах между ними. Часть  $\Omega_0$  этой поверхности целиком

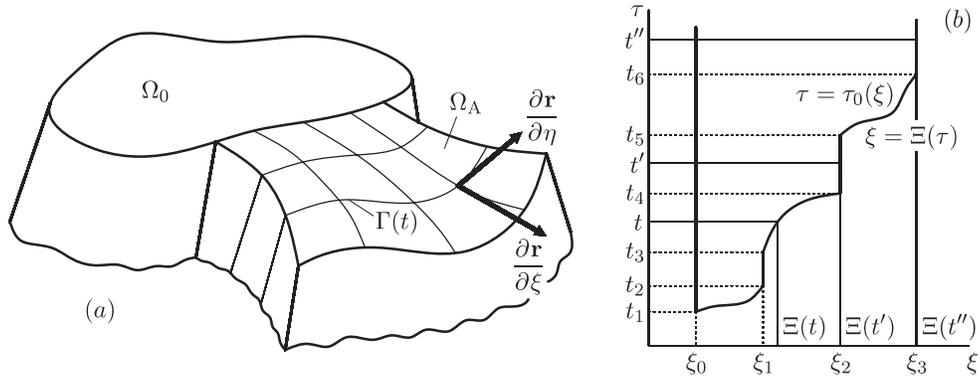


Рис. 2. К формулировке и доказательству леммы

располагается в исходной части рассматриваемого тела. Часть  $\Omega_A$  получена движением в пространстве некоторой кривой  $\Gamma(t)$ ,  $t \in [t_1, +\infty)$ , которая в каждый момент непрерывного наращивания лежит на текущей поверхности роста тела, а вне промежутков  $[t_{2k-1}, t_{2k})$  неподвижна. Пусть  $g(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция, определенная в точках  $\mathbf{r}$  рассматриваемой поверхности при  $t \geq \tau_0(\mathbf{r})$ , где

$$\tau_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_0, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_A \end{cases}$$

— распределение моментов возникновения напряжений в точках поверхности,  $t_0$  — момент загрузки исходной части тела,  $\tau_*(\mathbf{r})$  — момент присоединения к телу частицы с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

Тогда, если через  $\Omega(t)$  обозначить ту часть рассматриваемой поверхности, которая уже сформирована к моменту времени  $t \geq t_0$ ,

$$\Omega(t) = \Omega_0 \cup \Omega_*(t), \quad \Omega_*(t) = \begin{cases} \emptyset, & t \in [t_0, t_1], \\ \{\Gamma(\tau) \mid t_1 \leq \tau \leq t\}, & t \in (t_1, +\infty), \end{cases}$$

то при  $t > t_1$  будет справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega(t)} g(\mathbf{r}, t) dS \right] = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial g^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS + \int_{\Gamma(t)} \frac{g_*(\mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}, t)}{G(t)} ds, \quad (4.7)$$

где  $g_*(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r}))$  — начальные значения функции  $g$  в точках дополнительной части  $\Omega_A$  рассматриваемой поверхности,  $\epsilon(\mathbf{r}, t)$  — нормальная к кривой  $\Gamma(t)$  составляющая скорости ее движения по  $\Omega_A$  в точке  $\mathbf{r} \in \Gamma(t)$ .

**Доказательство.** Введем на  $\Omega_A$  параметризацию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta)$ , индуцированную программой роста, то есть такие внутренние координаты  $(\xi, \eta)$  на этой поверхности, в которых каждая кривая  $\Gamma(t)$  задается уравнением  $\xi = \Xi(t)$ ,  $t \geq t_1$ , где  $\Xi(t)$  — неубывающая функция, постоянная вне промежутков непрерывного роста, а  $\eta \in [A, B]$  есть общий линейный параметр всех кривых  $\Gamma(t)$  (рис. 2, а). При этом  $\xi \in [\xi_0, \xi_M]$ , где

$$\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{N-1} \leq \xi_N, \\ \xi_0 = \Xi(t_1), \quad \xi_k = \Xi([t_{2k}, t_{2k+1}]) \quad (k = 1, \dots, N-1), \quad \xi_N = \Xi([t_{2N}, +\infty)).$$

Заметим, что в координатах  $(\xi, \eta)$  момент  $\tau_0(\mathbf{r})$  возникновения напряжений в точках поверхности  $\Omega_A$  зависит только от  $\xi$ , причем  $\Xi(\tau_0(\xi)) \equiv \xi$ .

