

КОРРЕКТНАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ АНИЗОТРОПНОЙ АССОЦИИРОВАННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ: ТЕЧЕНИЕ ХИЛЛА¹

© 2007 А.А. Лукьянов, В.Б. Пеньков²

Предложена корректная модель несжимаемого анизотропного ассоциированного пластического течения, основанная на полной декомпозиции тензора напряжений на обобщенную сферическую и девиаторную части. Определена концепция полного обобщенного гидростатического напряжения для анизотропного тела. Показано, что в случае изотропного тела обобщенное давление редуцируется к классическому гидростатическому напряжению. Формулировка анизотропной пластичности в случае несжимаемого анизотропного ассоциированного течения не зависит от обобщенного гидростатического напряжения. Предложена модификация анизотропного критерия Хилла, свободная от внутреннего противоречия.

Введение

Описание пластического поведения материала — один из наиболее важных и увлекательных процессов в моделировании деформирования твердого тела. Традиционно, поверхности текучести материалов подразделяют на феноменологические, основанные на классической теории пластичности, и физические, основанные на микроструктуре материала. Феноменологические модели базируются на предположениях: 1) среда однородна на макроскопическом уровне; 2) условие текучести зависит от тензоров напряжений, деформаций, и, возможно, скоростей деформаций.

Концепции поверхности текучести и пластического потенциала являются основополагающими предположениями в классической теории математической пластичности [1–4]. В теории анизотропной пластичности наиболее известным является квадратичный критерий Хилла (1948) [5, 6], который

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

²Лукьянов Александр Алексеевич (aaluk@mail.ru), Пеньков Виктор Борисович (viktorp@lipetsk.ru), кафедра теоретической механики Липецкого государственного технического университета, 398600, Россия, г. Липецк, ул. Московская, 30.

содержит 6 параметров, определяющих пластическое состояние анизотропного тела. В последнее время появилось большое количество работ по анизотропной пластичности и множество критериев, позволяющих описывать пластическое поведение различных материалов (см. Хилл (Hill, 1990) [7], Хосфорд (Hosford) (1985) [8]), работы по поверхностям текучести 4-го порядка Готоха (Gotoh) (1977) [9], Арминьона и др. (Arminjon et al.) (1994) [10]), а также по поверхностям текучести порядка k , предложенные Барлатом и Лиан (Barlat and Lian, 1989) [11], Барлатом и др. (Barlat et al., 1991) [12], Карафалисом и Бойсом (Karafillis and Boyce, 1993) [13], Броном и Бессоном (Bron and Besson, 2004) [14].

Ниже сформулирована математически корректная система определяющих соотношений для анизотропного несжимаемого ассоциированного пластического течения. Большинство математических моделей анизотропной пластичности используют два основных предположения: 1) пластическое течение несжимаемо (что подтверждено экспериментально для большого числа изотропных и анизотропных металлов); 2) поверхность текучести не зависит от гидростатического напряжения. Показано, что в этих предположениях для общего случая анизотропного тела существует напряженное состояние, соответствующее только объемным деформациям (упругим), но удовлетворяющее критерию пластичности. Таким образом, модели являются внутренне противоречивыми. Можно построить непротиворечивую систему предположений, проведя декомпозицию тензора напряжений на обобщенную сферическую (обобщенное гидростатическое напряжение) и обобщенную девиаторную части и постулируя независимость условия текучести от обобщенного гидростатического напряжения. Для формального описания декомпозиции используется фундаментальный тензор α_{ij} , представляющий собой обобщение символа Кронекера на анизотропный случай и редуцирующийся к таковому в изотропном случае. Ниже представлен алгоритм его построения. В большинстве существующих вычислительных пакетов используется критерий пластичности Хилла (Hill, 1948) [6], несмотря на все его недостатки. Предлагается математически корректная модификация данного критерия, и это не ограничивает применение построенных соотношений для иных модификаций уже существующих функций-критериев.

1. Математически корректная модель пластического течения несжимаемого анизотропного материала

Главные предположения классической феноменологической модели пластичности базируются на феномене поверхности текучести (разделяющей зоны упругости и упругопластичности в пространстве напряжений), пластического потенциала (градиент пластического потенциала описывает направление скоростей пластических деформаций), соотношений упрочнения

и предположения о несжимаемости материала при пластическом течении [3, 5]. Поверхность текучести описывается выпуклой функцией в пространстве напряжений, что является следствием постулата максимума диссипации энергии [4]. Обычно условие текучести предполагается независимым от гидростатического напряжения, но для анизотропных материалов такое предположение оказывается неверным, так как в теории возникает эффект развития сдвиговых деформаций всего лишь за счет наложения гидростатического напряжения. Но такие деформации могут привести к пластическому состоянию.