Тогда можем записать

$$\int_{\Omega_*(t)} \frac{\partial g^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS = \int_A^B d\eta \int_{\xi_0}^{\Xi(t)} \frac{\partial g^\circ(\xi, \eta, t)}{\partial t} J(\xi, \eta) d\xi.$$

Здесь величина  $J(\xi, \eta)$  определяет элемент площади поверхности  $\Omega_A$  в криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  и равна

$$J(\xi, \eta) = |\partial \mathbf{r} / \partial \xi \times \partial \mathbf{r} / \partial \eta| = \partial s_\xi / \partial \xi \partial s_\eta / \partial \eta \sin \omega, \quad (4.8)$$

где  $s_{\xi, \eta}(\xi, \eta)$  — натуральные параметры координатных линий  $\eta = \text{const}$  и  $\xi = \text{const}$ , отсчитываемые в направлениях возрастания координат  $\xi$  и  $\eta$  соответственно, а  $\omega(\xi, \eta) \in (0, \pi)$  — угол между координатными линиями.

Далее, используя правило дифференцирования интеграла по параметру и раскрывая символическое обозначение  $( )^\circ$ , запишем

$$\int_{\xi_0}^{\Xi(t)} \frac{\partial g^\circ(\xi, \eta, t)}{\partial t} J(\xi, \eta) d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi_0}^{\Xi(t)} g^\circ(\xi, \eta, t) J(\xi, \eta) d\xi - \\ - g^\circ(\Xi(t), \eta, t) J(\Xi(t), \eta) \Xi'(t), \\ \int_{\xi_0}^{\Xi(t)} g^\circ(\xi, \eta, t) J(\xi, \eta) d\xi = \\ = \int_{\xi_0}^{\Xi(t)} \frac{g(\xi, \eta, t)}{G(t)} J(\xi, \eta) d\xi - \int_{t_1}^t K(t, \tau) d\tau \int_{\xi_0}^{\Xi(\tau)} \frac{g(\xi, \eta, \tau)}{G(\tau)} J(\xi, \eta) d\xi.$$

В последнем интеграле исходный порядок интегрирования изменен согласно правилу (см. рис. 2, *b*)

$$\int_{\xi_0}^{\Xi(t)} d\xi \int_{\tau_0(\xi)}^t \dots d\tau = \int_{t_1}^t d\tau \int_{\xi_0}^{\Xi(\tau)} \dots d\xi.$$

В соответствии со спецификой введения координат  $(\xi, \eta)$  на поверхности  $\Omega_A$  и представлением (4.8) можем записать

$$\int_A^B g^\circ(\Xi(t), \eta, t) J(\Xi(t), \eta) \Xi'(t) d\eta = \int_{\Gamma(t)} g^\circ(\mathbf{r}, t) \epsilon(\mathbf{r}, t) ds;$$

здесь введена функция

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \partial s_\xi(\mathbf{r}) / \partial \xi \Xi'(t) \sin \omega(\mathbf{r}),$$

которая по своему геометрическому смыслу есть величина нормальной к кривой  $\Gamma(t)$  составляющей скорости ее движения с течением времени по поверхности  $\Omega_A$ . Вне промежутков непрерывного наращивания, когда скорость движения  $\Gamma(t)$  равна нулю, записанный интеграл по  $\Gamma(t)$  обращается в нуль независимо от значений  $g^\circ$ . Во время непрерывного роста справедливо

тождество  $\tau_0(\mathbf{r})|_{\Gamma(t)} = t$  и, следовательно,  $g^\circ(\mathbf{r}, t) = g_*(\mathbf{r})/G(t)$  на  $\Gamma(t)$ . Поэтому в подынтегральном выражении записанного криволинейного интеграла функцию  $g^\circ(\mathbf{r}, t)$  можно заменить на отношение  $g_*(\mathbf{r})/G(t)$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*(t)} \frac{\partial g^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega_*(t)} \frac{g(\mathbf{r}, t)}{G(t)} dS - \right. \\ &\left. - \int_{t_1}^t K(t, \tau) d\tau \int_{\Omega_*(\tau)} \frac{g(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} dS \right] - \int_{\Gamma(t)} \frac{g_*(\mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}, t)}{G(t)} ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поскольку  $\tau_0(\mathbf{r}) \equiv t_0$  при  $\mathbf{r} \in \Omega_0$  и  $\Omega(\tau) \equiv \Omega_0$  при  $\tau \in [t_0, t_1]$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\partial g^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dS &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega_0} \frac{g(\mathbf{r}, t)}{G(t)} dS - \right. \\ &\left. - \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) d\tau \int_{\Omega(\tau)} \frac{g(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} dS - \int_{t_1}^t K(t, \tau) d\tau \int_{\Omega_0} \frac{g(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} dS \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Складывая (4.9) и (4.10), получаем доказываемую формулу (4.7).