1.1. Обобщенная декомпозиция тензора напряжений

Корректность модели анизотропной пластичности требует описания изотропного случая как частного проявления анизотропии, т.е. модель должна редуцироваться к варианту изотропной пластичности. При изотропии гидростатическое напряжение вызывает объемные деформации, а девиаторная часть тензора напряжений определяет сдвиговые деформации. Для анизотропного тела такая декомпозиция теряет смысл. Она должна быть обобщена, потому как гидростатическое напряжение, приложенное даже к ортотропному телу, ведет к различным деформациям в различных направлениях, что качественно не соответствует объемным деформациям. Для определения иной интерпретации обобщенного гидростатического напряжения необходимо использовать следующий принцип: обобщенное гидростатическое напряжение, приложенное к анизотропному телу, должно вести к объемным деформациям при любой форме анизотропии тела. Как следствие, приходим к определению обобщенного разложения тензора напряжения. Таким образом, обобщенное гидростатическое напряжение $\tilde{P}$ разумно представить в виде:

$$\tilde{P} = p^* \alpha_{ij}, \quad (1.1)$$

где p^* — величина обобщенного напряжения, α_{ij} — обобщенный символ Кронекера. При такой формулировке удастся сохранить структуру всех фундаментальных отношений, присущих классическому гидростатическому напряжению. Теперь воспользуемся тем фактом, что девиатор напряжений не должен зависеть от обобщенного гидростатического напряжения:

$$\tilde{P} : \tilde{S} = 0, \quad \alpha_{ij} \tilde{S}_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = p^* \alpha_{ij} + \tilde{S}_{ij}, \quad (1.2)$$

где $\tilde{S}_{ij}$ — компоненты обобщенного девиатора напряжений:

$$\tilde{S}_{ij} = \sigma_{ij} - p^* \alpha_{ij}. \quad (1.3)$$

Условие нормальности (1.2) и соотношение (1.3), позволяют выписать выражение для обобщенного давления:

$$p^* = \frac{\sigma_{ij} \alpha_{ij}}{\alpha_{kl} \alpha_{kl}} = \frac{1}{\|\alpha\|} \sigma_{ij} \alpha_{ij}, \quad (1.4)$$

где $\|\alpha\| = \alpha_{ij}\alpha_{ij}$. Финальное выражение для обобщенной девиаторной части тензора напряжения выглядит следующим образом:

$$\tilde{S}_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \cdot \frac{1}{\|\alpha\|} \sigma_{kl} \alpha_{kl}. \quad (1.5)$$

Для полного описания методологии декомпозиции тензора напряжения необходимо представить алгоритм построения материального тензора α_{ij} . Требование несжимаемости пластического течения эквивалентно соответствию обобщенного гидростатического напряжения только упругим объемным деформациям, поэтому тензор α_{ij} может быть определен из обобщенного закона Гука. Рассмотрим объемное деформированное состояние, описываемое тензором деформаций $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}$. Вектор давления определяется выражением

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \delta_{11} \\ \varepsilon \delta_{22} \\ \varepsilon \delta_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} \\ C_{12} + C_{22} + C_{23} \\ C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} = K_C \cdot \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$p = K_C \cdot \varepsilon, \quad (1.7)$$

где C_{ij} — элементы матрицы жесткости, p — обобщенное напряжение в случае чистых объемных деформаций, K_C — обобщенный объемный модуль сжатия (растяжения). Чтобы сохранить возможность редукции к классическому изотропному случаю, компоненты тензора α_{ij} и параметр K_C определяем следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (C_{11} + C_{12} + C_{13}) \cdot 3\bar{K}_C, \\ \alpha_{22} &= (C_{12} + C_{22} + C_{23}) \cdot 3\bar{K}_C, \\ \alpha_{33} &= (C_{13} + C_{23} + C_{33}) \cdot 3\bar{K}_C, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\bar{K}_C = \left(\sqrt{3 \left[(C_{11} + C_{12} + C_{13})^2 + (C_{12} + C_{22} + C_{23})^2 + (C_{13} + C_{23} + C_{33})^2 \right]} \right)^{-1},$$

$$K_C = \frac{1}{9\bar{K}_C}, \quad (1.10)$$

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \|\alpha_{ij}\| = 3. \quad (1.11)$$

Тензор α_{ij} должен переходить в символ Кронекера в случае изотропного тела, поэтому его норма берется равной 3. Параметры α_{ij} , K_C описывают фундаментальные свойства анизотропного материала.

В случае изотропного тела тензор α_{ij} имеет следующие значения $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$, и поэтому для классического случая соотношение (1.4) принимает привычную форму:

$$p^* = \frac{\sigma_{ij}\delta_{ij}}{\delta_{kl}\delta_{kl}} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad p^* = p. \quad (1.12)$$

Обобщенный модуль объемного сжатия K_C также принимает классический вид:

$$K_C = \frac{E}{3(1-2\nu)} = K. \quad (1.13)$$

Таким образом, методология разложения тензора напряжения на обобщенную сферическую и девиаторную части тензора напряжения полностью определена.

1.2. Теория анизотропной пластичности с обобщенным девиатором напряжений

Пусть условие текучести не зависит от гидростатического напряжения. Рассмотрим напряженное состояние, описываемое тензором напряжений $\sigma_{ij} = p^* \alpha_{ij}$:

$$\hat{F}(\sigma_{ij}) = p^* \hat{F}(\alpha_{ij}) = Y, \quad p^* = \frac{Y}{\hat{F}(\alpha_{ij})}, \quad (1.14)$$

где функция $\hat{F}()$ описывает поверхность текучести, Y — предел текучести. Заметим, что величина $\hat{F}(\alpha_{ij})$ отлична от нуля и имеет положительное значение. Поэтому параметр p^* имеет конечное значение, и напряженное состояние, соответствующие тензору напряжения $\sigma_{ij} = p^* \alpha_{ij}$, может быть физически реализовано.

У сильно анизотропных материалов величина критического напряжения p^* уменьшается с ростом значения $\hat{F}(\alpha_{ij})$. Таким образом, построено напряженное состояние, соответствующие упругим объемным деформациям (в силу несжимаемости пластического течения), с одной стороны, и удовлетворяющие условию пластичности, с другой стороны.

Для анизотропных материалов (например, для ортотропного материала) обобщенное гидростатическое напряжение вызывает изотропное деформированное состояние. Такое нагружение вызывает только изменение масштабов. Поэтому для полной деформации получаем:

$$\mathbf{D}_{kk} = \mathbf{D}_{kk}^e + \mathbf{D}_{kk}^p = \mathbf{D}_{kk}^e. \quad (1.15)$$

Из соотношения (1.15) следует, что объемная деформация — упругая. Как следствие, поверхность текучести однозначно определяется обобщенной девиаторной частью тензора напряжения. В частности, в случае изотропии поверхность текучести определяется классическим девиатором напряжений. Модель несжимаемого анизотропного пластического течения базируется на обобщенном девиаторе напряжений:

$$\hat{F}(\tilde{S}_{ij}) = Y. \quad (1.16)$$

Использование фундаментальных соотношений термодинамики позволяет найти другие условия корректной формулировки анизотропного пластического течения.

1.3. Термодинамически корректная модель анизотропной пластичности с обобщенным девиатором напряжений

Постулат Друккера–Прагера (Drucker, 1959 [15]) определяет класс устойчиво упрочняющихся материалов. При этом ассоциированный закон является достаточным условием устойчивости: скорость пластической диссипации (диссипация энергии при развитии пластических деформаций) должна быть положительной для любых возможных процессов пластического деформирования [4]. Выражение для скорости пластической диссипации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{W}_M = \sigma : \dot{\epsilon}^p &= (\alpha_{ij}p^* + \tilde{S}_{ij}) \mathbf{D}_{ij}^p = \\ &= p^* \alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}^p + \tilde{S}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^p = Y \cdot \tilde{\epsilon}^p,\end{aligned}\quad (1.17)$$

где $\dot{W}_M$ — скорость пластической диссипации, $\mathbf{D}^p$ — симметрическая часть градиента скорости (тензор скоростей деформаций), $\tilde{\epsilon}^p$ — скорость изменения эффективной пластической деформации. Предположим, что

$$p^* \alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}^p = 0 \quad \text{для любых } p^*, \quad \text{или} \quad \alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}^p = 0. \quad (1.18)$$