**Замечание.** Заметим, что рассматриваемая в доказанной лемме поверхность может обладать произвольной кривизной. Границы ее частей  $\Omega_0$  и  $\Omega_A$  могут не иметь общих точек. При этом форма поверхности  $\Omega_0$  совершенно не существенна, важно лишь, чтобы она целиком находилась в исходной части тела. В частном случае возможно  $\Omega_0 = \emptyset$ . Образующие поверхность  $\Omega_A$  кривые  $\Gamma(t)$  могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми кусочно-гладкими кривыми. В частности, поверхность  $\Omega_A$  может "опоясывать" исходную часть тела или образовывать "трубку", охватывающую только материал его дополнительной части.

В решаемой задаче о наращивании усеченного конуса в качестве поверхности  $\Omega(t)$  нужно рассмотреть плоскую поверхность, представляющую его торец  $z = l$  в момент времени  $t \geq t_0$ . Кривыми  $\Gamma(\tau)$ , образующими часть  $\Omega_*(t)$  этой поверхности, будут концентрические окружности  $\rho = b(\tau)$ , а частью  $\Omega_0$  — круг  $0 \leq \rho \leq b_0$ . Тогда по лемме в силу условия (4.4) будет

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\{z=l\}} \left\| \mathbf{e}_\rho \rho \times (\mathbf{k} \cdot \mathbf{T}) \right\| dS \right]^\circ = \int_{\{z=l\}} \left\| \mathbf{e}_\rho \rho \times (\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \right\| dS, \quad t > t_1.$$

Таким образом, собирая вместе все сформулированные выше соотношения для тензора  $\mathbf{S}$ , можем поставить следующую краевую задачу, описывающую процесс деформирования рассматриваемого конического тела на всем временном луче после начала его наращивания:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \quad 0 \leq \rho < \Lambda(z, t), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\chi - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \quad \rho = \Lambda(z, t); \quad \int_{\{z=l\}} \left\| \mathbf{e}_\rho \rho \times (\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \right\| dS = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{k} \partial P^\circ(t)/\partial t \\ \mathbf{0} \end{array} \right\|; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \rho = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Записанные здесь условия на векторное поле  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в окрестности начала координат  $O$  с очевидностью вытекают из выставленного ранее требования жесткого закрепления этой окрестности на протяжении всего процесса.

Видим, что как задача (3.2), так и задача (4.11) оказались по форме совпадающими с классической задачей о равновесии линейно упругого усеченного кругового конуса со свободной боковой поверхностью  $\rho = \Lambda(z, t)$ ,  $z \in [0, l]$ , где  $t$  — некоторый вещественный параметр, жестко закрепленного в начале координат, и находящегося под действием центрально приложенных к его торцам осевых сил, также зависящих от параметра  $t$ . Это формальное совпадение достигается заменой в задачах (3.2) и (4.11) величин  $P^\circ$  и  $\partial P^\circ / \partial t$  на величину растягивающей силы, отнесенную к модулю сдвига, тензоров  $\mathbf{T}^\circ$  и  $\mathbf{S}$  — на отнесенный к модулю сдвига тензор напряжений, а в задаче (4.11) — также тензора  $\mathbf{D}$  на тензор малой деформации и вектора  $\mathbf{v}$  на вектор перемещения.

## 5. Решение задачи о растяжении–сжатии упругого усеченного конуса

Рассмотрим нерастущий упругий усеченный конус длины  $l$ , к торцам которого радиуса  $a$  и  $b$  приложены растягивающие центральные осевые силы величины  $P$ . Полярную цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  на занятой этим конусом области введем так же, как для наращиваемого конического тела, то есть совместим опорную плоскость с торцом радиуса  $a$ , а перпендикулярную ей ось  $Oz$  направим внутрь тела и совместим с осью его симметрии. Конус будем считать достаточно протяженным вдоль этой оси в сравнении с его поперечными размерами. В этом случае конкретный вид распределения действующих сил по торцам не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние большей части тела, поэтому данное состояние может быть получено на основании известного решения задачи о растяжении бесконечно протяженного остrokонечного конуса приложенной к его вершине осевой силой  $P$ . В сферической системе координат  $(R, \Theta, \Phi)$  с центром в вершине конуса, где долготный угол  $\Phi$  отсчитывается вокруг оси симметрии конуса, полюсной угол  $\Theta$  — от направления этой оси внутрь тела, а  $R$  есть длина радиус-вектора, указанное решение имеет вид [6]