Соотношение (1.18) вместе с ассоциированным законом пластичности позволяют удовлетворить постулату Друккера–Прагера и могут в общем случае быть интерпретированы как требования эквивалентности скорости пластической диссипации и скорости диссипации, зависящей от обобщенного девиатора напряжений (похожее предположение было сделано в работе Карафалиса и Бойса (Karafillis and Boyce, 1993) [13] при переходе от анизотропного тела к эквивалентно изотропному телу):

$$\dot{W}_M = \sigma : \dot{\epsilon}^p = \tilde{S}_{ij} d_{ij}^p = Y \cdot \tilde{\epsilon}^p, \quad d_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \tilde{S}_{ij}}, \quad (1.19)$$

где d_{ij}^p — скорости пластических деформаций, сопряженных с тензором $\tilde{S}_{ij}$.

Таким образом, математически и термодинамически корректная модель несжимаемого анизотропного течения базируется на предположениях:

1. $\hat{F}(\tilde{S}_{ij}) = Y$,
 2. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$,
 3. $\mathbf{D}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \tilde{S}_{ij}}, \quad \mathbf{D}_{kk}^p = 0$,
 4. $\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}^p = 0$.
- (1.20)

Предположение **3** совокупности соотношений (1.20) можно заменить иным, неассоциированным законом пластического течения.

2. Модификация критерия Хилла

Выполним модификацию критерия Хилла, используя соотношения (1.20).

1. Модифицированная функция Хилла может быть записана в следующем виде:

$$F(\tilde{S}_{yy} - \tilde{S}_{zz})^2 + G(\tilde{S}_{zz} - \tilde{S}_{xx})^2 + H(\tilde{S}_{xx} - \tilde{S}_{yy})^2 + 2N\tilde{S}_{xy}^2 + 2L\tilde{S}_{yz}^2 + 2M\tilde{S}_{xz}^2 = Y^2, \quad (2.1)$$

где F, G, H, N, L, M — параметры среды.

2. Тензор деформаций раскладывается на упругую и пластическую составляющие:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p.$$

3. Соотношение 3 системы (1.20) раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{xx}^p &= 2\dot{\lambda} \cdot [H(\tilde{S}_{xx} - \tilde{S}_{yy}) - G(\tilde{S}_{zz} - \tilde{S}_{xx})], \\ \mathbf{D}_{yy}^p &= 2\dot{\lambda} \cdot [F(\tilde{S}_{yy} - \tilde{S}_{zz}) - H(\tilde{S}_{xx} - \tilde{S}_{yy})], \\ \mathbf{D}_{yy}^p &= 2\dot{\lambda} \cdot [F(\tilde{S}_{yy} - \tilde{S}_{zz}) - H(\tilde{S}_{xx} - \tilde{S}_{yy})], \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D}_{xy}^p = 4\dot{\lambda} \cdot N \cdot \tilde{S}_{xy},$$

$$\mathbf{D}_{xz}^p = 4\dot{\lambda} \cdot M \cdot \tilde{S}_{xz},$$

$$\mathbf{D}_{yz}^p = 4\dot{\lambda} \cdot L \cdot \tilde{S}_{yz}.$$

После определения компонент тензора пластических деформаций условие несжимаемости выполняется автоматически:

$$\mathbf{D}_{xx}^p + \mathbf{D}_{yy}^p + \mathbf{D}_{zz}^p = 0.$$

4. Последнее соотношение из (1.20) дает ограничения на параметры F, G, H . Они могут быть определены из системы уравнений

$$\begin{aligned} F \cdot 0 + G(\alpha_{11} - \alpha_{33}) + H(\alpha_{11} - \alpha_{22}) &= 0, \\ F \cdot (\alpha_{11} - \alpha_{33}) + G \cdot 0 + H(\alpha_{22} - \alpha_{11}) &= 0, \\ F(\alpha_{33} - \alpha_{22}) + G(\alpha_{33} - \alpha_{11}) + H \cdot 0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где F , G , H константы модифицированного критерия Хилла. Заметим, что в случае изотропного тела ($\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij}$), система уравнений (2.3) переходит в тождество. В общем случае ($\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$), система (2.3) имеет ранг 2 и решение данной системы может быть записано в виде: $F = A \cdot \bar{F}(\alpha_{ij})$, $G = A \cdot \bar{G}(\alpha_{ij})$, $H = A \cdot \bar{H}(\alpha_{ij})$, где $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{H}$ зависят только от материального тензора α_{ij} :

$$\bar{F}(\alpha_{ij}) = -\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{22} - \alpha_{33}}, \quad \bar{G}(\alpha_{ij}) = -\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{33}}, \quad \bar{H}(\alpha_{ij}) = 1. \quad (2.4)$$

Кроме того, в случаях изотропии и специальной анизотропии, когда $\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij}$, разумно предположить, что $F = G = H = A$. Оставшиеся материальные параметры A , N , L , M должны быть определены из эксперимента.