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_R u_R + \mathbf{e}_\Theta u_\Theta,$$

$$\left\| \begin{array}{l} u_R \\ u_\Theta \end{array} \right\| = \frac{P}{4\pi GR Q(\cos \Theta_0)} \left\| \begin{array}{l} 2(\varkappa + 1) \cos \Theta - (1 + \cos \Theta_0) \\ [(1 + \cos \Theta_0)/(1 + \cos \Theta) - (\varkappa + 2)] \sin \Theta \end{array} \right\|;$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R \sigma_R + \mathbf{e}_\Theta \mathbf{e}_\Theta \sigma_\Theta + \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi \sigma_\Phi + (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_\Theta \mathbf{e}_R) \tau_{R\Theta},$$

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_R \\ \sigma_\Theta \\ \sigma_\Phi \\ \tau_{R\Theta} \end{array} \right\| = \frac{P}{2\pi R^2 Q(\cos \Theta_0)} \left\| \begin{array}{l} 1 + \cos \Theta_0 - (3\varkappa + 1) \cos \Theta \\ [1 - (1 + \cos \Theta_0)/(1 + \cos \Theta)] \cos \Theta \\ \cos \Theta - (1 + \cos \Theta_0)/(1 + \cos \Theta) \\ [1 - (1 + \cos \Theta_0)/(1 + \cos \Theta)] \sin \Theta \end{array} \right\|.$$

Здесь  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\Phi\}$  — нормированный локальный базис сферической системы координат,  $\Theta_0$  — угол полураствора конуса,  $Q(\xi) = \varkappa \xi^3 - \xi^2 + \xi - \varkappa$ .

Для применения записанного решения к поставленной в настоящем разделе задаче теории упругости необходимо, продлив боковую поверхность рассматриваемого усеченного конуса, дополнить его до бесконечного конуса с острой вершиной и разобрать отдельно случаи  $a < b$  и  $a > b$ . В первом случае из двух торцов усеченного конуса опорный располагается ближе к вершине  $O'$  полного конуса, а во втором — дальше от нее. Поэтому в первом случае вектор  $\mathbf{k}$  и вектор, задающий направление  $\Theta = 0$ , а также вектор  $\mathbf{e}_\Phi$  и вектор  $\mathbf{e}_\Theta$  сонаправлены в каждой точке тела, а во втором — направлены противоположно. Таким образом, переход из сферической в исходную цилиндрическую систему координат осуществляется с помощью преобразования местных базисов

$$\|\mathbf{e}_R \ \mathbf{e}_\Theta \ \mathbf{e}_\Phi\| = \|\mathbf{e}_\rho \ \mathbf{e}_\varphi \ \mathbf{k}\| \begin{vmatrix} \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm \cos \Theta & \mp \sin \Theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Верхние знаки соответствуют случаю  $a < b$ , нижние — случаю  $a > b$ . При этом также нужно положить

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}, \quad \cos \Theta = \pm(z+d)/R, \quad \sin \Theta = \rho/R, \quad \Theta_0 = \pm\alpha,$$

где  $d = la/(b-a)$  с точностью до знака есть расстояние от опорного торца  $z=0$  до вершины  $O'$ ,  $\alpha = \arctg[(b-a)/l]$  — с точностью до знака угол полураствора конуса. Выполняя описанные преобразования и обеспечивая жесткое закрепление окрестности начала координат  $O$  добавлением надлежащей константы к получаемым в итоге осевым перемещениям, найдем

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\rho u_\rho + \mathbf{e}_z u_z,$$

$$\begin{vmatrix} u_\rho \\ u_z + c \end{vmatrix} = \frac{P}{4\pi G R(\rho, z) Q(\cos \alpha)} \begin{vmatrix} \left[ \frac{\pm \varkappa(z+d)}{R(\rho, z)} - \frac{1 + \cos \alpha}{1 \pm (z+d)/R(\rho, z)} \right] \frac{\rho}{R(\rho, z)} \\ \pm [\varkappa(z+d)^2/R^2(\rho, z) + \varkappa + 1 - \cos \alpha] \end{vmatrix},$$

где

$$c = P(2\varkappa + 1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha / [4\pi G a Q(\cos \alpha)];$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sigma_z + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho) \tau_{\rho z},$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{\rho z} \end{vmatrix} = \frac{P}{2\pi R^2(\rho, z) Q(\cos \alpha)} \begin{vmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{1 \pm (z+d)/R(\rho, z)} \mp \left[ \cos \alpha + \frac{3\varkappa \rho^2}{R^2(\rho, z)} \right] \frac{z+d}{R(\rho, z)} \\ \pm \frac{z+d}{R(\rho, z)} - \frac{1 + \cos \alpha}{1 \pm (z+d)/R(\rho, z)} \\ \pm [\cos \alpha - 3\varkappa(z+d)^2/R^2(\rho, z)] (z+d)/R(\rho, z) \\ \pm [\cos \alpha - 3\varkappa(z+d)^2/R^2(\rho, z)] \rho/R(\rho, z) \end{vmatrix}.$$

Можно заметить, что использование в полученных выражениях величины  $R_\pm = R/\operatorname{sgn}(b-a)$  позволяет записать их в одном и том же виде для всех

соотношений между параметрами  $a$  и  $b$ . Вычислим

$$z + d = \Lambda(z) / \operatorname{tg} \alpha, \quad \Lambda(z) = a(1 - z/l) + bz/l;$$

$$R_{\pm} = \frac{|\operatorname{tg} \alpha| R}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Lambda(z)}{\zeta(\rho, z) \operatorname{tg} \alpha}, \quad \zeta(\rho, z) = \left[ \frac{\rho^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\Lambda^2(z)} + 1 \right]^{-1/2}.$$

Введенные здесь функции  $\Lambda(z)$  и  $\zeta(\rho, z)$  представляют собой соответственно функцию формы боковой поверхности конуса и отношение  $(z + d)/R_{\pm}(\rho, z)$ , равное в каждой точке конуса косинусу угла  $\Theta$ . С их участием выражения для перемещений и напряжений принимают вид

$$\left\| \begin{array}{l} u_{\rho} \\ u_z + c \end{array} \right\| = \frac{P \zeta(\rho, z) \operatorname{tg} \alpha}{4\pi G \Lambda(z) Q(\cos \alpha)} \left\| \begin{array}{l} \left[ \varkappa \zeta(\rho, z) - \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \zeta(\rho, z)} \right] \frac{\zeta(\rho, z) \rho \operatorname{tg} \alpha}{\Lambda(z)} \\ \varkappa \zeta^2(\rho, z) + \varkappa + 1 - \cos \alpha \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{\rho} \\ \sigma_{\varphi} \\ \sigma_z \\ \tau_{\rho z} \end{array} \right\| = \frac{P \zeta^2(\rho, z) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\pi \Lambda^2(z) Q(\cos \alpha)} \left\| \begin{array}{l} \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \zeta(\rho, z)} - [\cos \alpha - 3\varkappa \zeta^2(\rho, z) + 3\varkappa] \zeta(\rho, z) \\ \zeta(\rho, z) - [1 + \cos \alpha]/[1 + \zeta(\rho, z)] \\ [\cos \alpha - 3\varkappa \zeta^2(\rho, z)] \zeta(\rho, z) \\ [\cos \alpha - 3\varkappa \zeta^2(\rho, z)] \zeta(\rho, z) \rho \operatorname{tg} \alpha / \Lambda(z) \end{array} \right\|.$$

Величина  $P/[\pi \Lambda^2(z)]$ , которой пропорциональны все напряжения, представляет собой, очевидно, среднее нормальное напряжение, действующее в поперечном сечении конуса  $z = \operatorname{const}$ .

Нетрудно убедиться, что полученные выражения сохраняют силу и в исключаемом прежде из рассмотрения особом случае цилиндрического тела. При  $\alpha \rightarrow 0$  для произвольных фиксированных  $\rho$  и  $z$  имеем

$$u_{\rho} \rightarrow -\frac{P(\varkappa - 1)\rho}{2\pi a^2(3\varkappa - 1)G}, \quad u_z \rightarrow \frac{P\varkappa z}{\pi a^2(3\varkappa - 1)G}, \quad \sigma_z \rightarrow \frac{P}{\pi a^2}, \quad \sigma_{\rho, \varphi}, \tau_{\rho z} \rightarrow 0,$$

что соответствует решению задачи Сен-Венана о растяжении силой  $P$  цилиндра с закрепленным торцом  $z = 0$ .