3. Выводы

Представлена термодинамически и математически корректная модель ассоциированной несжимаемой анизотропной пластичности (2.4). Определен фундаментальный тензор α_{ij} , описывающая материальные свойства среды. Формулировка модели анизотропной несжимаемой пластичности свободна от обобщенного гидростатического напряжения. На основании обобщенной декомпозиции тензора напряжения и фундаментальных законов термодинамики показано, что в случае критерия Хилла и ассоциированного закона пластического течения количество параметров, необходимых для описания пластического течения, можно сократить с 6 до 4. Кроме того, возможно использовать функцию (2.4) в качестве пластического потенциала, а (2.1) — в качестве поверхности текучести в теории неассоциированной несжимаемой анизотропной пластичности.

Литература

- [1] Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю.Ишлинский, Д.Д.Ивлев. — М.: Физматлит, 2001. — 600 с.
- [2] Ивлев, Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д.Ивлев. — М.: Наука, 1966. — 232 с.
- [3] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М.Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- [4] Maugin, G. A. The thermodynamics of nonlinear irreversible behaviours: An introduction / G.A.Maugin. — World Scientific Publishing Co., 1999. — 392 p.
- [5] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р.Хилл. — М.: Гостехиздат, 1956. — 407 с.
- [6] Hill, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals / R.Hill // Proc. R. Soc. Lond. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 193(1033). — 1948. — P. 281–297.

- [7] Hill, R. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals / R. Hill // J. Mech. Phys. Solids. – 38(3). – 1990. – P. 405–417.
- [8] Hosford, W.F. Comments on anisotropic yield criteria / W.F. Hosford // Int. J. Mech. Sci. – 27(7–8). – 1985. – P. 423–427.
- [9] Gotoh, M. A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state)–I/ II / M. Gotoh // Int. J. Mech. Sci. – 19(9). – 1977. – P. 505–512/P. 513–520.
- [10] A forth order plastic potentials for anisotropic metals and its calculation from texture data / M. Arminjon [et. al.] // Acta Mechanica 107. – 1994. – P. 33–51.
- [11] Barlat, F. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: a yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions / F. Barlat, J. Lian // International Journal of Plasticity. – 5(1). – 1989. – P. 51–66.
- [12] Barlat, F. A six-component yield function for anisotropic materials / F. Barlat, D.J. Lege, J.C. Brem // Int. J. Plasticity. – 7(7). – 1991. – P. 693–712.
- [13] Karafillis, A.P. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor / A.P. Karafillis, M.C. Boyce // J. Mech. Phys. Solids. – 41(12). – 1993. – P. 1859–1886.
- [14] Bron, F. A yield function for anisotropic materials application to aluminum alloys / F. Bron, J. Besson // Int. J. Plasticity. – 20(4–5). – 2004. – P. 937–963.
- [15] Drucker, D.C. A definition of a stable inelastic material / D.C. Drucker // J. Appl. Mech. – 26. – 1959. – P. 101–106.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.

A MATHEMATICALLY CORRECT MODEL OF INCOMPRESSIBLE ANISOTROPIC ASSOCIATED PLASTICITY³

© 2007 A.A. Lukyanov, V.B. Pen'kov⁴

A mathematically correct associated incompressible anisotropic plastic flow model based on full decomposition of stress tensor into generalised spherical and deviatoric parts is studied in the paper. The concept of total generalised pressure is redefined for anisotropic materials. It is shown that total generalised pressure reduces to the classical hydrostatic pressure in the limit of isotropy. The formulation of anisotropic plasticity in the case of associated incompressible plastic flow does not depend from the generalised hydrostatic pressure. A mathematically consistent modification to the anisotropic Hill criterion is proposed.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴Lukyanov Alexander Alekseevich (aaluk@mail.ru), Pen'kov Victor Borisovich (vbpenjkov@mail.ru), Dept. of Theoretical Mechanics, Lipetsk State Technological University, Lipetsk, 398059, Russia.