## 6. Построение решения задачи наращивания

В предыдущем разделе построено решение классической задачи о растяжении упругого нерастущего конического тела при произвольном соотношении между радиусами его нагруженных торцевых поверхностей. Как следует из заключения, сделанного в конце раздела 4, после надлежащей замены входящих в это решение величин можно получить решения краевых задач (3.2) и (4.11). Они будут зависеть от введенных в разделе 2 функций  $\alpha(t)$  и  $\Lambda(z, t)$  и от функции  $\zeta(\rho, z, t) = [\rho^2 \operatorname{tg}^2 \alpha(t) / \Lambda^2(z, t) + 1]^{-1/2}$ .

В результате в каждой точке  $\mathbf{r}$  рассматриваемого кусочно-непрерывно наращиваемого стареющего вязкоупругого конического тела будет известна

эволюция вектора скорости  $\mathbf{v}$  и тензора  $\mathbf{S}$  на временном луче

$$t > \tau_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_1, & 0 \leq \rho < \Lambda(z, t_0), \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \Lambda(z, t_0) \leq \rho < \Lambda(z, t_{2N}), \end{cases}$$

а в точках исходной части этого тела — также эволюция вектора перемещения  $\mathbf{u}$  и тензора  $\mathbf{T}^\circ$  на отрезке времени  $t \in [t_0, t_1]$ . После этого с помощью процедуры интегрирования можно восстановить эволюцию тензора  $\mathbf{T}^\circ$  в любой точке тела при всех  $t \geq \tau_1(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau$$

соответственно в исходной и дополнительной части. При записи последнего равенства использовано тождество (4.5).

Когда в точке  $\mathbf{r}$  рассматриваемого тела известна полная эволюция тензора  $\mathbf{T}^\circ$ , то есть значения этого тензора начиная с момента  $t = \tau_0(\mathbf{r})$  возникновения напряжений в данной точке, полную эволюцию тензора напряжений  $\mathbf{T}$  можно найти с помощью обратного к  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  преобразования  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}^{-1}$ :

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau.$$

Однако при заданном ядре ползучести  $K(t, \tau)$  выражение для ядра релаксации  $R(t, \tau)$  может быть не известно в замкнутом виде или же быть слишком громоздким. Тогда менее затратной с вычислительной точки зрения, а возможно даже, и более точной будет процедура построения эволюции  $\mathbf{T}$  путем численного обращения уравнения Вольтерра

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t),$$

например, простейшим методом квадратур [7].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-1245.2006.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

## Литература

- [1] Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. — 318 с.
- [2] Арутюнян, Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н.Х. Арутюнян. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952. — 323 с.
- [3] Манжиров, А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела / А.В. Манжиров // ПММ. — 1995. — Т. 59. — Вып. 5. — С. 836–848.

- [4] Тринчер, В.К. Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей / В.К. Тринчер // Проблемы современной механики. Ч. 2 / Под ред. акад. Л.И. Седова. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 149 с.
- [5] Арутюнян, Н.Х. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению / Н.Х. Арутюнян, В.В. Метлов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – №4. – С. 142–152.
- [6] Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1955. – 491 с.
- [7] Полянин, А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М.: Физматлит, 2003. – 608 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;  
в окончательном варианте – 15/V/2007.

## MODELING OF THE DEFORMATION PROCESS OF ACCRETED CONIC SOLIDS

© 2007 A.V. Manzhirov, D.A. Parshin<sup>3</sup>

A lot of applied topical problems of technics, technology, civil engineering, biology, medicine, and many other areas of natural sciences require precise knowledge of stress-strain field evolution in growing (accreted) conic solids. Various shafts, bearings, columns, bones, biological soft tissues can be taken as particular examples of such solids. The deformation process of viscoelastic aging accreted conic solids under outer tensile or compressive end forces is studied. The general formulation of the problem is presented. Boundary value problems which arise on various stages of accretion process are formulated. Their closed solutions are obtained.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

---

<sup>3</sup>Manzhirov Alexander Vladimirovich ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)), Parshin Dmitry Alexandrovich ([parshin@ipmnet.ru](mailto:parshin@ipmnet.ru)), Laboratory for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Avenue 101 Bldg 1, Moscow, 119526, Russia.